

A DIFUSÃO DE MIE

DA TEORIA ORIGINAL A RECENTES CONTRIBUIÇÕES QUE
ALARGAM E ENRIQUECEM O SEU CAMPO DE APLICAÇÃO

por

MARIA AMÉLIA CUTILEIRO ÍNDIAS
Licenciada em Ciências Físico- Químicas pela
Faculdade de Ciências de Lisboa



3 2 6 1 8

*Estudo apresentado na Universidade
de Évora como prova complementar
do exame para obtenção do grau de
Doutor em Física.*

- Março 1983 -

ÍNDICE

Índice	I
INTRODUÇÃO	1
1. NOTICIA HISTÓRICA	4
1.1. Terminologia	4
1.2. Intepretação do fenômeno	6
2. A DIFUSÃO NA ATMOSFERA	9
2.1. Soluções aproximadas	10
3. TEORIA DA DIFUSÃO DE MIE	15
3.1. Solução de Mie	17
3.1.1. Representação do campo em termos de potenciais de Debye	17
3.1.2. Nova expressão das componentes do campo	25
4. CONSEQUÊNCIAS DAS FÓRMULAS DE MIE	30
4.1. Difusão por partículas esféricas de raio superior ao com- primento de onda da radiação incidente	30
4.2. Intensidade e polarização da onda difundida	31
4.2.1. Distribuição angular e polarização da luz difundi- da	33
4.2.2. Variação da intensidade da luz difundida com o raio da esfera	34
5. EXTENSÃO DA TEORIA DE MIE: CONTRIBUIÇÕES RECENTES	35
5.1. Comparações entre a Óptica Geométrica e a teoria de Mie .	35
5.1.1. Introdução	35
5.1.2. A difusão da luz na Óptica Geométrica	36
5.1.3. Resultados e conclusões	38

5.2. Outras contribuições	40
5.2.1. De Philip L. Marston e Dean S. Langley	40
5.2.2. De Ariel Cohen e Charles Arquista	41
6. CONCLUSÕES	42
APÊNDICE	
(Terminologia de grandezas usadas em transferência radiativa)	44
BIBLIOGRAFIA	45

Introdução

Um dos campos da Óptica mais largamente estudado, discutido e enriquecido com sucessivos aperfeiçoamentos que se relacionam com o sempre intrincado problema da resolução de equações diferenciais, é sem dúvida o da difusão da luz. E dentro deste domínio, a difusão por partículas de dimensões da mesma ordem de grandeza do comprimento de onda da radiação incidente (difusão de Mie) concentra as atenções e o empenhamento de todos os que, directa ou indirectamente, se encontram perante o problema da caracterização de determinadas partículas, existam elas na atmosfera ou em depósitos metálicos finos, movimentem-se arrastadas por correntes de gases ou no seio de líquidos. Deste modo ao consultar a literatura da especialidade, deparamos com uma diversidade de estudos que vão desde o campo da Meteorologia, à Óptica dos metais, passando pelas aplicações do laser...

Daí o nosso interesse em ordenar, analisar e comparar algumas das contribuições mais relevantes à teoria original de Mie. E repetimos "algumas" porque, perante a abundância de artigos sobre este tema encontrados nas revistas da especialidade, fomos forçadas a seleccionar parte do material adquirido; certamente resta-nos a dúvida se muito e valioso não terá sido por nós ignorado.

Assim, quer os estudos que visam aplicações da teoria de Mie à caracterização de partículas supostas esféricas [14], [17] [27], quer os que vão mais longe e consideram uma extensão da teoria para partículas de forma arbitrária [22], quer ainda os que encontram limitações na aplicação da teoria original e sugerem modificações [16], todos eles evidenciam a importância

do estudo da difusão e as suas repercursões em zonas do conhecimento científico teórico e prático.

Apresentada a nossa posição, cumpre-nos esboçar o plano do trabalho que se segue.

No primeiro capítulo referimos as questões de terminologia que andam associadas ao emprego da palavra difusão e damos uma pequena notícia histórica.

Pareceu-nos importante iniciar o nosso estudo com a apresentação do resultado de uma consulta que se nos impôs, como ponto de partida: talvez uma certa deformação profissional não seja de todo alheia à nossa exigência de uniformidade e de clareza na designação dos fenômenos físicos; talvez um certo pendor para uma rigorosa gestão do pouco tempo disponível para o estudo e para a investigação, nos deixe surpreendidas com a incompreensão manifestada por autores qualificados ao desprezarem as normas internacionais e ao esquecerem, deste modo, as perdas inúteis de tempo ocasionadas em quem os consulta

Quanto à resenha histórica também incluída, julgámo-la com interesse: por um lado defendemos que, um pouco de História da Ciência melhora sempre a compreensão dos fenômenos; por outro pareceu-nos justificativa da existência do capítulo seguinte, tal como ele se apresenta. Com efeito, no segundo capítulo, abordamos, embora resumidamente, o problema da difusão na atmosfera. E não poderíamos deixar de o fazer, visto que foram os fenômenos da difusão, observados na atmosfera, aqueles que primeiro chamaram a atenção dos cientistas referidos na resenha histórica.

Mas como é referida na sequência da sua apresentação, a teoria de Mie, consta esta teoria do terceiro capítulo.

Não nos foi, porém, possível manter um certo equilíbrio entre a extensão dos vários capítulos: o terceiro aparece assim maior que qualquer dos

outros, muito embora nos tivesse dominado a preocupação de resumir ao máximo a teoria original de Mie. Por esse motivo algumas das consequências das fórmulas de Mie constam do capítulo quatro.

No capítulo cinco apresentamos as contribuições, que seleccionámos, e que visam alargar, enriquecer ou modificar a teoria original de Mie. Não pretendemos ser júri nesta selecção e admitimos que outras terão mais valor; pareceu-nos, no entanto, constituírem as que aqui referimos, amostras representativas e diversificadas do esforço patente em adaptar a teoria de Mie aos muitos casos concretos de identificação de partículas e caracterização das suas velocidades e das suas dimensões.

Finalmente o sexto e último capítulo é dedicado às conclusões.

Quanto à nomenclatura utilizada procurámos seguir, sempre que possível, as recomendações da última edição da "Norma Portuguesa Definitiva", NP-1069, de 1975. Se algumas incoerências com este nosso princípio surgirem no decorrer do texto, elas traduzirão apenas as dificuldades de um ajustamento nem sempre conseguido. Do facto apresentamos, desde já, as nossas desculpas.

1. NOTÍCIA HISTÓRICA

1.1. Terminologia

A índole do trabalho que ora iniciamos, impõe uma apresentação, posto que sumária, da evolução dos conceitos de difusão e da sua terminologia em língua portuguesa, a qual reflecte as discrepâncias existentes no emprego do vocábulo inglês "scattering".

A escolha da palavra "difusão" implica desde logo uma opção, visto que os termos encontrados para tradução de "scattering" levaram-nos a um repensar das razões que conduziram os autores a utilizá-los. Da análise e comparação dessas razões pareceu-nos que a mais consentânea com a estrutura da língua portuguesa, contemplando simultaneamente aspectos importantes da Física era a adoptada por todos aqueles que elegeram o termo "difusão" [1] [2] [3].

Não deixaremos, no entanto, de referir outras opiniões se nos parecer oportuno.

Segundo Andrew T. Young [4], foi Rayleigh quem usou, pela primeira vez, a designação de "scattering", ao analisar a interpretação de Tyndall sobre a cor azul do céu. Tyndall considerava os gases puros opticamente vazios e, por consequência, a luz do céu seria devida à presença de corpos estranhos. Rayleigh, pelo contrário, mostrou que a difusão molecular contribui para a cor do céu e pode ainda ser estudada no laboratório.

De Rayleigh até aos nossos dias nem sempre o termo "scattering" foi utilizado com o significado que o seu inventor lhe atribuiu.

Enquanto alguns autores o reservam para designar as interacções de partículas materiais - Hugh D. Young, 1968, [5], Encyclopaedia Britannica, 1974 - outros há que o tornam extensivo aos fenómenos de interacção da luz com a matéria e, neste caso, empregam a expressão "Scattering of light". Born e Wolf em "Principles of Optics", 1975, usam "Scattering by a sphere" e "diffraction

by a conducting sphere" quando apresentam o desenvolvimento matemático da teoria de Mie. Usam no entanto, com maior frequência, o termo "scattering" como difusão.

Tal como Rayleigh que introduziu o vocábulo na interpretação de fenômenos luminosos da atmosfera terrestre, também Kondratyev [6], e Paltridge [7], utilizam "scattering" com o significado de difusão.

Mais recentemente J. M. Elson [8], intitula um seu artigo, publicado no Journal of Optical Society of America, de "Diffraction and diffuse scattering from dielectric multilayers". É curiosa a associação do objectivo "diffuse" ao vocábulo "scattering" para designar fenômenos de difusão.

Parece, pois, encontrar-se maior uniformidade de opiniões entre os físicos meteorológicos do que entre os especialistas do domínio da Óptica, mesmo entrando em conta com a bibliografia mais recente.

Quanto à tradução de "scattering" em língua portuguesa e subsequente utilização na literatura científica, encontra-se uma relativa uniformidade sendo o vocábulo "difusão" o mais largamente utilizado. Isso não impede, contudo, de aparecer "espalhamento" como tradução de "scattering", mas - e é importante salientar este facto - em edições brasileiras.

No Dicionário da Ciência de 1964 [2], a difusão da luz é definida como "fenômeno que se produz quando um feixe de raios luminosos atravessa um meio material"; seguidamente são apresentados dois tipos de difusão, um por reflexão uniforme, outro por difracção, consistindo a diferença na relação entre as partículas e o comprimento de onda da luz incidente.

Analogamente na Enciclopédia de Cultura, de 1967 [3], o fenômeno da difusão é considerado como resultante da interacção da luz com um meio material; na interpretação do fenômeno refere-se que cada partícula difracta a radiação e que a distribuição irregular e não uniforme das partículas tem como efeito final a difusão da luz.

Mais recentemente, numa publicação datada de 1981 [9], Peixoto atribui a difusão da radiação solar à "presença de partículas de natureza muito variada que existem na atmosfera"; acrescenta ainda que "a difusão não envolve qualquer transformação da energia radiante noutra forma de energia" originando apenas uma nova distribuição da energia em torno das partículas difusoras.

Ainda o mesmo autor, em colaboração com Carlos Marques, num trabalho publicado em língua inglesa [10] usam o termo "scattering" como significado de difusão.

1.2. Interpretação do fenómeno

A primeira tentativa de interpretação, registada na história da Ciência, surgiu em 1821, com Augustin Jean Fresnel (1788-1827), que relacionou a causa da difusão com a estrutura molecular da matéria. Mais tarde Cauchy (1789-1857) apresentou sugestão análoga. Entretanto, a teoria da emissão da luz, elaborada por Newton, perdia importância, ante a confirmação da teoria ondulatória, reforçada pelas experiências de Fresnel.

Os estudos de Tyndall (1820-1893), já referidos, sobre os nevoeiros fotoquímicos conduziram-no a uma explicação da luz azul do céu; das suas observações concluiu que este efeito se produzia quando as dimensões das partículas eram pequenas comparadas com o comprimento de onda da luz; e que, além disso, essa delgada névem azul polarizava completamente o feixe incidente para um ângulo de difracção de 90° , fosse qual fosse a composição do aerosol ou o seu índice de refracção.

Sir Jonh Herschel procurou explicar este fenómeno como polarização por reflexão, com o ângulo de Brewster, mas chegou a um resultado absurdo; para ter polarização por uma reflexão simples, o ângulo de incidência deveria ser 45° , a sua tangente a unidade e, analogamente, o índice de refracção (igual

à tangente do ângulo de incidência, pela lei de Brewster).

O esclarecimento deste aparente antagonismo foi conseguido por Rayleigh, que o atribuiu ao uso incorrecto da palavra "reflexão". Com efeito, segundo Rayleigh, sã para partículas cujas dimensões fossem muito maiores que o quadrado do comprimento de onda da luz incidente, se deveria aplicar o vocábulo "reflexão". Na sequência das suas observações, construiu as bases da teoria geral da difusão, apoiando-se, primeiramente, na hipótese do éter como corpo elástico. Interpretou a polarização a 90° , deduziu a lei da quarta potência do comprimento de onda e estabeleceu outras importantes relações. Empregou, pela primeira vez, o termo "scattered" ao interpretar a cor azul do céu. Aceitou ainda a sugestão de Tyndall de que os gases puros eram "opticamente vazios" e concordou com a sua opinião de que os corpos estranhos existentes na atmosfera eram os responsáveis pela cor do céu.

Mais tarde, em 1881, reformulou as expressões obtidas com base na teoria electromagnética, havendo chegado aos mesmos resultados. Introduziu então a condição de que as partículas teriam de ser esféricas. Os desvios à sua teoria que se verificavam na prática - nomeadamente a polarização a 90° e 270° não ser completa - deviam-se ao facto das moléculas se comportarem como corpos alongados.

Na sequência dos seus estudos, em 1899, Rayleigh afasta-se da hipótese anteriormente aceite sobre a cor azul do céu: sugere então, que as "partículas" são moléculas de ar, responsabiliza-as pela cor do céu e cessa de atribuir importância, para este efeito, à presença de corpos estranhos. Continuando a estudar o comportamento dos gases da atmosfera em relação à luz incidente estabelece relações importantes entre o coeficiente de extinção e o índice de refacção, fornece fórmulas para os efeitos da anisotropia molecular e suas relações com a refacção.

Em 1910 continuava a afirmar que "se a forma das moléculas fosse alongada haveria polarização incompleta".

Segundo a teoria da difusão de Rayleigh a cor azul do céu deve-se à difusão produzida pelas moléculas de ar e este fenómeno pode também ser estudado no laboratório.

Esta teoria, porém, só é válida para partículas de dimensões inferiores ao comprimento de onda da luz incidente; e quer, na atmosfera, quer em superfícies cobertas com depósitos metálicos, surgem situações em que a difusão se deve a partículas de dimensões superiores ao comprimento de onda da luz incidente.

Foi Mie [11] quem encontrou uma solução matemática para a descrição do campo electromagnético da onda luminosa difundida por esferas de raio superior ao comprimento de onda da radiação incidente. Dada, porém, a complexidade das equações diferenciais a que se chega para a maioria dos casos concretos, continua este estudo a interessar uma plêiade de investigadores no campo da Física - Matemática [12, 27]. Num artigo publicado em Setembro de 1981 [15], Ungut, Grehan e Gouesbet apresentam uma comparação entre a Óptica Geométrica e a teoria de Lorenz - Mie, na interpretação do fenómeno da difusão. Por nos parecer de grande interesse este trabalho, far-lhe-emos uma referência mais pormenorizada no capítulo 5.

No campo das alterações à teoria de Mie, no sentido de a completar ou mesmo modificar, deparamos também com contribuições importantes. Assim Langley e Marston [17], [20] debruçam-se sobre o problema da retrodifusão por bolhas de ar, enquanto Acquista [16], Schuerman e outros [18], Cohen e Acquista [21] e Yeh e outros [22] estudam modificações da teoria de Mie de modo a descrever a difusão por partículas que não possuam forma esférica.

2. A DIFUSÃO NA ATMOSFERA

A equação que descreve o processo de transferência da radiação solar pela atmosfera é da forma

$$dL_\lambda/ds = -k_{e\lambda} \rho L_\lambda + j_\lambda \rho \quad (2.1)$$

em que $k_{e\lambda}$ representa o coeficiente de extinção total (soma dos coeficientes mássico de absorção e de difusão no caso de se considerar os dois fenômenos independentes), o parâmetro j_λ representa o coeficiente mássico de emissão (assumindo esta designação um carácter apenas formal) e L_λ a radiância.

Entrando com o conceito de percurso óptico ($d\tau_\lambda = k_{e\lambda} \rho ds$) a equação (2.1) pode escrever-se:

$$dL_\lambda/d\tau = -L_\lambda + \tilde{J}_\lambda \quad (2.2)$$

em que $\tilde{J}_\lambda = \frac{j_\lambda}{k_{e\lambda}}$ representa a função de fonte.

Esta função, quando se considera apenas o fenómeno da difusão pura, assume a seguinte forma:

$$\tilde{J}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{P}_\lambda(\theta, \phi, \theta', \phi') L_\lambda(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.3)$$

Na maior parte das aplicações à atmosfera, convém usar a coordenada vertical z . Então o ângulo θ coincide com o ângulo zenital e ϕ com o azimute.

Por sua vez o percurso óptico é tomado ao longo da vertical e definido por:

$$\tau = \int k_{e\lambda} \rho dz$$

A equação (2.2) ou seja a equação geral de transferência da radiação apresenta então o aspecto:

$$\cos \theta dL(z, \theta, \phi)/(k_{e\lambda} \rho dz) = -L(z, \theta, \phi) + \tilde{J}(z, \theta, \phi) \quad (2.4)$$

na qual se eliminou o índice λ , referente ao comprimento de onda, para uma maior simplificação.

Se se fizer $\mu = \cos \theta$ e se se introduzir as transformações correspondentes nas variáveis z e θ , obtêm-se:

$$\mu \, dL(\tau, \mu, \phi) / d\tau = -L(\tau, \mu, \phi) + \tilde{J}(\tau, \mu, \phi) \quad (2.5)$$

Nas aplicações à transferência do fluxo solar, na atmosfera, convem manter a distinção entre o feixe solar directo e a densidade de fluxo difuso resultante. Na prática pode considerar-se que a camada limite superior do meio é iluminada por um feixe paralelo de iluminação πE segundo a direcção (μ_0, ϕ_0) ; no caso da atmosfera essa iluminação coincidirá com o valor espectral da constante solar. A função de fonte apresenta, nestas condições, a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tau, \mu, \phi) = & \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \tilde{P}(\tau, \mu, \phi, \mu', \phi') L(\tau, \mu', \phi') d\mu' d\phi' + \\ & + \frac{\bar{\omega}_0}{4} \tilde{P}(\tau, \mu, \phi, \mu_0, \phi_0) \exp(-\tau/\mu_0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que o segundo termo se refere, como é óbvio, ao feixe (delgado) solar directo e $\bar{\omega}_0$ representa o albedo de difusão. Quanto às condições fronteiras, ter-se-á:

$$L^\uparrow(\tau^*, \mu, \phi) = \text{especificação da reflexão superficial}$$

$$L_\downarrow(0, \mu, \phi) = 0$$

para o caso da atmosfera completa e do percurso óptico total vertical τ^* .

2.1 Soluções aproximadas

As equações que traduzem os processos de transferência apresentam-se, na maioria dos casos, de resolução difícil, ou mesmo impossível. Por esta razão se recorre a soluções aproximadas para casos pontuais, de que se constroem modelos, constituindo muitos deles uma fiel tradução matemática dos fenômenos físicos. Uma das situações que, segundo Paltridge [7], apresenta maior simplicidade matemática é a da difusão na atmosfera; na realidade, sobre as camadas planas e paralelas, dispostas horizontalmente, incide um fluxo vertical de radiação, o qual é independente do azimute.

A equação (2.5) do parágrafo anterior apresenta então a seguinte simplificação:

$$\mu dL(\tau, \mu) / d\tau = -L(\tau, \mu) + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_{-1}^{+1} \bar{P}^0(\mu, \mu') L(\tau, \mu') d\mu' \quad (2.7)$$

sendo

$$\bar{P}^0(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{P}(\mu, \phi, \mu', \phi') d\phi'$$

Suporemos seguidamente que a função de fase \bar{P} é completamente isotrópica pelo que a equação (2.7) ficará:

$$\mu dL(\tau, \mu) / d\tau = -L(\tau, \mu) + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_{-1}^{+1} L(\tau, \mu') d\mu' \quad (2.8)$$

Admitiremos ainda que a distribuição das radiancias se processam de tal modo que apenas se consideram as radiancias na direcção vertical e nos dois sentidos, sendo definidas por

$$E^{\uparrow}/\pi \text{ e } E^{\downarrow}/\pi$$

em que E é a iluminação energética.

Aceitando este pressuposto, é possível reduzir a descrição do campo completo da radiação a duas equações, cada uma das quais engloba a radiancia num dos sentidos da direcção vertical:

$$\frac{1}{2} dL^{\uparrow} / d\tau = -L^{\uparrow} + \frac{\bar{\omega}_0}{2} (L^{\uparrow} + L^{\downarrow}) \quad (2.9)$$

$$-\frac{1}{2} dL^{\downarrow} / d\tau = -L^{\downarrow} + \frac{\bar{\omega}_0}{2} (L^{\uparrow} + L^{\downarrow}) \quad (2.10)$$

Para um meio que seja^(*) um difusor puro ($\bar{\omega}_0=1$), a solução das equações (2.9) e (2.10) é calculada analiticamente em função da reflectância R_r e transmitância T_r da camada em questão.

(*) De notar que os meios considerados na sequência deste raciocínio são transparentes ou semitransparentes.

Virã:

$$Re = \frac{1}{2} \tau \left(1 + \frac{1}{2} \tau \right) \quad (2.11)$$

$$Tr = 1 / \left(1 + \frac{1}{2} \tau \right) \quad (2.12)$$

para uma camada, sob a qual exista uma superfície ou outras camadas de reflexão zero.

Se o meio não for um difusor puro e se a absorção tiver de ser considerada, a solução das equações (2.9) e (2.10), embora ainda de natureza analítica é, no entanto, mais complicada.

Se bem que não apresentemos aqui a solução para este caso, pareceu-nos oportuno referir, de maneira abreviada, o processo utilizado na construção do modelo.

2.1.1 Aproximações "two-stream" e de Eddington

As equações (2.9) e (2.10) do parágrafo anterior foram estabelecidas com base na aproximação "two-stream", de Shuster e Schwarzschild (Shuster, 1905); Hewson (1943) e Nieburger (1949) utilizaram esta aproximação nos seus trabalhos sobre interacção da radiação com as nùvens.

Antes porém de desenvolver o título deste parágrafo, iremos introduzir alguns conceitos que permitem compreender a construção do modelo.

Supõe-se a função de fase dividida em dois hemisférios, um avançado (forward), outro recuado (backward) e considera-se a fracção bf (razão entre a retrodifusão e a difusão avançada); esta fracção está relacionada com o *factor de assimetria* $\langle \cos \psi \rangle$, definido como o integral de $\tilde{P} \cos \psi$, estendido a todos os ângulos sólidos:

$$\langle \cos \psi \rangle = \int_{-1}^{+1} \tilde{P}(\psi) \cos \psi d(\cos \psi) \quad (2.13)$$

O factor de assimetria, normalmente citado para um meio, constitui a mínima informação requerida sobre a função de fase; para um problema de transferência

particular. É ele que permite alguma precisão nas soluções aproximadas. Para um difusor isotrópico o seu valor é zero; para uma difusão avançada completa $\langle \cos \psi \rangle = 1$; para uma retródifusão completa $\langle \cos \psi \rangle = -1$.

A fracção b^f e o factor $\langle \cos \psi \rangle$ estão relacionados pela expressão

$$b^f = \frac{1}{2} (1 - \langle \cos \psi \rangle).$$

A aproximação "two-stream", na sua versão original, não permitia calcular, por exemplo, a variação do albedo da nuvem com o ângulo zenital solar. A decomposição da função de fonte que figura na equação (2.6) em duas componentes, uma directa e outra difusa, veio remover essa dificuldade, mas não foi fácil, nem curto o caminho percorrido.

As aproximações referidas no título deste parágrafo assemelham-se bastante e, por vezes confundem-se.

Ambas partem de idêntico pressuposto: o ângulo zenital depende de forma particular das radiâncias para cima L^+ e para baixo L^- ; essa forma possibilita uma integração fácil, que permite obter as correspondentes densidades de fluxo, para cima e para baixo.

Na figura 2-I [7] indicam-se também as expressões dessas densidades. Para aproximações "two-stream" (fig. 2-I b), a função de fase será:

$$\bar{P}(\psi) = 1 \pm \langle \cos \psi \rangle, \quad (2.14)$$

enquanto para a de Eddington ter-se-á:

$$\bar{P}(\psi) = 1 + 3 \langle \cos \psi \rangle \cos \psi. \quad (2.15)$$

Ambas as aproximações conduzem a fórmulas analíticas simples para as funções de reflexão e de transmissão, mesmo quando se inclui o feixe directo. As funções de Eddington são dadas por Shettle e Weinman (1970).

Aqui limitar-nos-emos a escrever as da equação de transferência (cf. c/ 2.5)

$$\mu dL(\tau, \mu)/d\tau = -L(\tau, \mu) + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_{-1}^{+1} \bar{P}^0(\mu, \mu') L(\tau, \mu') d\mu' + \frac{\bar{\omega}_0}{4} \bar{P}^\alpha(\mu, \mu_0) E e^{-\tau/\mu_0} \quad (2.16)$$

pela aproximação "two-stream" e que são (Comissão de Radiação, 1975):

$$Re(\mu_0, \tau) = \frac{G |1 - e^{-2s\tau/\mu_0}|}{1 - G^2 e^{-2s\tau/\mu_0}} \quad \text{para } \bar{\omega}_0 < 1 \quad (2.17)$$

$$= \frac{bf \cdot \tau/\mu_0}{1 + bf \cdot \tau/\mu_0} \quad \text{para } \bar{\omega}_0 = 1 \quad (2.18)$$

$$Tr(\mu_0, \tau) = \frac{e^{(-2s\tau/\mu_0)(1-G^2)}}{1 - G^2 e^{-2s\tau/\mu_0}} \quad \text{para } \bar{\omega}_0 < 1 \quad (2.19)$$

$$= 1 - \frac{bf \cdot \tau/\mu_0}{1 + bf \cdot \tau/\mu_0} \quad \text{para } \bar{\omega}_0 = 1 \quad (2.20)$$

em que $bf = \frac{1}{2} (1 - \langle \cos \psi \rangle)$

e, nas expressões anteriores,

$$G = (r-s)(r+s)^{-1}$$

$$r = 1 - \bar{\omega}_0 f + \bar{\omega}_0 \cdot bf$$

$$s = |(1 - \bar{\omega}_0 f)^2 - \bar{\omega}_0^2 bf^2|^{1/2}$$

$$f = 1 - bf$$

Embora as aproximações "two-stream" e Eddington se limitem aos casos em que a difusão não é grandemente anisotropa, elas apresentam, mesmo assim, bastante interesse devido à simplicidade das suas soluções analíticas e o permitirem ainda uma fácil formulação das condições fronteiras em casos específicos.

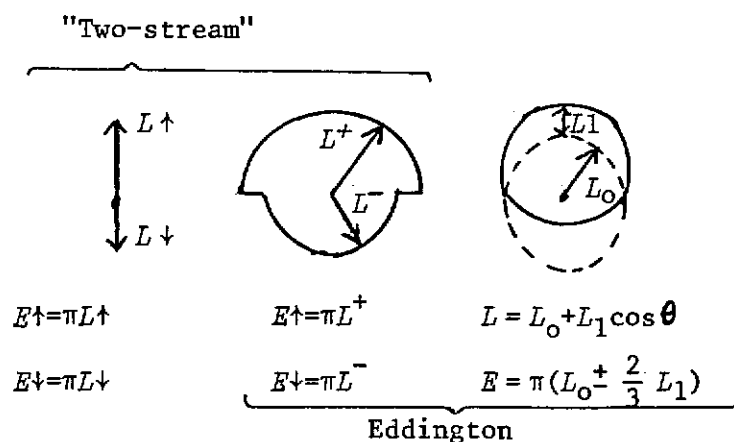


Fig. 2-I

3. TEORIA DA DIFUSÃO DE MIE

As equações dos parágrafos anteriores descrevem o processo de transferência da radiação, por difusão, considerando a atmosfera perfeitamente limpa. Nestas circunstâncias a difusão deve-se, apenas, à presença das moléculas de ar - difusão Rayleigh - e a função de fase é conhecida com precisão, assim como os processos de obter as soluções das equações.

A existência de núvens ou aerossóis invalida a aplicação desses mesmos processos. Visto que as dimensões e a forma das partículas influem no fenómeno da difusão, assim como a parte real e imaginária do seu índice de refração, impõe-se a escolha de uma outra interpretação matemática mais complexa que a anterior. Deve-se a Mie a obtenção de uma solução das equações de Maxwell para o caso da difusão por partículas de dimensões superiores ao comprimento de onda da luz incidente.

Embora a solução fosse deduzida para uma esfera simples, aplica-se também à difusão por qualquer número de esferas, desde que a composição e o diâmetro das esferas sejam idênticos, a sua distribuição aleatória e as distâncias entre elas largamente superiores ao comprimento de onda da luz incidente.

Deste modo não se verifica coerência nas relações de fase da luz difundida pelas esferas e a sua energia total pode obter-se somando as energias difundidas por cada esfera.

A teoria de Mie apresenta, assim, um interesse prático notável, evidenciado na sua aplicação à resolução de numerosos problemas, como sejam o estudo das impurezas atmosféricas, os efeitos das núvens e dos nevoeiros na transmissão da luz, a teoria do arco-íris, as cores observadas nas suspensões metálicas e outros.

Antes de apresentar a dedução das fórmulas, debruçar-nos-emos um pouco, embora de maneira sucinta, sobre o método utilizado na sua obtenção.

As equações de Maxwell descrevem o campo electromagnético transportado por uma onda plana monocromática quando incide numa superfície, também plana. Como no caso presente a incidência se faz sobre uma superfície esférica, convém introduzir uma alteração no sistema de coordenadas então utilizado e substituí-lo por coordenadas curvilíneas.

Assim o conjunto de equações^(*):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \dot{\vec{D}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} &= 0 \\ \text{div } \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

(em que \vec{H} e \vec{E} representam, respectivamente, os campos magnético e eléctrico enquanto \vec{B} e \vec{D} correspondem à indução magnética e ao deslocamento eléctrico), deverá ser escrito em coordenadas polares esféricas.

Considera-se ainda o campo como a soma de dois campos parciais, possuindo as características seguintes: um dos campos parciais é tal que o seu vector eléctrico não tem componente radial, o outro possui um vector magnético com esta propriedade.

De acordo com estas premissas, as equações de Maxwell, juntamente com as condições fronteiras decompõem-se numa colecção de equações diferenciais ordinárias, as quais são então resolvidas para os dois campos parciais na forma de séries infinitas. No parágrafo 3.1. apresenta-se a dedução das fórmulas de Mie obtidas pelo processo indicado e no capítulo 4, referem-se algumas consequências dessa solução.

(*) É utilizado aqui excepcionalmente o sistema C.G.S. (electrostático e electromagnético)

3.1 Solução de Mie

3.1.1. Representação do campo em termos de potenciais de Debye

Consideremos uma esfera condutora de raio a responsável pela difracção de uma onda monocromática plana, polarizada linearmente; admitamos que o meio circundante da esfera é isotrópico, homogêneo, não condutor e, tal como a esfera, não magnético.

Aceitando a convenção de assinalarmos as grandezas que se referem ao meio com o símbolo I, colocado em cima e à direita e as grandezas que respeitam à esfera com o símbolo II, teremos:

$$\sigma^{(I)} = 0 \quad (3.2)$$

Tanto o vector eléctrico como o vector magnético da onda incidente possuem na sua expressão matemática uma componente independente do tempo e uma outra que é função exponencial dessa variável ($e^{-i\omega t}$). As primeiras satisfazem as equações de Maxwell:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= -k_1 \vec{E} & (a) \\ \text{rot } \vec{E} &= k_2 \vec{H} & (b) \end{aligned} \right\} (3.3)$$

em que

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{i\omega}{c} \left(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) & (a) \\ k_2 &= \frac{i\omega}{c} & (b) \end{aligned} \right\} (3.4)$$

$$\text{sendo } -k_1 k_2 = k^2 \quad (3.5)$$

com k a representar o número de ondas (real fora da esfera e imaginário no interior da mesma).

Seja XYZ um sistema de eixos rectangulares com origem no centro da esfera. A direcção de propagação da onda coincide com a direcção do eixo dos zz ; a direcção do vector eléctrico coincide com o eixo dos xx de acordo com a figura 3-I.

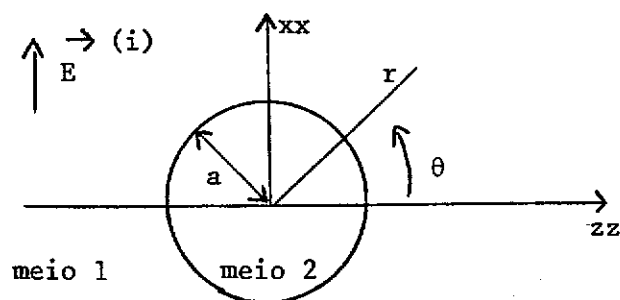


Fig. 3-I

Se a amplitude do vector elêctrico da onda incidente for normalizada à unidade, isto é, se se verificar.

$$|E^{(i)}| = |e^{ik^{(I)}z}| = 1$$

as seis componentes dos vectores campo são

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(i)} &= e^{ik^{(I)}z} \\ H_y^{(i)} &= \frac{ik^{(I)}}{k_2^{(I)}} e^{ik^{(I)}z} \\ E_y^{(i)} = E_z^{(i)} = H_x^{(i)} = H_z^{(i)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Dever-se-á respeitar a continuidade das componentes tangenciais de \vec{E} e \vec{H} através da superfície:

$$\left. \begin{aligned} E_{tg}^{(I)} &= E_{tg}^{(II)} \\ H_{tg}^{(I)} &= H_{tg}^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad \text{quando } r = a \quad (3.7)$$

Destas condições e das equações de Maxwell resulta a continuidade das componentes radiais de $\epsilon\vec{E}$ e de \vec{H} através da mesma superfície. No entanto as condições fronteiras são ficam plenamente satisfeitas se considerarmos que além do campo incidente $\vec{E}^{(i)}, \vec{H}^{(i)}$ e do campo $\vec{E}^{(int)}, \vec{H}^{(int)}$ no interior da esfera existe ainda um campo (difundido ou difractado) $\vec{E}^{(d)}, \vec{H}^{(d)}$ no meio que rodeia a esfera.

O vector elêctrico total, nas duas regiões, encontra, pois, a sua expressão em

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(i) + \vec{E}(d) && \text{no exterior} \\ &= \vec{E}(\text{int}) && \text{no interior} \end{aligned} \right\} \text{na esfera} \quad (3.8)$$

e analogamente para o vector magnético.

Como as condições fronteiras devem ser cumpridas em todos os instantes, os seis vectores dependerão do tempo de igual modo ($e^{-i\omega t}$).

De acordo com o pressuposto inicial no que respeita à utilização de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), as equações do campo deverão ser escritas nesse sistema de coordenadas.

Tendo presente que as componentes do rotacional de um vector qualquer \vec{v} , em coordenadas esféricas, são:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{v})_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial \phi} \right\} \\ (\text{rot } \vec{v})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r v_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right\} \\ (\text{rot } \vec{v})_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \end{aligned}$$

as equações (3.3) do campo electromagnético assumirão a forma

$$\left. \begin{aligned} -k_1 E_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r H_\theta)}{\partial \phi} \right\} && (\alpha) \\ -k_1 E_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right\} && (\beta) \\ -k_1 E_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right\} && (\gamma) \\ k_2 H_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r E_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial \phi} \right\} && (\alpha) \\ k_2 H_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r E_\phi \sin \theta)}{\partial r} \right\} && (\beta) \end{aligned} \right\} (3.9)$$

$$k_2 H_\phi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right\} \quad (\gamma) \quad (b)$$

Por sua vez as condições fronteiras escrever-se-ão

$$\left. \begin{aligned} E_\theta^{(I)} &= E_\theta^{(II)}, & E_\phi^{(I)} &= E_\phi^{(II)} \\ H_\theta^{(I)} &= H_\theta^{(II)}, & H_\phi^{(I)} &= H_\phi^{(II)} \end{aligned} \right\} \text{ para } r = a \quad (3.10)$$

O conjunto das equações (3.9) e (3.10) constituem as equações básicas do problema apresentado e a sua solução dar-nos-á a resposta à questão da difusão por partículas de dimensões superiores ao comprimento de onda da luz incidente.

Vamos apresentar essa solução como a sobreposição de dois campos linearmente independentes ($\vec{e}E, \vec{e}H$) e ($\vec{m}E, \vec{m}H$); cada um desses campos deverá satisfazer as equações (3.9), tal que

$$e_{E_r} = E_r, \quad e_{H_r} = 0 \quad (3.11 a)$$

$$m_{E_r} = 0, \quad m_{H_r} = H_r. \quad (3.11 b)$$

Como $H_r = e_{H_r} = 0$, as equações (3.9 a,β) e (3.9 a,γ) tornam-se em

$$\left. \begin{aligned} k_1 e_{E_\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r e_{H_\phi}), \\ k_1 e_{E_\phi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r e_{H_\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Seguidamente tomemos os valores de E_θ e E_ϕ destas equações e introduzamo-los nas equações (3.9 b,β) e (3.9 b,γ). Obteremos

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r e_{H_\theta}) &= -\frac{k_1}{\sin \theta} \frac{\partial e_{E_r}}{\partial \phi} & (b, \beta) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r e_{H_\phi}) &= k_1 \frac{\partial e_{E_r}}{\partial \theta} & (b, \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

As duas equações acabadas de indicar constituem, juntamente com a equação (3.9 a,α) um sistema para e_{E_r}, e_{H_θ} e e_{H_ϕ} ; no entanto nem todas as solu-

ções deste sistema possuem significado físico: apenas aquelas que satisfazem as condições $\text{div } \vec{e}_H = 0$.

Por isso nos reduziremos a essas soluções. Em coordenadas esféricas e tendo presente que supusémos $e_{H_r} = 0$, a condição $\text{div } \vec{e}_H = 0$ transforma-se em

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen } \theta e_{H_\theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (e_{H_\phi}) = 0 \quad (3.13)$$

Conjugando a expressão (3.13) com a substituição na equação (3.9b α) dos valores de e_{E_θ} e e_{E_ϕ} tirados de (3.11), provamos que a equação (3.9 b, α) também é satisfeita.

Repetindo o raciocínio para o subcampo m , verificamos que este constitui também uma solução das equações consideradas, o que prova a validade do pressuposto aceite.

A solução correspondente ao subcampo $e(e_{H_r} = 0)$ é designada por onda eléctrica (ou onda magnética transversa); a que respeita ao subcampo m ($e_{E_r} = 0$) recebe o nome de onda magnética (ou onda eléctrica transversa).

Vamos mostrar que cada uma delas pode ser derivada de um potencial escalar $e\Pi$ e $m\Pi$ respectivamente; estes potenciais chamam-se potenciais de Debye.

Da equação (3.9 b, α) e atendendo a que $e_{H_r} = 0$, e_{E_ϕ} e e_{E_θ} podem ser considerados como componentes do gradiente de um escalar U , teremos:

$$e_{E_\phi} = \frac{1}{r \text{ sen } \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (3.14)$$

$$e_{E_\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{-\partial \theta}$$

Tomando para U o valor de

$$\frac{\partial(r e\Pi)}{\partial r} \quad (3.15)$$

as equações (3.14) transformam-se em

$$e_{E_\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (r e_\Pi)}{\partial r \partial \phi} \quad (3.16)$$

$$e_{E_\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r e_\Pi)}{\partial r \partial \theta}$$

Verifica-se ainda que a equação (3.11) pode ser satisfeita por

$$e_{H_\phi} = k_1 \frac{\partial e_\Pi}{\partial \theta} = \frac{k_1}{r} \frac{\partial (r e_\Pi)}{\partial \theta} \quad (3.17)$$

$$e_{H_\theta} = - \frac{k_1}{\sin \theta} \frac{\partial e_\Pi}{\partial \phi} = - \frac{k_1}{r \sin \theta} \frac{\partial (r e_\Pi)}{\partial \phi}$$

Seguidamente encontremos uma expressão de e_{E_r} , utilizando os valores de e_{H_ϕ} e e_{H_θ} de (3.17) e introduzindo-os em (3.9 a, α):

$$e_{E_r} = - \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial e_\Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 e_\Pi}{\partial \phi^2} \right\} \quad (3.18)$$

As equações (3.17) e (3.18) permitem-nos exprimir e_{H_ϕ} , e_{H_θ} e e_{E_r} em função de e_Π . Se substituirmos em (3.12), H_ϕ , H_θ e E_r pelos valores acabados de indicar, obtemos as seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial^2 (r e_\Pi)}{\partial r^2} + k^2 \frac{\partial (r e_\Pi)}{\partial \phi} = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial e_\Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 e_\Pi}{\partial \phi^2} \right\} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial^2 (r e_\Pi)}{\partial r^2} + k^2 \frac{\partial (r e_\Pi)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial e_\Pi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 e_\Pi}{\partial \phi^2} \right\}$$

Verifica-se assim que uma mesma expressão é objecto de derivação em ordem a ϕ , no 1º caso, em ordem a θ , no 2º, e que ambas as derivadas se anulam.

As equações (3.19) ficarão satisfeitas se igualarmos essa expressão a zero:

$$\frac{\partial^2 (r e_\Pi)}{\partial r^2} + k^2 r e_\Pi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial e_\Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 e_\Pi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.20)$$

A equação (3.20) pode ainda assumir a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 (r e_{\Pi})}{\partial r^2} + k^2 r e_{\Pi} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta \frac{\partial e_{\Pi}}{\partial \theta}) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 e_{\Pi}}{\partial \phi^2} \right\} = 0 \quad (3.21)$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r e_{\Pi})}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta \frac{\partial e_{\Pi}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 e_{\Pi}}{\partial \phi^2} + k^2 e_{\Pi} = 0 \quad (3.22)$$

Comparando (3.21) com (3.18) verifica-se, também, a igualdade:

$$e_{E_r} = \frac{\partial^2 (r e_{\Pi})}{\partial r^2} + k^2 r e_{\Pi} \quad (3.23)$$

Reunindo os resultados (3.16), (3.17), (3.24), ficamos com a solução do sistema (3.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{E_r} = \frac{\partial^2 (r e_{\Pi})}{\partial r^2} + k^2 r e_{\Pi} \\ e_{E_{\theta}} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r e_{\Pi})}{\partial r \partial \theta} \\ e_{E_{\phi}} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 (r e_{\Pi})}{\partial r \partial \phi} \\ e_{H_r} = 0 \\ e_{H_{\theta}} = - \frac{k_1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial (r e_{\Pi})}{\partial \phi} \\ e_{H_{\phi}} = \frac{k_1}{r} \frac{\partial (r e_{\Pi})}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

De um modo análogo provar-se-ia que a onda magnética pode ser derivada de um potencial escalar m_{Π} , o qual satisfaz a equação diferencial (3.22).

A solução completa obtém-se da adição dos dois campos:

$$\begin{array}{l}
 E_r = e_{E_r} + m_{E_r} = \frac{\partial^2 (r e_\Pi)}{\partial r^2} + k^2 r e_\Pi, \quad (\alpha) \\
 E_\theta = e_{E_\theta} + m_{E_\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r e_\Pi)}{\partial r \partial \theta} + k_2 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (r^m \Pi)}{\partial \phi} \quad (\beta) \\
 E_\phi = e_{E_\phi} + m_{E_\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (r e_\Pi)}{\partial r \partial \phi} - k_2 \frac{1}{r} \frac{\partial (r^m \Pi)}{\partial \theta} \quad (\gamma) \\
 H_r = m_{H_r} + e_{H_r} = k^2 r^m \Pi \quad (\alpha) \\
 H_\theta = m_{H_\theta} + e_{H_\theta} = -\frac{k_1}{r \sin \theta} \frac{\partial (r e_\Pi)}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^m \Pi)}{\partial r \partial \theta} \quad (\beta) \\
 H_\phi = m_{H_\phi} + e_{H_\phi} = k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial (r e_\Pi)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (r^m \Pi)}{\partial r \partial \phi} \quad (\gamma)
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (3.24) \\ a) \\ \\ \\ b) \end{array}$$

Ambos os potenciais e_Π e m_Π são soluções da equação diferencial (3.22), que é a equação de ondas

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0,$$

escrita em coordenadas polares.

Para que as componentes E_θ , E_ϕ , H_θ e H_ϕ sejam contínuas sobre a superfície esférica de raio $r = a$, é suficiente que as quatro expressões

$$k_1 r e_\Pi, \quad k_2 r^m \Pi, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r e_\Pi), \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^m \Pi) \quad (3.25)$$

o sejam também. Por conseguinte as condições fronteiras já consideradas separaram-se agora em condições independentes para e_Π e m_Π . O problema em questão, da difracção por uma esfera, fica assim reduzido ao problema de encontrar duas soluções mutuamente independentes para a equação de ondas, obedecendo às condições fronteiras.

3.1.2. Nova expressão das componentes do campo

No parágrafo anterior obtivemos a equação de Helmholtz, cuja solução é constituída pelos potenciais e^{Π} e m^{Π} ; esta solução vai ser apresentada primeiramente sob a forma de séries com coeficientes indeterminados, cujos termos são integrais particulares da forma

$$\Pi = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) ; \quad (3.26)$$

seguidamente recorre-se às condições fronteiras para determinar os coeficientes.

As funções que intervêm em Π devem satisfazer as seguintes diferenciais ordinárias

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(r R)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2}\right) r R &= 0, & (a) \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta}\right) \Theta &= 0, & (b) \\ \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \beta \Phi &= 0, & (c) \end{aligned} \right\} (3.27)$$

nas quais α e β são constantes de integração.

Para cada equação pode escrever-se a solução geral. No caso da equação c), será

$$a \cos(\sqrt{\beta} \phi) + b \sin(\sqrt{\beta} \phi)$$

A condição de uniformidade de Π limitando os valores de β a m^2 (com m inteiro), conduz à solução particular:

$$\Phi = a_m \cos(m \phi) + b_m \sin(m \phi) \quad (3.28)$$

A solução geral da equação (b) de (3.27) é

$$\Theta = P_{\ell}^{(m)}(\cos \theta) \quad (3.29)$$

Trata-se, como se vê, das funções associadas de Lègendre.



Resta-nos a equação a), cuja solução geral se escreve:

$$R = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{\ell+1/2}(kr) \quad (3.30)$$

em que $R(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} Z(\rho)$, $kr = \rho$ e $Z_{\ell+1/2}(\rho)$ é a função cilíndrica geral de ordem $\ell+1/2$.

Tendo presente que cada função cilíndrica se pode exprimir como uma combinação linear de duas funções cilíndricas padrão, utilizaremos as funções

$$\begin{aligned} \psi_{\ell}(\rho) &= \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{\ell+1/2}(\rho) \\ \text{e} \\ \chi_{\ell}(\rho) &= -\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{\ell+1/2}(\rho) \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que $J_{\ell+1/2}(\rho)$ e $N_{\ell+1/2}(\rho)$ representam as funções de Bessel e as funções de Neumann respectivamente.

Deste modo o integral geral da equação a) de (3.27) pode escrever -se:

$$rR = c_{\ell} \psi_{\ell}(Kr) + d_{\ell} \chi_{\ell}(Kr). \quad (3.32)$$

No caso particular de $c_{\ell} = 1$ e $d_{\ell} = -i$, teremos

$$rR = \zeta_{\ell}^{(1)}(Kr), \quad (3.33)$$

onde

$$\zeta_{\ell}^{(1)}(\rho) = \psi_{\ell}(\rho) - i \chi_{\ell}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} H_{\ell+1/2}^{(1)}(\rho) \quad (3.34)$$

sendo $H^{(1)}$ uma das funções de Hankel.

As três soluções gerais encontradas vão permitir encontrar um integral particular $\Pi_{\ell}^{(m)}$; multiplicando as funções (3.28), (3.29) e (3.32), obtemos Π (de 3.26):

$$\begin{aligned} r\Pi &= r \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Pi_{\ell}^{(m)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \{c_{\ell} \psi_{\ell}(kr) + d_{\ell} \chi_{\ell}(kr)\} \{ \\ &\{P_{\ell}^{(m)}(\cos \theta)\} \{a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde a_m , b_m , c_{ℓ} e d_{ℓ} são constantes arbitrárias.

A expressão (3.35) constitui a solução geral da equação de ondas.

As constantes a_m , b_m , c_ℓ e d_ℓ devem satisfazer as condições frontei-
ras; por conseguinte a sua determinação obriga a que os potenciais $e_{\Pi}^{(i)}$ e
 $m_{\Pi}^{(i)}$ da onda incidente se desenvolvam em séries da forma (3.35).

As operações decorrentes, envolvendo mudança de variáveis nas equa-
ções (3.6), utilização de (3.24) e intervenção dos polinômios de Legendre, são
aqui omitidas, dada a sua extensão. Limitar-nos-emos a indicar o resultado fi-
nal:

$$\left. \begin{aligned} r e_{\Pi}^{(i)} &= \frac{1}{(k^{(I)})^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell-1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \psi_{\ell} (k^{(I)} r) P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta) \cos \phi, \quad a) \\ r m_{\Pi}^{(i)} &= \frac{1}{(k^{(I)})^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell} \frac{k^{(I)}}{k_2^{(I)}} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \psi_{\ell} (k^{(I)} r) P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta) \sin \phi, \quad b) \end{aligned} \right\} (3.36)$$

As condições fronteiras (3.25) assumem então a seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \{r (e_{\Pi}^{(i)} + e_{\Pi}^{(d)})\}_{r=a} &= \frac{\partial}{\partial r} \{r e_{\Pi}^{(\text{int.})}\}_{r=a} & (a) \\ \frac{\partial}{\partial r} \{r (m_{\Pi}^{(i)} + m_{\Pi}^{(d)})\}_{r=a} &= \frac{\partial}{\partial r} \{r m_{\Pi}^{(\text{int.})}\}_{r=a} & (b) \\ k_1^{(I)} \{r (e_{\Pi}^{(i)} + e_{\Pi}^{(d)})\}_{r=a} &= k_1^{(II)} \{r e_{\Pi}^{(\text{int.})}\}_{r=a} & (c) \\ k_2^{(I)} \{r (m_{\Pi}^{(i)} + m_{\Pi}^{(d)})\}_{r=a} &= k_2^{(II)} \{r m_{\Pi}^{(\text{int.})}\}_{r=a} & (d) \end{aligned} \right\} (3.37)$$

em que $\Pi^{(d)}$ representa o potencial da onda difundida e $\Pi^{(\text{int.})}$ o da onda no
interior da esfera.

Na sequência do desenvolvimento das condições fronteiras, cada um
destes potenciais será expresso de forma compatível com o fenômeno físico que
representam.

Assim, na expressão matemática do potencial da onda no interior da
esfera sô as funções ψ_{ℓ} (ver 3.31) são convenientes, visto que se mantêm fi-
nitas na origem, enquanto as funções ψ_{ℓ} se tornam infinitas nesse ponto.

Teremos pois:

$$\left. \begin{aligned} r^{e_{\Pi}}(\text{int.}) &= \frac{1}{(k^{(\text{II})})^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} e_{A_{\ell}} \psi_{\ell}(k^{(\text{II})} r) P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta) \cos \phi, \quad (\text{a}) \\ r^{m_{\Pi}}(\text{int.}) &= \frac{i}{k^{(\text{II})} k_2} \sum_{\ell=1}^{\infty} m_{A_{\ell}} \psi_{\ell}(k^{(\text{II})} r) P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta) \sin \phi, \quad (\text{b}) \end{aligned} \right\} (3.38)$$

Por outro lado, relativamente ao potencial da onda difundida torna-se aconselhável uma representação em termos das funções ζ_{ℓ} (ver 3.34) visto que para pontos muito afastados da esfera, a onda difundida é esférica com o seu centro na origem ($r=0$).

Escreveremos portanto:

$$\left. \begin{aligned} r^{e_{\Pi}}(d) &= \frac{1}{(k^{(\text{I})})^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} e_{B_{\ell}} \zeta_{\ell}^{(1)}(k^{(\text{I})} r) P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta) \cos \phi, \quad (\text{c}) \\ r^{m_{\Pi}}(d) &= \frac{i}{k^{(\text{I})} k_2} \sum_{\ell=1}^{\infty} m_{B_{\ell}} \zeta_{\ell}^{(1)}(k^{(\text{I})} r) P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta) \sin \phi, \quad (\text{d}) \end{aligned} \right\} (3.39)$$

Da substituição em (3.37) dos valores dos potenciais dados por (3.36) (3.38) e (3.39) obtemos as quatro relações seguintes:

$$e_{B_{\ell}} \frac{1}{k^{(\text{I})}} \zeta_{\ell}^{(1)'}(k^{(\text{I})} a) + \frac{1}{k^{(\text{I})}} i^{\ell-1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \psi_{\ell}'(k^{(\text{I})} a) = \frac{1}{k^{(\text{II})}} e_{A_{\ell}} \psi_{\ell}'(k^{(\text{II})} a)$$

$$m_{B_{\ell}} \frac{1}{k_2} \zeta_{\ell}^{(1)'}(k^{(\text{I})} a) + \frac{1}{k_2} i^{\ell-1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \psi_{\ell}'(k^{(\text{I})} a) = \frac{1}{k_2} m_{A_{\ell}} \psi_{\ell}'(k^{(\text{II})} a)$$

$$e_{B_{\ell}} \frac{1}{k^{(\text{I})}} \zeta_{\ell}^{(1)}(k^{(\text{I})} a) + \frac{1}{k^{(\text{I})}} i^{\ell-1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \psi_{\ell}(k^{(\text{I})} a) = \frac{1}{k_2^{(\text{II})}} e_{A_{\ell}} \psi_{\ell}(k^{(\text{II})} a)$$

$$m_{B_{\ell}} \frac{1}{k^{(\text{I})}} \zeta_{\ell}^{(1)}(k^{(\text{I})} a) + \frac{1}{k^{(\text{I})}} i^{\ell-1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \psi_{\ell}(k^{(\text{I})} a) = \frac{1}{k^{(\text{II})}} m_{A_{\ell}} \psi_{\ell}(k^{(\text{II})} a)$$

Como só nos interessa a onda difundida, eliminaremos os coeficientes

A_{ℓ} e obteremos os valores B_{ℓ} :

$$e_{B_{\ell}} = i^{\ell+1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \frac{k_2^{(\text{I})} k^{(\text{II})} \psi_{\ell}'(k^{(\text{I})} a) \psi_{\ell}(k^{(\text{II})} a) - k_2^{(\text{II})} k^{(\text{I})} \psi_{\ell}'(k^{(\text{II})} a) \psi_{\ell}(k^{(\text{I})} a)}{k_2^{(\text{I})} k^{(\text{II})} \zeta_{\ell}^{(1)'}(k^{(\text{I})} a) \psi_{\ell}(k^{(\text{II})} a) - k_2^{(\text{II})} k^{(\text{I})} \psi_{\ell}'(k^{(\text{II})} a) \zeta_{\ell}^{(1)'}(k^{(\text{I})} a)}$$

$$m_{B_\ell} = i^{\ell+1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} \frac{k_2^{(I)} k^{(II)} \psi_\ell(k^{(I)}_a) \psi'_\ell(k^{(II)}_a) - k_2^{(II)} k^{(I)} \psi'_\ell(k^{(I)}_a) \psi_\ell(k^{(II)}_a)}{k_2^{(I)} k^{(II)} \zeta_\ell(k^{(I)}_a) \psi'_\ell(k^{(II)}_a) - k_2^{(II)} k^{(I)} \zeta_\ell(k^{(I)}_a) \psi_\ell(k^{(II)}_a)}$$

Substituindo os valores de (3.39) em (3.24) chegamos, finalmente, à expressão das componentes dos vectores campo da onda difundida:

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(d)} &= \frac{1}{(k^{(I)})^2} \frac{\cos \phi}{r^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell(\ell+1) e_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)}(\cos \theta) \\ E_\theta^{(d)} &= -\frac{1}{k^{(I)}} \frac{\cos \phi}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ e_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)'}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta - \\ &\quad - i m_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \\ E_\phi^{(d)} &= -\frac{1}{k^{(I)}} \frac{\sin \phi}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ e_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)'}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)'}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} - \\ &\quad - i m_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta \} \\ H_r^{(d)} &= \frac{i}{k^{(I)} k_2^{(I)}} \frac{\sin \phi}{r^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell(\ell+1) m_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)}(\cos \theta) \\ H_\theta^{(d)} &= -\frac{1}{k_2^{(I)}} \frac{\sin \phi}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ e_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} + \\ &\quad + i m_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)'}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta \} \\ H_\phi^{(d)} &= \frac{1}{k_2^{(I)}} \frac{\cos \phi}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ e_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta + \\ &\quad + i m_{B_\ell} \zeta_\ell^{(1)'}(k^{(I)}_r) P_\ell^{(1)'}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

4.1 Difusão por partículas esféricas de raio superior ao comprimento de onda da radiação incidente.

Nos desenvolvimentos em série das expressões dos campos da onda difundida apresentados no capítulo anterior, podemos designar por *ondas parciais* as contribuições que envolvem harmônicas esféricas de diferentes ordens.

Analisaremos, seguidamente, o papel desempenhado pelas ondas parciais no caso do raio da esfera difusora ser grande comparado com o comprimento de onda da luz incidente.

Convém fazer intervir um parâmetro adimensional q definido por

$$q = \frac{2\pi}{\lambda^{(I)}} a \quad (4.1)$$

em que a é o raio da esfera e $\lambda^{(I)}$ o comprimento de onda da luz no meio que a circunda.

Deste modo q será muito superior à unidade no caso que vamos analisar. Limitando-nos a ordens $\ell \ll q$ podemos usar as aproximações assintóticas

$$\psi_{\ell}^{(x)} \sim \frac{1}{2} \{ i^{\ell+1} e^{-ix} + (-i)^{\ell+1} e^{ix} \} \quad (4.2)$$

$$\zeta_{\ell}^{(1)}(x) \sim (-i)^{\ell+1} e^{ix} \quad (4.3)$$

e ainda

$$\psi_{\ell}^{\prime}(x) \sim \frac{1}{2} \{ i^{\ell} e^{-ix} + (-i)^{\ell} e^{ix} \} \quad (4.4)$$

$$\zeta_{\ell}^{\prime}(x) \sim (-i)^{\ell} e^{ix} \quad (4.5)$$

Por consequência os coeficientes $e_{B_{\ell}}$ e $m_{B_{\ell}}$ transformam-se em

$$e_{B_{\ell}} = (-1)^{\ell+1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} e^{-iq} \frac{\operatorname{sen} \left[q - \ell \frac{\pi}{2} \right] - \hat{n} \cos \left[q - \ell \frac{\pi}{2} \right] \operatorname{tg} \left[\hat{n} q - \ell \frac{\pi}{2} \right]}{1 - i \hat{n} \operatorname{tg} \left[\hat{n} q - \ell \frac{\pi}{2} \right]} \quad (4.6)$$

4. CONSEQUÊNCIAS DAS FÓRMULAS

DE MIE

$$m_{B_\ell} = (-1)^{\ell+1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} e^{-iq} \frac{\hat{n} \sin \left[q - \ell \frac{\pi}{2} \right] - \cos \left[q - \ell \frac{\pi}{2} \right] \operatorname{tg} \left[\hat{n}q - \ell \frac{\pi}{2} \right]}{\hat{n} - i \operatorname{tg} \left[\hat{n}q - \ell \frac{\pi}{2} \right]}$$

De assinalar a dependência oscilatória e a rapidez da variação de e_{B_ℓ} e m_{B_ℓ} com q e ℓ ; de notar também que a amplitude da onda parcial eléctrica de ordem ℓ é da mesma ordem de grandeza do que a da onda parcial magnética de ordem imediatamente superior.

No caso que estamos a considerar e embora a contribuição das ondas parciais para o campo difundido seja importante, não é possível determinar o seu número a partir das aproximações referidas, visto que se limitou o valor de ℓ ($\ell \ll q$).

Debye deduziu aproximações assintóticas válidas para todas as ordens e mostrou que as amplitudes das ondas parciais decrescem rapidamente para zero; deste modo apenas os q primeiros termos são incluídos.

Quando a permitividade ou a condutividade da esfera apresentam um valor muito grande ($|\hat{n}| \rightarrow \infty$), as expressões dos coeficientes e_{B_ℓ} e m_{B_ℓ} tornam-se mais simples:

$$\left. \begin{aligned} e_{B_\ell} &= i(-1)^{\ell+1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} e^{-iq} \cos \left(q - \ell \frac{\pi}{2} \right) \\ m_{B_\ell} &= (-1)^{\ell+1} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} e^{-iq} \sin \left(q - \ell \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

4.2 Intensidade e polarização da onda difundida

Consideremos o campo num ponto muito afastado ($r \gg \lambda$) do difusor; as funções $\zeta_\ell^{(1)}$ e $\zeta_\ell^{(1)'}$ que intervêm em (3.40) podem, por consequência, ser substituídas pelas suas aproximações assintóticas.

Para medida da intensidade e visto que se trata de valores relativos é-nos permitido considerar o quadrado da amplitude real do vector eléctrico.

Fazendo:

$$\left. \begin{aligned} I_{\parallel}^{(d)} &= \frac{(\lambda^{(I)})^2}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} (-i)^{\ell} (e_{B\ell} P_{\ell}^{(1)})' (\cos \theta) \sin \theta - m_{B\ell} \frac{P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right|^2, \\ I_{\perp}^{(d)} &= \frac{(\lambda^{(I)})^2}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} (-i)^{\ell} (e_{B\ell} \frac{P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} - m_{B\ell} P_{\ell}^{(1)})' (\cos \theta) \sin \theta \right|^2, \end{aligned} \right\} (4.8)$$

Teremos

$$\left. \begin{aligned} |E_{\theta}^{(d)}|^2 &= I_{\parallel}^{(d)} \cos^2 \phi \\ |E_{\phi}^{(d)}|^2 &= I_{\perp}^{(d)} \sin^2 \phi \end{aligned} \right\} (4.9)$$

Tomando como plano de observação o plano que contém a direcção de propagação da luz incidente e a direcção (θ, ϕ) de observação, ϕ representará o ângulo entre este plano e a direcção de vibração do vector eléctrico da onda incidente. Por consequência e tendo presente as equações (4.9), a luz difundida será polarizada linearmente, quando o plano de observação for perpendicular ou paralelo às vibrações primárias. Para qualquer outra direcção será polarizada elipticamente.

Com respeito à difusão da luz natural, as fórmulas adequadas podem ser obtidas a partir das da luz polarizada, achando a média para todas as direcções de polarização.

De (4.9) ter-se-á:

$$\overline{|E_{\theta}^{(d)}|^2} = \frac{1}{2} I_{\parallel}^{(d)} ; \quad \overline{|E_{\phi}^{(d)}|^2} = \frac{1}{2} I_{\perp}^{(d)} \quad (4.10)$$

e a luz difundida é parcialmente polarizada porque, geralmente, nem $I_{\parallel}^{(d)}$, nem $I_{\perp}^{(d)}$ são nulas.

Define-se ainda *grau de polarização* da luz difundida pela expressão

$$P = \left| \frac{I_{\perp}^{(d)} - I_{\parallel}^{(d)}}{I_{\perp}^{(d)} + I_{\parallel}^{(d)}} \right| \quad (4.11)$$

A proporção de luz não polarizada na luz difundida é

$$\left. \begin{aligned} (I_{\perp}^{(d)} + I_{\parallel}^{(d)}) (1-P) &= 2I_{\parallel}^{(d)} \quad \text{quando } I_{\parallel}^{(d)} < I_{\perp}^{(d)} \end{aligned} \right\} (4.12)$$

$$= 2I_{\perp}^{(d)} \quad \text{quando } I_{\parallel}^{(d)} > I_{\perp}^{(d)} \quad \left. \vphantom{= 2I_{\perp}^{(d)}} \right\}$$

Quanto à maneira como a direcção de difusão influi no valor da intensidade e na polarização da luz difundida, muito se tem investigado, com base na teoria de Mie; analogamente para a influência dos parâmetros físicos (λ, \hat{n}) sobre as mesmas grandezas.

Faremos muito sucintamente uma breve referência a alguns dos principais resultados, nos dois parágrafos que se seguem.

4.2.1 Distribuição angular e polarização da luz difundida

A fig. 4-I representa a distribuição dos valores da intensidade em função do ângulo θ de observação para partículas esféricas metálicas de dimensões diferentes e também a proporção de luz polarizada existente na luz difundida.

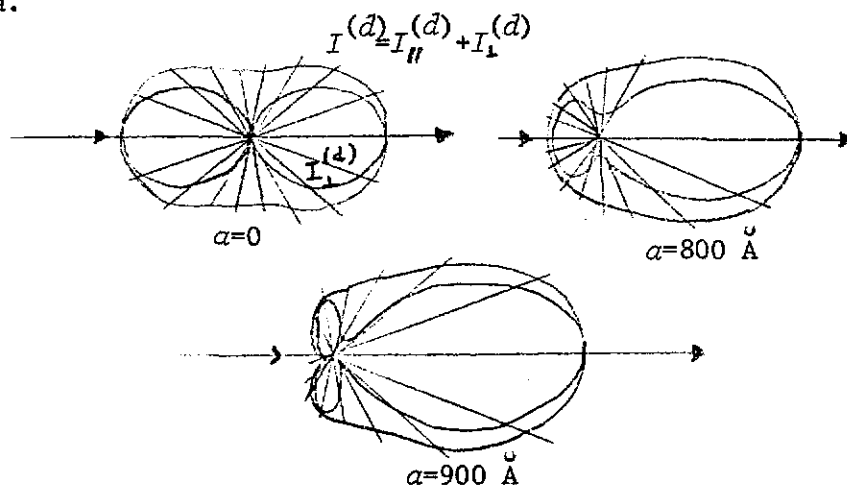


Fig. 4-I

Diagramas polares para a difusão da luz linearmente polarizada por uma partícula esférica de ouro ($\lambda_0 = 5500 \text{ \AA}$, $n^{(I)} = 1,33$, $\hat{n}^{(II)} = 0,57 + 2,4i$) (Segundo G. Mie, Ann. d. Physik, (4) 25 (1908), 429)

Da interpretação dos diagramas representados conclui-se que:

1) Para partículas muito pequenas ($\alpha \rightarrow 0$) a difusão é simétrica; a intensidade é máxima para $\theta = 0$ e $\theta = 180^\circ$ e mínima para $\theta = 90^\circ$. Note-se que o raio

vector das curvas de dentro é proporcional a I_{\perp} , enquanto o raio vector da curva de fora é proporcional a $I^{(d)} = I_{\parallel}^{(d)} + I_{\perp}^{(d)}$.

2) À medida que o raio aumenta, desaparece a simetria em relação ao plano perpendicular à direcção de propagação da luz incidente, plano esse que passa pelo centro da esfera; a difusão avançada ($\theta=0$) prevalece sobre a retrodifusão ($\theta=180^{\circ}$) (efeito de Mie).

4.2.2 Variação da intensidade da luz difundida com o raio da esfera.

No quadro seguinte representam-se os valores da intensidade normalizada.

$$4\pi^2 a^2 (I_{\perp}^{(d)} + I_{\parallel}^{(d)})^2 / \lambda^2 (I)^2$$

da luz difundida por esferas dieléctricas de índice de refração $n=1,25$ em função do parâmetro

$$q = 2\pi a / \lambda (I)$$

θ	$q=0,01$	$q=0,1$	$q=0,5$	$q=1$	$q=2$	$q=5$	$q=8$
0	$5,0 \times 10^{-14}$	$5,0 \times 10^{-8}$	$1,2 \times 10^{-3}$	$2,3 \times 10^{-1}$	4,3	$9,8 \times 10^2$	$7,5 \times 10^3$
90°	$2,5 \times 10^{-14}$	$2,5 \times 10^{-8}$	$5,0 \times 10^{-4}$	$3,6 \times 10^{-2}$	$2,5 \times 10^{-1}$	2,7	7,1
180°	$5,0 \times 10^{-14}$	$4,9 \times 10^{-8}$	$7,8 \times 10^{-4}$	$1,9 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-2}$	1,3	0,9

(Este quadro foi elaborado a partir de cálculos de H. Blumer, Z. f. Phys., 38 (1926), 304)

Comparando os valores da 1.^a e 3.^a colunas verifica-se o efeito de Mie, já referido.

Em relação à intensidade constata-se a rapidez do seu crescimento com o aumento do raio da esfera.

5.1 Comparações entre a Óptica Geométrica e a teoria de Mie.

5.1.1 Introdução

Na caracterização de partículas sólidas ou líquidas, por meio da difusão da luz, são utilizadas técnicas que vêm sofrendo sucessivos aperfeiçoamentos no sentido de as tornar mais cómodas e de aplicação mais directa.

Assim, convém, por vezes, medir o tamanho das partículas e a sua concentração no próprio local onde existem, seja ele uma corrente fluida ou seja a atmosfera. O emprego de um feixe de raios laser por exemplo e a análise da radiação difundida constitui uma técnica de aplicação mais rápida que a fotografia ou a holografia.

As teorias que habitualmente servem de fundamento a estas técnicas são a teoria de Mie, para partículas de dimensões inferiores a $10 \mu\text{m}$ e a teoria da Óptica Geométrica para dimensões superiores.

Com o objectivo de averiguar em que condições se poderia substituir a teoria de Mie por cálculos baseados na Óptica Geométrica - estes mais económicos, mais rápidos e de mais fácil execução em situações não ideais, como por exemplo, o caso de partículas não esféricas ou de radiação incidente não uniforme - ainda que as partículas fossem de pequenas dimensões, Ungut, Grehan e Gouesbet [15] empreenderam um estudo de comparação entre a aplicabilidade das duas teorias.

Nos cálculos decorrentes da utilização da teoria de Mie, usaram um programa de computador "Supermidi" da autoria de Grehan e Gouesbet (1979); o código "Supermidi" permitiu-lhes o cálculo das funções de Bessel e o das intensidades difundidas.

Nos parágrafos seguintes apresentamos um resumo deste trabalho e as conclusões a que os seus autores chegaram.

5. EXTENSÃO DA TEORIA DE MIE:
CONTRIBUIÇÕES RECENTES

5.1.2 A difusão da luz na Óptica Geométrica

Um breve resumo, apenas, dos conceitos básicos desta teoria, será aqui apresentado.

O desenvolvimento das operações indicadas consta do apêndice B do artigo de Ungut [15].

A partir das fórmulas de Mie e considerando o caso em que $q \gg 1$, Van de Hulst mostrou que, nos desenvolvimentos em série das equações (4.8) ao suprimir os termos de ordem superior a $\ell + 1/2$, se pode considerar a soma finita remanescente formada por duas partes: uma independente da natureza da partícula e outra dependente desta.

Com base neste pressuposto, o campo difundido em P (suposto muito afastado da partícula) considera-se formado por duas partes:

a) Uma componente do campo de luz difractada, independente da natureza da partícula. Designando por S as funções de amplitude deste campo, (*) teremos para as aproximações assintóticas, quando $q \rightarrow \infty$:

$$S_{D_1}(\theta) = S_{D_2}(\theta) = \frac{\chi^2 d^2}{4} \cdot \frac{J_1(\chi d \sin \theta/2)}{\chi d \sin \theta/2}, \quad (5.1)$$

onde χ representa o coeficiente de absorção e d o diâmetro da esfera. Os índices D_1 e D_2 referem-se por esta ordem, à luz difractada, à luz polarizada no plano OZ , OP e à luz polarizada no plano perpendicular a este.

J_1 representa a função de Bessel. Esta situação é idêntica à estudada na difracção Fraunhofer.

(*) Nas equações (4.8), do capítulo anterior, S_1 corresponde à expressão abrangida pelo sinal de módulo que figura em I_{\perp} e S_2 à expressão equivalente em

$$I_{\perp}, \text{ de tal modo que } I_{\perp} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} |S_1|^2$$

$$I_{\parallel} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} |S_2|^2$$

b) Raios reflectidos e refractados dependendo da natureza da partícula . De modo semelhante à alinea anterior as funções de amplitude para os campos reflectido e refractado apresentam a forma assintótica, fazendo $q \rightarrow \infty$:

$$S_{1,2}(\theta) = \sum_{p,s} \frac{\chi_d}{2} E_{1,2} \left[\frac{\text{sen}(2\epsilon)}{2 \text{sen} \theta \frac{d\theta'}{d\epsilon}} \right]^{1/2} e^{i\delta + \frac{i\pi}{2}(p+1 - \frac{s}{2} - \frac{t}{2} - 2u)} \quad (5.2)$$

onde p representa o número de reflexões internas, ϵ o ângulo de incidência, θ o de difusão, θ' o de depleção e δ a diferença de fase ; s , t e u são números inteiros.

E_1 e E_2 são definidos em função dos coeficientes de reflexão de Fresnel.

A figura 5-I mostra as várias componentes segundo a Óptica Geométrica

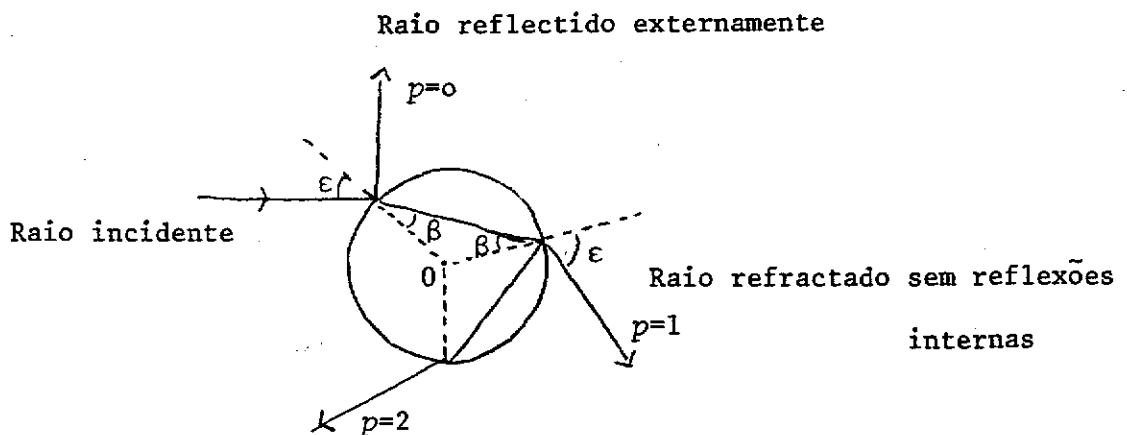


Fig. 5-I

O sinal de somatório em (5.2) significa que todas as componentes do campo difundido devem ser somadas antes de calcular a intensidade da luz difundida. Isto conduziria à interferência de vários raios de luz difundida (reflectida externamente, refractada sem reflexões internas, etc.) se as componentes tivessem todas o mesmo peso; o que se passa, no entanto é que, para direcções próximas da direcção de propagação da luz, apenas as componentes di-

fractada, externamente refletida e refractada sem reflexões internas possuem amplitude significativa; por este motivo o somatório na equação (5.2) estende-se apenas aos valores 0 e 1 de p .

A intensidade total da luz difundida é dada por:

$$I_{\theta, \phi}^{(*)} = S_{2,1}(\theta) \cdot S_{2,1}(\phi) \left\{ \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} \right\} (1/\chi^2 r^2). \quad (5.3)$$

A leitura da equação (5.3) deve ser feita considerando o índice θ correspondendo ao índice 2 e a $\cos^2 \phi$ e o índice ϕ correspondendo a 1 e a $\sin^2 \phi$.

Por sua vez o produto $S_{2,1}(\theta) \cdot S_{2,1}(\phi)$ pode assumir a seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{2,1}(\theta) \cdot S_{2,1}(\phi) = & A_{D2,1}^2 + A_{R2,1}^2 + A_{X2,1}^2 + 2A_{D2,1}A_{R2,1} \sin \delta_R - \\ & - 2A_{D2,1}A_{X2,1} \sin \delta_X - 2A_{R2,1}A_{X2,1} \cos(\delta_R - \delta_X) \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde os índices D , R e X correspondem aos raios da Óptica Geométrica difractados sem reflexão interna e reflectidos externamente, respectivamente; as funções A, A são funções de amplitude reais.

5.1.3 Resultados e Conclusões

Ungut e os seus colaboradores estabeleceram uma comparação entre a teoria de Mie e a da Óptica Geométrica para partículas esféricas transparentes, de índice de refração 1,5 e cujos diâmetros variavam entre 1,0 μm e 100,0 μm .

Para ângulos de difusão pequenos as componentes I_θ e I_ϕ apresentam curvas semelhantes, pelo que apenas uma delas intervém na comparação dos re-

$$(*) \quad I_\phi = I_1 \sin^2 \phi$$

$$I_\theta = I_1 \cos^2 \phi$$

sultados. Estes foram traduzidos por curvas, que representam a variação de I_ϕ com o ângulo de difusão θ ($\theta < 20^\circ$); para cada esfera obtiveram duas curvas, uma relativa à Óptica Geométrica, outra respeitante à teoria de Mie.

Da observação destas curvas concluíram existir uma boa concordância entre a solução com base na Óptica Geométrica e os cálculos a partir da teoria de Mie, mesmo para partículas muito pequenas ($d=1\mu\text{m}$). No entanto algumas discrepâncias foram notadas: para partículas de diâmetro $d=4\mu\text{m}$, a aplicação da teoria da Óptica Geométrica conduz a uma curva que não apresenta o primeiro mínimo (situado entre os ângulos de 8° e 10°); para partículas de diâmetro $d=15\mu\text{m}$ nota-se um afastamento das duas curvas.

O mesmo não se pode dizer para partículas de diâmetros $d=9\mu\text{m}$, $d=10\mu\text{m}$ e $d>15\mu\text{m}$, onde a concordância é bastante boa.

No que se refere a partículas cuja forma se afasta da esférica, deve ter-se em conta a grande sensibilidade das curvas de difracção para pequenas variações no diâmetro das esferas. Por esta razão e porque, na prática, quase todas as situações correspondem a partículas não esféricas, Ungut e os seus colaboradores consideraram o valor médio das intensidades difundidas ao longo de uma estreita faixa de diâmetros ($\Delta d \sim \lambda$).

Definindo o valor médio das intensidades pela expressão

$$I_{\text{med}} = \frac{1}{2\lambda} \int_{d-\lambda}^{d+\lambda} I(d) d (d),$$

os autores compararam, através de curvas, as duas teorias.

Para os casos em que o desvio da forma esférica, medido em qualquer secção transversal, não excede o valor do comprimento de onda ($\Delta d \sim \lambda$), a concordância entre as duas teorias é bastante boa. Deve-se acentuar que este é o caso mais frequente das aplicações práticas.

5.2 Outras contribuições

5.2.1 De Philip L. Marston e Dean S. Langley

Autores de "Glory im Optical backscattering from air bubbles" publicado em Physical Review Letters [17] e de "Glory in backscattering: Mie and model predictions for bubbles and conditions on refractive index in drops" inserto em Journal of Optical Society of America [20], estes investigadores conseguiram uma adaptação da teoria de Mie ao estudo da difusão por bolhas de ar no seio de líquidos viscosos.

Anteriormente já outros cientistas haviam introduzido alterações, que conduziram à criação de modelos que facilitam a compreensão da estrutura da intensidade difundida em função do ângulo de difusão ou do parâmetro relacionado com o tamanho da partícula; no entanto essas contribuições privilegiaram as regiões angulares em que a difracção é importante para uma gota de água no ar, pois era este o objectivo fundamental dos autores dos modelos.

Para Marston e Langley a situação é diferente: o índice de refracção do ar, que forma a bolha, é inferior ao índice de refracção do meio que a rodeia, pelo que deverão modificar os modelos existentes.

No artigo de referência [17] os autores relatam, em pormenor, as primeiras observações de retrodifusão pelas bolhas de ar dentro de um líquido viscoso e apresentam um modelo que descreve algumas das características observadas. Denominam o fenómeno observado de "glória" porque, tal como no caso das gotas, a difusão para um ângulo de 180° aumenta, quando o parâmetro $q (q = \frac{2\pi}{\lambda} a)$ assume valores elevados.

No artigo referenciado por [20], consideram como objectivo principal apresentar os resultados da teoria de Mie que confirmam certos aspectos do modelo. Apontam, também, algumas incorrecções cometidas por outros autores no que se refere às condições a que deve obedecer o índice de refracção rela

tivo (da bolha de ar em relação ao líquido que a rodeia) para que existam raios "glória" e apresentam as respectivas correções.

5.2.2 De Ariel Cohen e Charles Acquista

Estes autores estudam a difusão da luz por cilindros com orientação arbitrária [21] e estabelecem, com base na teoria de Mie, uma comparação entre a difusão por esferas e a difusão por cilindros.

Desenvolvem ainda um conjunto de relações que descrevem a conservação da energia e a reciprocidade para cilindros orientados arbitrariamente, discutindo também o seu significado físico.

Terminam o seu trabalho provando que, no caso dos cilindros, são necessárias três relações para descrever a conservação da energia, enquanto para as esferas bastam duas.

6. CONCLUSÕES

Procuramos apresentar um esboço da situação presente em matéria da difusão de Mie. Como este trabalho foi concluído em Março de 1983 e porque é demais conhecido o atraso com que as revistas da especialidade publicam os resultados de investigações em curso, não fica excluída a hipótese de que novos e valiosos contributos tenham vindo modificar o quadro por nós apresentado.

Do que ficou escrito há a extrair as conclusões seguintes:

1) A teoria da difusão de Mie continua a ser de grande utilidade na difusão avançada da luz por partículas esféricas existentes num meio homogêneo, de índice de refração inferior ao das partículas. No caso de se considerar pontos muito afastados do difusor, as aproximações assintóticas possíveis facilitam a resolução das equações diferenciais.

Deixa no entanto por explicar os fenómenos decorrentes quando as partículas são de forma diferente da esférica - e, nos casos reais, abundam estas situações - quando há retrodifusão, quando o índice de refração da partícula é inferior ao meio em que mergulha e outras situações.

2) Entre as muitas contribuições que têm surgido no sentido de ampliar e modificar a teoria de Mie, de modo a ser aplicável às situações reais escolhemos aquelas que nos parecem diversificar um pouco as exigências do concreto, visto que a limitação de espaço imposta pela natureza deste trabalho nos impedia de relatar as mais valiosas.

Assim constatamos a existência de modelos que permitem caracterizar partículas cuja forma se afasta da esférica, cujas dimensões se aproximam das que, habitualmente, ficavam sob o escopo da Óptica Geométrica, cujo índice

de refração é inferior ao do meio que as rodeia ou ainda que produzem retro difusão acentuada.

A utilização do laser na caracterização de partículas existentes em correntes de fluidos e a possibilidade de estender a teoria de Mie ao estudo da difusão por cilindros de orientação arbitraria constituem também aspectos válidos do empenhamento dos investigadores em utilizar a teoria da difusão na resolução de problemas concretos e actuais.

Para finalizar exprimimos a nossa opinião de que este campo da Óptica não é, de modo algum, um capítulo encerrado e que muito há a esperar ainda dos estudos já empreendidos ou a empreender.

APÊNDICE: TERMINOLOGIA DE GRANDEZAS
USADAS EM TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

Terminologia de grandezas

usadas em transferência radiativa

Norma portuguesa definitiva NP - 1069 (1975)		Guide (*) des pratiques météorologiques (OMM) (1971)		Vocabulaire International de l'éclairage (VIE) - CIE(1970)	
Grandeza	Símbolo	Unidades SI	Grandeza	Símbolo	Unidades SI
Energia radiante	$Q, W, (U, Q_e)$	joule (J)	Quantité d'énergie rayonnante	Q_e	joule (J)
Fluxo energético	$P, \phi, (\phi_e)$	watt (W)	Flux énergétique	ϕ_e	watt (W)
Intensidade energética	$I(I_e)$	watt por esterradio no (W/sr)	Intensité énergétique	I_e	watt par stéradian ($W.sr^{-1}$)
Radiância	$L(L_e)$	watt por esterradiano metro quadrado ($W/sr.m^2$)	Luminance energética	L_e	watt par stéradian et par mètre carré ($W.sr^{-1}.m^{-2}$)
Excitação energética	$M(M_e)$	watt por metro quadrado (W/m^2)	Emittance energética	M_e	watt par mètre carré ($W.m^{-2}$)
Iluminação energética	$E(E_e)$	watt por metro quadrado (W/m^2)	Eclairement energético	E_e	watt par mètre carré ($W.m^{-2}$)

(*) Os elementos de base deste documento foram extraídos do Vocabulaire International de l'éclairage (VIE), 2.ª edição, volume I (1959) da Commission Internationale de l'éclairage.

B I B L I O G R A F I A

- [1] J. P. Peixoto, Cadeira de Meteorologia, Faculdade de Ciências de Lisboa (1976-77).
- [2] Uvarov, Chapman e Isaacs, Dicionário da Ciência (tradução de Marieta da Silveira (1964).
- [3] Enciclopédia de Cultura, Editorial Verbo (1967).
- [4] Andrew T. Young, Rayleigh scattering, *Appl. Opt.*, 20, 4, 533-535 (1981).
- [5] Hugh D. Young, *Optics and Modern Physics*, McGraw-Hill (1968).
- [6] K. Ya. Kondratyev, *Radiation in the Atmosphere*, Academic Press, New York (1969).
- [7] Platt and Paltridge, *Radiative Transfer in the Atmosphere*, Elsevier
- [8] J. M. Elson, Diffraction and diffuse scattering from dielectric multilayers, *J. Opt. Soc. Am.*, 69, 48-54 (1979)
- [9] J. P. Peixoto, *A radiação solar e o ambiente*, Comissão Nacional do Ambiente, Lisboa (1981)
- [10] J. P. Peixoto and C. V. Marques, On the Climatology of the Solar Radiation in Lisbon, comunicação apresentada no Congresso sobre "Building Energy Management", realizado na Póvoa de Varzim em 1980.
- [11] G. Mie, *Ann. Phys.*, 25, 377 (1908)
- [12] G. Grehan and G. Gouesbet, "The Computer Program SUPERMIDI for Mie Theory Calculations without Practical Size or Refractive-Index Limitations", Internal Report TTI/GG/79/03/20.
- [13] W. J. Lentz, *Appl. Opt.* 15, 668 (1976).

- [14] G. Grehan, Nouveaux progrès en théorie de Lorenz-Mie. Application à la mesure de diamètres de particules dans les écoulements. Thèse de 3eme cycle, U. Rouen (1980).
- [15] A. Ungut, G. Grehan and G. Gouebest, Comparison between geometrical optics and Lorenz-Mie theory, *Appl. Opt.* **20**, 17, 2911-2918 (1981)
- [16] Charles Acquista, Validity of modifying Mie theory to describe scattering by nonspherical particles. *Appl. Opt.* **17**, 24, 3851 (1978).
- [17] D. S. Langley and P. L. Marston, Glory in optical backscattering from air bubbles, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 13, 913 (1981).
- [18] Schuerman, Wong, Gustafson and Schaefer, Systematic studies of light scattering. 1. Particle shape, *Appl. Opt.* **20**, 23, 4039 (1981).
- [19] G. S. Agarwal and E. Wolf, Diffraction and inverse scattering, *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 3, 321 (1982).
- [20] P. L. Marston and D. S. Langley, Glory in backscattering: Mie and Model predictions for bubbles and conditions on refractive index in drops, *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 4, 456 (1982).
- [21] A. Cohen and Acquista, Light scattering by tilted cylinders: properties of partial wave coefficients, *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 5, 531 (1982)
- [22] C. Yeh, S. Colak e P. Barber, Scattering of sharply focused beams by arbitrarily shaped dielectric particles: an exact solution, *Appl. Opt.* **21**, 24, 4426 (1982).
- [23] D. E. Cooper, D. S. Wang and M. Kerker, Scattering of light by laser fusion targets with small defects, *Appl. Opt.* **22**, 1, 83 (1983).
- [24] R. G. Pinnick, G. Fernandez and B. D. Hinds, Explosion dust particle size measurements, *Appl. Opt.* **22**, 95 (1983).
- [25] H. C. Van de Hulst, *Light scattering by small particles*, Wiley, New York (1957).

[26] V. Khare and H. M. Nussenzveig, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 976 (1974)

[27] W. J. Wiscombe, Improved Mie scattering algorithms, *Appl. Opt.* **19**, 9, 1505 (1980).