



Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática para o Ensino

Dissertação

Modelação matemática de doenças infecciosas

Ana Paula Aarão Teixeira Videiros Frederico

Orientador(es) | Ana Isabel Santos

Évora 2022



Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática para o Ensino

Dissertação

Modelação matemática de doenças infecciosas

Ana Paula Aarão Teixeira Videiros Frederico

Orientador(es) | Ana Isabel Santos

Évora 2022



A dissertação foi objeto de apreciação e discussão pública pelo seguinte júri nomeado pelo Diretor da Escola de Ciências e Tecnologia:

Presidente | Jorge Salazar (Universidade de Évora)

Vogais | Ana Isabel Santos (Universidade de Évora) (Orientador)
Luís Miguel Zorro Bandeira (Universidade de Évora) (Arguente)

Agradecimentos

As minhas palavras de gratidão a todas as pessoas que me apoiaram e contribuíram para a realização deste trabalho. Esta dissertação de mestrado não ficaria concluída sem o seu apoio e incentivo.

Quero em especial reconhecer e destacar o incansável e excelente trabalho da Professora Doutora Ana Isabel Santos, o seu profiado rigor, comentários e sugestões pertinentes, que muito contribuíram para a melhoria do trabalho. O meu muito obrigada por ter corrigido, sempre que necessário, o meu trabalho e por me ter motivado de forma a nunca desistir. Agradeço ainda o seu profissionalismo, a sua disponibilidade e dedicação, o seu lado humano, as suas palavras motivadoras durante a realização do trabalho, pois, sem o seu apoio, nunca o teria concluído.

Quero agradecer, também o seu empenho enquanto docente de mestrado, professora exemplar, tolerante e ao mesmo tempo, exigente.

Agradeço todas as úteis sugestões, críticas construtivas e conselhos que constituíram uma mais valia para o desenvolvimento da dissertação e principalmente todo o tempo que me dispensou. Ficar-lhe-ei eternamente grata por ter aceitado de imediato ser minha orientadora numa fase muito complicada da minha vida, o meu bem haja.

À minha família agradeço todo o apoio incondicional, a compreensão pelas inúmeras horas que este trabalho lhe subtraiu, em especial, ao meu marido e aos meus filhos.

Sem o apoio deles teria sido difícil concluir este trabalho.

Modelação Matemática de Doenças Infeciosas

RESUMO

O objetivo desta dissertação é a análise qualitativa de alguns modelos matemáticos em epidemiologia, através da análise da estabilidade de pontos de equilíbrio dos sistemas de equações diferenciais envolvidos. Para o efeito, começar-se-á por estudar vários tipos de equações, bem como as suas técnicas e métodos de resolução e/ou realizar-se-á o estudo qualitativo das mesmas, nomeadamente no que diz respeito à existência e unicidade de solução e à estabilidade dos seus pontos de equilíbrio. Em seguida, realizar-se-á o estudo de modelos matemáticos existentes em Biologia, em particular alguns dos modelos epidemiológicos referidos na literatura, nomeadamente os modelos SI, SIS e SIR, onde se irão aplicar as técnicas e métodos anteriormente estudados. Por fim, pretende-se fazer uma aplicação de algum dos modelos estudados.

PALAVRAS-CHAVE: Epidemiologia, equações diferenciais, modelos matemáticos SI, SIS, SIR, e doenças infecciosas

Mathematical Modelling of Infectious Diseases

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is the qualitative analysis of some mathematical models applied to epidemiology through the analysis of the stability of the equilibrium points of the differential equation systems involved. In order to achieve our purpose, we will start by studying various types of equations, as well as their techniques and methods of resolution and / or we will perform their qualitative study, particularly in what regards the existence and unicity of solution and the stability of its equilibrium points. Then, we will study mathematical models applied to Biology, particularly some epidemic models that exist in literature, including the SI, SIS and SIR models to which we will apply the techniques and methods previously studied. Finally, we intend to put in practice some of the models studied.

KEYWORDS: Epidemiology, differential equations, SI, SIS, SIR, mathematical models and infectious diseases

Conteúdo

Introdução	1
1 Antecedentes Históricos	7
2 Equações Diferenciais de 1.^a ordem	11
2.1 Algumas definições de equações diferenciais	12
2.2 Soluções de equações diferenciais	15
2.2.1 Problemas de valor inicial	17
2.2.2 Análise qualitativa das equações autónomas	19
2.3 Algumas técnicas para a resolução analítica de equações diferenciais	21
2.3.1 Equações diferenciais lineares de 1. ^a ordem	21
2.3.2 Equações diferenciais exatas e fatores integrantes	23
2.3.3 Equações de variáveis separáveis	29
2.3.4 Equações diferenciais homogéneas	34
3 Equações diferenciais de ordem superior	39
3.1 Equações diferenciais lineares de ordem n	39
3.2 Soluções de equações diferenciais de ordem n	40
3.3 Equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n	43

3.4	Equações diferenciais lineares homogêneas de coeficientes constantes	45
3.5	Equações diferenciais não homogêneas de ordem n	49
4	Sistemas de equações diferenciais de 1.^a ordem	51
4.1	Introdução aos sistemas de equações diferenciais	51
4.2	Sistemas de equações diferenciais lineares de 1. ^a ordem	53
4.2.1	Sistemas lineares não homogêneos	56
4.2.2	Sistemas lineares homogêneos de coeficientes constantes	57
4.3	Estabilidade dos pontos de equilíbrio	63
5	Modelos Matemáticos em epidemiologia	69
5.1	Epidemiologia das doenças infecciosas	71
5.2	A dinâmica de doenças infecciosas e o R_0	72
5.3	Epidemias	73
5.4	Conceitos Básicos	75
5.5	Modelo SI	76
5.6	Modelo SI melhorado	83
5.7	Modelo SIS	85
5.8	Modelo SIR	92
5.8.1	Modelo de Kermack-McKendrick	94
6	O Modelo epidemiológico SI aplicado VIH	101
7	Conclusão	107

Lista de Figuras

5.1	Dinâmica de uma infecção.	70
5.2	Dinâmica de uma doença.	71
5.3	Esquema do modelo SI.	77
5.4	Evolução do número de suscetíveis e de infetados.	81
5.5	Curvas epidémicas simples para os $S(t)$ e $I(t)$	82
5.6	Curva epidémica (imagem retirada de [14]).	83
5.7	Evolução do número de infecciosos nos modelos SI e SI melhorado.	86
5.8	Esquema do modelo SIS.	87
5.9	Plano de fase para o modelo SIS, com população sem dinâmica vital.	91
5.10	Esquema do modelo SIR.	93
5.11	Curva epidémica (imagem retirada de [13]).	95
5.12	Plano de fase do modelo SI para o sistema (5.22)-(5.23) (imagem retirada [13]).	98
5.13	Comportamento dos indivíduos em cada classe.	100

Introdução

"But perhaps we will attain more surely the end that we propose, if we add here an evaluation of the ravage of natural smallpox, and of that which one can gain in procuring it artificially."

Daniel Bernoulli

"I simply wish that, in a matter which so closely concerns the wellbeing of the human race, no decision shall be made without all the knowledge which a little analysis and calculation can provide."

Daniel Bernoulli

As doenças infecciosas são uma grande preocupação da espécie humana desde o início da história. Apesar dos avanços significativos da medicina, morrem anualmente milhões de pessoas em todo mundo de Sarampo, Tuberculose ou Sida, entre outras doenças infecciosas, e existem bilhões de pessoas infetadas por todo o mundo. Na década de 1960 acreditava-se que as doenças infecciosas seriam eliminadas ou minimizadas com a melhoria do saneamento, dos antibióticos, das vacinas e da assistência médica tal como é referido

em [9]. No entanto, constatamos que estas são ainda das principais causas de mortalidade nos países em desenvolvimento. Além disso, os agentes das doenças infecciosas adaptam-se e evoluem, observando-se a emergência de novas doenças infecciosas.

Atualmente existem bactérias intrinsecamente resistentes a fármacos ou que adquiriram mutações que lhes permitem resistir à elevada concentração de antibióticos de largo espectro.

Quando nos referimos a uma doença transmissível ou infecciosa, estamos a falar de uma doença causada pela transmissão de um agente infeccioso a partir de um indivíduo infetado, denominado hospedeiro (humano). A relação entre indivíduos, que normalmente designamos por contato, permite a transmissão da infeção. Os agentes infecciosos são transmitidos pelo sangue ou pelo sistema respiratório, através das gotículas expelidas ao falar, espirrar ou tossir, que se difundem no ar e são portadoras de agentes infecciosos que se multiplicam rapidamente. Para melhor compreender a dinâmica das doenças infecciosas é importante distinguir os períodos de tempo envolvidos em todo o processo: o período latente é o período definido como o tempo que decorre desde que o hospedeiro é capaz de transmitir o agente a outro hospedeiro; o período de incubação, corresponde ao período de tempo que decorre desde o início da infeção até ao início da doença; o período infeccioso, é definido como o período de tempo que decorre desde o período infeccioso até ao momento em que o hospedeiro já não consegue transmitir a infeção a terceiros. Os agentes causadores de doenças infecciosas podem ser micro ou macro parasitas, como, por exemplo, os da Tuberculose e da Malária. Embora, o portador do agente infeccioso possa não apresentar quaisquer sintomas da doença, ele é uma fonte potencial de infeção, pois transmite o agente infeccioso. Assim, as doenças são transmitidas por microparasitas, sendo que os

seus agentes podem ser vírus, bactérias ou protozoários, e macroparasitas, cujos agentes são helmintos e artrópodes. A transmissão da infecção pode ser direta ou indireta. A transmissão é direta quando apenas uma espécie de hospedeiro participa na transmissão. Por outro lado, dizemos que a transmissão é indireta quando um parasita passa por um ou mais hospedeiros intermediários para completar o seu ciclo de vida. Ao estudarmos a modelação de doenças infecciosas, é importante estarmos cientes da forma como estas se propagam. Podemos então considerar os seguintes tipos de contágio e algumas das respetivas doenças:

- (i) Transmissão directa: Sarampo, Rubéola, Gripe,...
- (ii) Transmissão sexual: VIH, Sífilis, Gonorreia,...
- (iii) Transmissão indireta via alimentos e água: Cólera, Leptospirose,...
- (iv) Transmissão por vetores: Dengue, Malária,...

Como pode constatar-se em [9] e [17], as principais doenças causadas por micro-organismos são:

- (i) O Sarampo, a Gripe, a Rubéola e a Varicela que são causadas por um vírus.
- (ii) A Meningite Bacteriana, a Gonorreia e a Tuberculose, que são originadas por bactérias.
- (iii) A Pneumonia Atípica, a Candidíase Vaginal, que são originadas por fungos.
- (iv) A Malária e a Toxoplasmose, que são originadas por protozoários.
- (v) A Ascaridíase, que é originada por helmintos.

Além destas, as modificações de proteínas normais no organismo, como é o caso da doença de Creutzfeldt-Jakob esporádica, são provocadas por príões.

A maioria das doenças causadoras de epidemias são recentes, como, por exemplo, é o caso da doença de Lyme, da Legionella, da Hepatite C ou do VIH/Sida. Esta última tornou-se uma doença crónica. Embora, os tratamentos mais eficazes permitam um aumento da esperança média de vida dos infetados, a não existência de uma cura provoca a morte a milhões de pessoas por ano devido à doença e milhões de pessoas encontram-se infetadas.

Existem doenças que se podem classificar como: epidémicas, endémicas e pandémicas. Entende-se por doença endémica uma doença que se encontra, habitualmente, numa determinada área geográfica, isto é, uma doença que está sempre presente. Uma doença é epidémica se ocorre em excesso relativamente à expectativa normal: por exemplo, quando em 2014 existiu um súbito surto da doença da Legionella em Portugal.

No que concerne à pandemia, trata-se de uma epidemia que afeta uma proporção excepcionalmente elevada da população mundial, como é o caso da Covid-19, que surgiu em 2019, mas que poderá passar a endémica com a vacinação de rotina.

A grande facilidade que os vírus têm em adquirir mutações que lhes conferem resistência a fármacos, bem como a resistência bacteriana aos antibióticos, tornou-se um problema cada vez mais presente na sociedade, e teve como consequência o surgimento de doenças infecciosas de difícil tratamento. Devido à globalização e à facilidade de mobilidade de pessoas entre fronteiras internacionais, a transmissão de doenças exóticas endémicas como o Ébola é facilitada.

Neste trabalho, no Capítulo 1, são referidos acontecimentos históricos, de doenças

infecciosas e transmissíveis, que foram responsáveis pela evolução da epidemiologia. Apresentamos alguns conceitos básicos sobre equações diferenciais que servem de base para a análise dos modelos epidemiológicos e serão usados na construção dos mesmos, tendo um papel relevante na ligação e interação da Matemática com o estudo das doenças infecciosas. Nomeadamente, no Capítulo 2 estudam-se as equações diferenciais de primeira ordem e apresentam-se algumas técnicas usadas na sua resolução. O Capítulo 3 é dedicado às equações diferenciais de ordem superior e o Capítulo 4 aos sistemas de equações lineares de primeira ordem. No Capítulo 5 faz-se o estudo dos modelos epidemiológicos SI, SIS e SIR. Estes modelos serão introduzidos de acordo com a sua complexidade, a qual irá sendo aumentada por forma a torná-los tão próximos da realidade quanto possível. Começamos por introduzir o modelo mais simples SI, onde se assume que a população está dividida em dois grupos de indivíduos: os suscetíveis à doença e os infetados. Seguidamente, estudaremos o modelo SIS, que se obtém a partir do modelo anterior, introduzindo a premissa de que os indivíduos infetados voltam a ficar suscetíveis à doença passado algum tempo depois do período de infeção ter terminado. Na última secção deste Capítulo estudaremos o modelo SIR, no qual a população se encontra dividida em três grupos: os suscetíveis, os infetados e os removidos. Do grupo dos removidos fazem parte os indivíduos que recuperam da doença, adquirindo imunidade, e também os óbitos. Finalmente, no Capítulo 6 apresenta-se uma aplicação do modelo epidemiológico SI à VIH. A dissertação é finalizada com uma pequena conclusão.

Capítulo 1

Antecedentes Históricos

Ao longo de toda a história da humanidade, é notório o forte impacto que as epidemias podem ter sobre o ser humano. As epidemias tiveram e continuam a ter reflexos históricos importantes, uma vez que afetam quer o comportamento social, quer a economia da região onde ocorrem.

A partir do século XIX, o conhecimento epidemiológico progrediu muito rapidamente, sendo por isso difícil enumerar todos aqueles que deram um contributo relevante para o seu desenvolvimento.

Na antiguidade, a maior epidemia de que temos conhecimento através dos registos de historiadores e estudiosos é a denominada Praga de Atenas, Peste de Atenas ou Peste do Egito, que ocorreu na cidade de Atenas entre 430-428 a.C. e, naquela altura, vitimou dois terços da população. Referências a esta epidemia encontram-se por exemplo, em, [9] e [15].

A descrição mais precisa desta epidemia é fornecida pelo primeiro historiador científico, Tucídides (460-400 a.C.), na obra "História da Guerra do Peloponeso". Nesta obra o autor descreve os sintomas, o modo de progressão da doença e o número de mortes que a mesma provocou. Hipócrates (459-337 a.C.), a quem é reconhecida a paternidade da

Medicina, daí ser considerado por muitos o "Pai da Medicina", no seu trabalho "Of the Epidemics" fala sobre os fatores que afetavam a propagação duma doença e as formas de contágio conhecidas na época.

Como é sabido, num surto epidémico morrem milhões de indivíduos. Um desses surtos ocorreu no século XIV, na Europa, onde morreram entre 25 a 75 milhões de pessoas devido à Peste Bubónica, também conhecida como Peste Negra (1347-1350). Tal encontra-se referenciado, por exemplo, em [1]. Após o fim do surto epidémico, o vírus da Peste Negra permaneceu na população e reapareceu em 1665, na Grã-Bretanha, com a designação de Black Death.

Os germes da peste foram detetados em pulgas, que viviam como parasitas em ratos e como estes nunca ficaram totalmente livres da praga, a peste permaneceu na população por um longo período, tornando-se uma doença endémica. A população sabia que corria riscos, aliás contrariar a doença era uma possibilidade com que as pessoas simplesmente aprenderam a viver. Neste período, o vírus matou mais de 100 mil pessoas na cidade de Londres.

Outra epidemia desastrosa que, no século XIX, atacou a população asteca, foi a Variola. Esta doença matou cerca de 35 milhões de pessoas. Já no século XX, a pandemia da gripe, que ocorreu em 1919, após a Primeira Guerra Mundial, matou 20 milhões de pessoas em todo o mundo.

A epidemiologia tem uma longa história. No entanto, o estudo matemático de doenças epidemiológicas é relativamente recente, podemos dizer que tem no máximo pouco mais de 300 anos, tomando-se como referência a obra de John Graunt. Em 1662, este autor publica o livro "Natural and Political observations made upon the Bills of Mortality", onde

analisa os vários problemas demográficos existentes na Grã-Bretanha do século XVII. Na sua obra, faz observações sobre os registos de mortes e calcula os riscos relativos a uma determinada doença, pelo que se considera que esta é a primeira abordagem à teoria de riscos competitivos, que agora é usada na epidemiologia moderna. Daí se considerar, de forma inegável, a importância do seu contributo para a razão e para o pensamento epidemiológico do século XXI, com ideias simples e revolucionárias.

Um século mais tarde, Daniel Bernoulli faz uma abordagem mais teórica aos efeitos de uma determinada doença e, em 1760, publica o primeiro modelo epidemiológico. O seu objetivo era demonstrar que a inoculação por um vírus vivo, obtido diretamente a partir de um paciente com um leve caso de varíola, poderia reduzir a taxa de mortalidade da população francesa.

Em 1761, D'Alembert desenvolve um método alternativo para lidar com os riscos de morte, o qual era aplicável tanto a doenças não infecciosas, como a doenças infecciosas.

Em meados do século XIX, Robert Koch torna-se famoso pela descoberta do bacilo do antraz (em 1877), do bacilo da Tuberculose (em 1882), do vibrião da cólera (em 1883) e ainda pelo desenvolvimento dos "postulados de Koch", que permitiram estabelecer uma relação causal entre um agente microbiano e uma determinada doença. Tal encontra-se referenciado, por exemplo, em [16].

Poucos anos depois, em 1886, Louis Pasteur cria a primeira vacina contra a raiva. Para os leigos, estas doenças eram um castigo dos deuses ou algum tipo de bruxaria. Porém, a Ciência poderia explicar o "porquê", baseando-se em observações sistemáticas e no estudo racional, usando métodos adequados de prova, e a Matemática poderia explicar "como", baseando-se em resultados matemáticos consensuais, porque os métodos de prova usados

eram poderosos. Uma vez apresentada a demonstração matemática de um resultado, era praticamente impossível recusá-lo, tornando-se um modelo.

Em 1906, Hamer aplica pela primeira vez o Lei de Ação das Massas ¹ a um modelo epidêmico determinístico em tempo discreto. No início do século XX, mais concretamente em 1911, Sir Ronald Ross, ao estudar a transmissão da Malária, vaticina sobre a existência de um limiar de densidade de mosquitos, abaixo do qual ocorria a extinção natural da doença. Este pode ter sido o prenúncio do Teorema do Limiar, estabelecido por Kermack e McKendrick em 1927, segundo o qual há uma densidade crítica de indivíduos suscetíveis abaixo da qual a introdução de casos infecciosos numa população não provoca uma epidemia.

Estes modelos têm características determinísticas e são ainda amplamente utilizados. Embora tenham sido desenvolvidos novos modelos, que levam em consideração vários outros fatores, tais como: a migração, a vacinação, a quimioterapia, a quarentena, a imunidade passiva, a heterogeneidade genética, a distribuição não uniforme da população, etc.

Em 1969, Anderson e May obtêm generalizações importantes de determinados modelos epidêmicos. Um grande número de modelos foi formulado, analisado matematicamente e aplicado a doenças infecciosas, tais como: a Varíola, a Malária, a Sida, a Pneumonia Atípica, o Sarampo, a Rubéola, a Cólera, a Tosse Convulsa, a Difteria, a Gonorreia, a Sífilis, o

¹A lei estabelece que, para um sistema homogêneo, a taxa de uma reação química simples é proporcional à probabilidade das moléculas que reagem serem encontradas juntas num pequeno volume. Aplicado a processos populacionais, se os indivíduos na população se misturarem homogeneamente, a taxa de interação entre dois grupos diferentes da população é proporcional ao produto dos elementos em cada um dos grupos em causa. Se vários processos ocorrem simultaneamente, então os efeitos desses processos sobre os elementos em qualquer grupo são considerados aditivos. Portanto, no caso da modelação de uma epidemia, a lei é aplicada à taxa de transição dos indivíduos entre duas categorias de interação da população (por exemplo, os suscetíveis que se tornam infecciosos após um contato adequado).

Herpes, entre outras (informações extraídas de [3]).

Capítulo 2

Equações Diferenciais de 1.^a ordem

É sabido que muitos dos problemas do mundo real podem ser estudados e explicados através de modelos matemáticos, nomeadamente modelos que envolvem equações diferenciais. Consequentemente, as equações diferenciais surgem de modo natural em, praticamente, todos os ramos da Ciência, tais como a Biologia, a Ecologia, a Economia, a Engenharia, a Física, a Química, a Medicina, entre outras.

Em todos estes domínios das ciências existe uma grande variedade de problemas onde se pretende determinar algo variável a partir do seu coeficiente de variação, isto é, pretende-se determinar uma função desconhecida, a partir do conhecimento de certos dados expressos por intermédio de uma equação que contém, pelo menos, uma das derivadas da função desconhecida. A estas equações chamamos equações diferenciais e o seu estudo constitui uma das áreas da Matemática com um elevado número de aplicações. Dos muitos fenómenos que podem ser modelados por equações diferenciais refira-se, por exemplo, a dinâmica de populações, a propagação de doenças, o movimento de planetas, a análise de circuitos elétricos, a mecânica de fluídos e a propagação de ondas.

2.1 Algumas definições de equações diferenciais

Embora o foco deste capítulo sejam as equações diferenciais de primeira ordem, nesta secção apresentam-se algumas definições de diferentes tipos de equações diferenciais que surgem na literatura, nomeadamente em [7].

Definição 2.1 *Uma equação diferencial é uma igualdade que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma ou mais variáveis independentes.*

Exemplo 2.2 *As seguintes equações são exemplos de equações diferenciais*

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - ty^5 \frac{dy}{dt} + \sin y = 0 \quad (2.1)$$

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} = e^t \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xyz \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \quad (2.4)$$

Definição 2.3 *Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação diferencial que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma variável independente.*

Exemplo 2.4 *As equações (2.1) e (2.2) são exemplos de equações diferenciais ordinárias.*

Definição 2.5 *Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação que envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a mais do que uma variável independente.*

Exemplo 2.6 *As equações (2.3) e (2.4) são exemplos de equações diferenciais parciais.*

Definição 2.7 A ordem de uma equação diferencial é a ordem máxima das derivadas que nela figuram.

Exemplo 2.8 Assim, a equação (2.1) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e não de segunda ordem. A equação (2.2) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. As equações (2.3) e (2.4) são equações diferenciais parciais de segunda ordem.

Definição 2.9 Seja I um intervalo aberto. Uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, na variável dependente y e na variável independente t é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} + a_1(t)y = b(t) \quad (2.5)$$

onde $a_1(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas em I .

Definição 2.10 Uma equação diferencial ordinária não linear de primeira ordem é uma equação diferencial que não pode ser expressa na forma da equação (2.5).

Exemplo 2.11 Suponhamos que $y = y(t)$, as seguintes equações constituem exemplos de equações diferenciais ordinárias:

$$4t \frac{dy}{dt} - 2y = t,$$
$$\frac{dy}{dt} + 2y \cos t = 0.$$

No que se segue consideremos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em $D \subset \mathbb{R}^2$. Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser escrita essencialmente de quatro formas equivalentes:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.6)$$

ou

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(t, y)},$$

que se designam por forma inversa, ou ainda na forma diferencial

$$f(t, y) dt - dy = 0,$$

ou, mais geralmente, por

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0. \quad (2.7)$$

Esta característica faz com que, em muitos casos, a variável independente possa ser escolhida de forma mais vantajosa do ponto de vista da análise e da resolução da equação diferencial em causa.

Exemplo 2.12 *A equação diferencial de primeira ordem não linear para determinada escolha da variável independente, passa a ser linear se for reescrita considerando outra variável independente (troca-se o papel das variáveis dependentes/independentes). Considerando a seguinte equação diferencial não linear*

$$\frac{dy}{dt} - 2e^{3y} = 0,$$

esta pode-se escrever como

$$\frac{dy}{dt} - 2e^{3y} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 2e^{3y} \Leftrightarrow \frac{dt}{dy} = \frac{1}{2}e^{-3y},$$

onde se assumiu que $t = t(y)$, transformando-se assim numa equação diferencial linear na variável t .

Exemplo 2.13 *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + y^2}{2t^2 + 3y^2}$$

que está escrita na forma (2.6), onde

$$f(t, y) = \frac{t^2 + y^2}{2t^2 + 3y^2},$$

pode-se também representar na forma (2.7), ou seja,

$$(t^2 + y^2) dt - (2t^2 + 3y^2) dy = 0,$$

onde

$$M(t, y) = t^2 + y^2 \quad e \quad N(t, y) = -2t^2 - 3y^2.$$

É ainda possível escrever esta mesma equação diferencial na seguinte forma:

$$\frac{t^2 + y^2}{2t^2 + 3y^2} dt - dy = 0.$$

2.2 Soluções de equações diferenciais

Antes de apresentarmos qualquer método para determinar as soluções de equações diferenciais, é importante precisar o conceito de solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem .

Definição 2.14 Considere-se a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = 0 \tag{2.8}$$

onde F é uma função real. Diz-se que uma solução desta equação diferencial é qualquer relação implícita ou explícita¹ entre as variáveis t e y que satisfaça a equação (2.8).

Exemplo 2.15 A curva $y(t) = t^2$ é uma solução explícita da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + y = t(t + 2),$$

¹A relação diz-se explícita se é da forma $y = f(t)$ e implícita se $f(t, y) = 0$

uma vez que substituindo y por t^2 na equação se obtém uma identidade:

$$\frac{dy}{dt} + y = t(t+2) \Leftrightarrow \frac{d(t^2)}{dt} + t^2 = t(t+2) \Leftrightarrow 2t + t^2 = t(t+2)$$

Exemplo 2.16 A equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = ty \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} - ty = 0,$$

corresponde uma função F , definida por

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{dy}{dt} - ty.$$

Definição 2.17 Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real, definida para todo t pertencente a um intervalo real aberto I , que tenha derivada em I . A função f designa-se uma solução explícita da equação (2.8) no intervalo I se satisfaz as condições:

- (i) $F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$ está definida para todo $t \in I$;
- (ii) $F\left(t, f, \frac{df}{dt}\right) = 0$, para todo $t \in I$.

Definição 2.18 Considere-se $g(t, y) = 0$ uma relação implícita. Esta relação diz-se uma solução implícita da equação (2.8) se define pelo menos uma função real $f(t)$ num intervalo aberto I , tal que $f(t)$ é uma solução explícita de (2.8) no intervalo I .

Exemplo 2.19 A relação $t^2y - 3 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{t} \tag{2.9}$$

uma vez que

$$t^2y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{t^2}$$

definindo-se uma função real $f(t) = \frac{3}{t^2}$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, derivando esta função em ordem a y obtemos $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t}$, pelo que se conclui que $f(t)$ é uma solução explícita de (2.9) em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.2.1 Problemas de valor inicial

Em seguida apresenta-se a definição de problema de valor inicial, que se designa habitualmente por PVI.

Definição 2.20 *Considere-se a equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.10)$$

onde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua no seu domínio². Seja (t_0, y_0) um ponto de D . Chama-se problema de valor inicial associado a (2.10) ao problema que consiste em determinar a solução $\phi(t)$ da equação diferencial (2.10) que esteja definida num intervalo real contendo t_0 e que satisfaça a condição inicial $\phi(t_0) = y_0$. Este tipo de PVI escreve-se na forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Para resolver o problema (2.11) deve determinar-se uma função $\phi(t)$ definida nalgum intervalo real contendo t_0 e que satisfaça não só a equação diferencial (2.10) mas também a condição inicial, ou seja, a função $\phi(t)$ terá y_0 como imagem de t_0 . O método a usar para determinar $\phi(t)$ depende do tipo de equação diferencial presente no problema, isto é, da forma da função $f(t, y)$.

²Um domínio é um conjunto aberto e conexo. Este domínio pode ser visto como o interior de uma curva fechada simples no plano.

Observação 2.21 *Em aplicações que envolvem equações diferenciais de primeira ordem, ou de ordem superior, os problemas mais frequentes envolvem uma equação diferencial e uma ou mais condições suplementares. Se todas as condições suplementares disserem respeito a um determinado valor da variável independente, diz-se que estamos na presença de um PVI. Se as condições se referirem a dois valores distintos da variável independente, dizemos que se trata de um problema de valores de fronteira (PVF). Destas definições decorre que as equações diferenciais de primeira ordem só podem estar associadas a um PVI.*

Vamos enunciar, sem demonstrar, um teorema que estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de solução de um PVI.

Teorema 2.22 *(Teorema de existência e unicidade de solução) Considere-se a equação diferencial (2.10), onde f é uma função contínua no seu domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ também é contínua em D . Seja (t_0, y_0) um ponto de D então, a equação diferencial (2.10) admite uma e uma única solução $y = \phi(t)$ num intervalo $|t - t_0| < \varepsilon$, para ε suficientemente pequeno, que verifica a condição*

$$\phi(t_0) = y_0.$$

Observação 2.23 *Este teorema estabelece que, em determinadas condições, o PVI*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tem uma única solução que é válida num determinado intervalo em torno de t_0 (isto é, numa vizinhança suficientemente pequena de t_0). No entanto, o teorema não indica nenhum método para determinar a solução, apenas garante a existência de solução única

se forem verificadas determinadas condições. No caso de alguma dessas condições não se verificar, então nada podemos concluir.

Exemplo 2.24 Considere-se o PVI

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(1) = 3.$$

O nosso objetivo é aplicar o teorema anterior, para tal vejamos se as suas hipóteses se verificam. Neste caso em concreto temos que

$$f(t, y) = t^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = 2y,$$

pelo que as duas funções $f(t, y)$ e $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ são contínuas em \mathbb{R}^2 . A condição inicial $y(1) = 3$ implica que $t_0 = 1$ e $y_0 = 3$, assim o ponto de coordenadas $(t_0, y_0) = (1, 3)$, pertence a algum destes domínios $D \subset \mathbb{R}^2$. Portanto, verificam-se as hipóteses do teorema, pelo que a conclusão é válida, ou seja, o PVI tem uma única solução.

2.2.2 Análise qualitativa das equações autónomas

No caso particular de equações diferenciais de primeira ordem em que a derivada da solução é uma função de classe C^1 que não depende da variável independente de t , a análise qualitativa fornece informação suficiente para descrever de forma mais pormenorizada as soluções de uma equação. Designamos essas equações por equações autónomas. A forma geral de uma equação autónoma de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

em que f é uma função de classe C^1 .

Consideremos o problema do valor inicial associado a uma equação autónoma em que f é uma função de classe C^1 ,

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.12)$$

O Teorema da existência e unicidade de solução de um PVI permite garantir a existência e unicidade da solução para qualquer condição inicial.

Definição 2.25 *Um ponto y_* é um ponto de equilíbrio da equação diferencial autónoma $\frac{dy}{dt} = f(y)$ se e só se $f(y_*) = 0$. Para os sistemas diferenciais autónomos os pontos de equilíbrio definem as soluções constantes.*

Para uma equação diferencial de primeira ordem autónoma, é usual classificar os pontos de equilíbrio. Assim,

Definição 2.26 *Seja $y = y_*$ um ponto de equilíbrio, então:*

- (i) *Dizemos que o ponto de equilíbrio é um **poço** se toda a solução com condição inicial suficientemente próximo de y_* tende para y_* quando $t \rightarrow +\infty$. A um poço está associado uma solução de equilíbrio **estável**.*
- (ii) *Dizemos que o ponto de equilíbrio é uma **fonte** se toda a solução com condição inicial suficientemente próximo de y_* tende para y_* quando $t \rightarrow -\infty$. A uma fonte está associada uma solução de equilíbrio **instável**.*
- (iii) *Todo o ponto de equilíbrio que não é um poço ou uma fonte designa-se por **ponto de sela**.*

2.3 Algumas técnicas para a resolução analítica de equações diferenciais

Neste secção vamos apresentar algumas técnicas para resolver equações ordinárias de 1ª ordem.

2.3.1 Equações diferenciais lineares de 1.ª ordem

Considere-se um caso especial em que a equação diferencial pode ser reduzida a uma equação diferencial linear de primeira ordem, através de uma mudança de base adequada.

Teorema 2.27 *A equação linear*

$$\frac{dy}{dt} + a_1(t)y = b(t)$$

tem como fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int a_1(t)dt}. \quad (2.13)$$

Uma família de soluções desta equação diferencial é

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t)b(t) dt + c \right].$$

Observação 2.28 *É possível mostrar que esta família de soluções inclui todas as equações diferenciais (2.5).*

Dem. Consideremos a equação diferencial (2.5), em que $a_1(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Para encontrar a solução geral da equação, consideremos o fator integrante (2.13). Multiplicando ambos os membros da equação (2.5) por (2.13), obtemos uma equação diferencial equivalente

$$e^{\int a_1(t)dt} \left[\frac{dy}{dt} + a_1(t)y \right] = b(t) e^{\int a_1(t)dt} \quad (2.14)$$

observemos que o primeiro membro da equação (2.14) é a derivada em ordem a t do produto de μ por y . De facto

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \frac{dy}{dt} e^{\int a_1(t) dt} + a_1(t) y e^{\int a_1(t) dt} = e^{\int a_1(t) dt} \left[\frac{dy}{dt} + a_1(t) y \right]. \quad (2.15)$$

Assim, a equação (2.5) escreve-se

$$\frac{dy}{dt} e^{\int a_1(t) dt} + \frac{d}{dt} \left(e^{\int a_1(t) dt} \right) y = b(t) e^{\int a_1(t) dt}.$$

Integrando ambos os membros obtém-se a família de soluções de (2.5), pelo que

$$y e^{\int a_1(t) dt} = \int b(t) e^{\int a_1(t) dt} dt + c$$

onde c é uma constante arbitrária, então

$$\mu(t) y = \int \mu(t) b(t) e^{\int a_1(t) dt} dt + c$$

logo

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) b(t) dt + c$$

como queríamos mostrar. ■

Exemplo 2.29 *Consideremos o seguinte PVI*

$$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}y = t^2 - 3, \quad y(1) = 0, \quad \text{com } t \in]0, +\infty[.$$

As funções $a_1(t)$ e $b(t)$ definidas por $a_1(t) = \frac{3}{t}$ e $b(t) = t^2 - 3$, são funções contínuas em \mathbb{R}^+ , logo o fator integrante é :

$$\mu(t) = e^{\int a_1(t) dt} = e^{\int \frac{3}{t} dt} = e^{3 \ln|t|} = e^{\ln|t|^3} = t^3.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pelo fator integrante obtemos

$$t^3 \frac{dy}{dt} + 3t^2 y = t^3 (t^2 - 3) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (t^3 y) = t^5 - 3t^3.$$

Como

$$\int \mu(t) b(t) dt = \int (t^5 - 3t^3) dt = \frac{t^6}{6} - \frac{3t^4}{4} + c,$$

então, pelo Teorema 2.27, a solução da equação diferencial é a família de funções definida por

$$y = \frac{1}{t^3} \left(\frac{t^6}{6} - \frac{3t^4}{4} + c \right),$$

onde c é uma constante arbitrária. Considerando as condições iniciais do problema, calculemos o valor dessa constante,

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + c \right) \Leftrightarrow c = \frac{7}{12}$$

Assim a, solução do PVI é

$$y = \frac{t^3}{6} - \frac{3t}{4} + \frac{7}{12t^3}.$$

2.3.2 Equações diferenciais exatas e fatores integrantes

Começemos por introduzir o conceito de diferencial total de uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} , o qual será essencial na definição de equação diferencial de primeira ordem que abordaremos, as equações diferenciais exatas.

Definição 2.30 Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no seu domínio D .

Define-se o diferencial total da função F , que se denota por dF , como

$$dF(t, y) = \frac{\partial F(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} dy, \quad (2.16)$$

para todo $(t, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.31 Seja $F(t, y)$ uma função de duas variáveis definida por $F(t, y) = ty^3$ para todo $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = y^3 \quad e \quad \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = 3ty^2,$$

tendo-se como diferencial total

$$dF(t, y) = y^3 dt + 3ty^2 dy.$$

Definição 2.32 A expressão

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy \tag{2.17}$$

designa-se uma diferencial exata num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ se e só se existe uma função $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , tal que a expressão (2.17) é igual ao diferencial total de F para todo $(t, y) \in D$, ou seja, pela definição precedente, concluí-se que a expressão (2.17) é uma diferencial exata em D se e só se existir uma função F tal que

$$dF(t, y) = M(t, y) dt + N(t, y) dy, \quad \forall (t, y) \in D.$$

Salientemos que, nestas condições, tem-se

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \quad e \quad \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y), \quad \forall (t, y) \in D, \tag{2.18}$$

designando-se F uma primitiva da forma diferencial dF .

Definição 2.33 Se $M(t, y) dt + N(t, y) dy$ é uma diferencial exata em $D \subset \mathbb{R}^2$, então a equação diferencial (2.17) designa-se uma equação diferencial exata.

Observação 2.34 Note-se que, nestas condições, existe, por definição de diferencial exata, uma função $F(t, y)$ tal que

$$dF(t, y) = M(t, y) dt + N(t, y) dy,$$

e pode escrever-se

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(t, y) = 0.$$

Este resultado é o ponto de partida para determinar as famílias de soluções de equações diferenciais exatas.

Teorema 2.35 *Sejam $M(t, y)$ e $N(t, y)$ duas funções contínuas com derivadas parciais contínuas em todos os pontos (t, y) de domínio $D \subset \mathbb{R}^2$. Então, a equação diferencial (2.17) é exata em D se e só se*

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial y}, \quad \forall (t, y) \in D. \quad (2.19)$$

Dem. Para demonstrar este teorema basta provar que

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0 \text{ é exata em } D \Leftrightarrow \frac{\partial M(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial y}, \quad \forall (t, y) \in D.$$

Se a equação diferencial (2.19) é exata em D , então existe uma função $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \quad e \quad \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y), \quad \forall (t, y) \in D, \quad (2.20)$$

pelo que,

$$\frac{\partial^2 F(t, y)}{\partial y \partial t} = \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial^2 F(t, y)}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}, \quad \forall (t, y) \in D.$$

Atendendo ao facto de, por hipótese, as derivadas parciais de M e N serem contínuas, então pelo, Teorema de Schwarz³, tem-se que

$$\frac{\partial^2 F(t, y)}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 F(t, y)}{\partial t \partial y}, \quad \forall (t, y) \in D.$$

³O teorema de Schwarz : Seja $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)$ estão definidas numa vizinhança de $(a, b) \in \text{int}D$. Se $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)$ é contínua em (a, b) , então $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)$ também está definida em (a, b) e $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) (a, b) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) (a, b)$.

Resultando que

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}, \quad \forall (t, y) \in D,$$

conforme pretendido.

Reciprocamente, suponhamos por hipótese que

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}, \quad \forall (t, y) \in D.$$

Agora, pretendemos mostrar que

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0 \tag{2.21}$$

é exata em D . O que significa que temos de provar que existe uma função F tal que

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \quad e \quad \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y), \quad \forall (t, y) \in D.$$

Atendendo a que F deve verificar as duas condições precedentes, podemos escolher qualquer uma delas e obter uma expressão para F . Integrando ambos os membros de

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y)$$

em ordem a t , obtém-se

$$F(t, y) = \int_{t_0}^t M(s, y) ds + \phi(y), \tag{2.22}$$

onde $\phi(y)$ é uma função arbitrária que só depende de y .

Para obter $F(t, y)$, resta-nos determinar $\phi(y)$ substituindo a expressão de $F(t, y)$ na outra condição, ou seja,

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{t_0}^t M(s, y) ds + \phi(y) \right] = N(t, y),$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{t_0}^t M(s, y) ds + \frac{d\phi(y)}{dy} = N(t, y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\phi(y)}{dy} = N(t, y) - \int_{t_0}^t \frac{\partial M(s, y)}{\partial y} ds. \quad (2.23)$$

Uma vez que ϕ só depende de y , o mesmo acontece com a sua derivada, pelo que derivando em ordem a t tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[N(t, y) - \int_{t_0}^t \frac{\partial M(s, y)}{\partial y} ds \right] = 0.$$

De facto, a equação precedente é equivalente a

$$\frac{\partial N(t, y)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial M(s, y)}{\partial y} ds \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} - \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = 0, \quad \forall (t, y) \in D,$$

portanto, a expressão (2.23) depende apenas de y , logo a função ϕ pode ser obtida a partir de (2.23) e, conseqüentemente, uma função F , que verifique (2.18), será obtida de (2.22), como queríamos mostrar. ■

Observação 2.36 *O teorema precedente dá-nos um critério para decidir se determinada equação diferencial do tipo (2.21) é ou não exata. De facto, se a condição (2.18) for verificada, então a equação diferencial (2.21) é exata. O teorema diz-nos que uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial (2.17) seja exata em D é a que a condição (2.18) seja válida para todo $(t, y) \in D$. A demonstração da segunda parte do teorema sugere qual o procedimento para obter $F(t, y)$ a partir de $M(t, y)$ e $N(t, y)$.*

Observação 2.37 *Sabendo que uma equação diferencial é exata, então uma família de soluções dessa equação é da forma $F(t, y) = c$. Conforme já se verificou a equação (2.21) é exata, então existe uma função $F(t, y)$ que verifica (2.20). Logo, a equação (2.21) pode ser escrita na forma*

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} dx + \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} dy = 0. \quad (2.24)$$

Atendendo à Definição 2.30 e a (2.24) obtemos

$$dF(t, y) = 0.$$

Podemos assim concluir que $F(t, y) = c$ define uma família de soluções da equação diferencial exata, sendo c uma constante arbitrária.

Definição 2.38 Seja D um domínio retangular de \mathbb{R}^2 e $M(t, y)$ e $N(t, y)$ duas funções reais de classe C^1 em D . Suponhamos que a equação diferencial (2.17) não é exata em D , mas que a equação diferencial

$$\mu(t, y) M(t, y) dt + \mu(t, y) N(t, y) dy = 0$$

já é exata em D . Então, $\mu(t, y)$ designa-se por fator integrante da equação diferencial (2.21).

Observação 2.39 Da definição anterior resulta que se $\mu(t, y)$ é um fator integrante de determinada equação diferencial, então $k\mu(t, y)$, onde k é uma constante não nula, também é fator integrante dessa mesma equação diferencial.

Exemplo 2.40 Considere-se a seguinte equação diferencial

$$(2t + 3t^2y) dt + (3y + 4ty^2) dy = 0 \quad (2.25)$$

A equação diferencial (2.25) é do tipo (2.21), onde

$$M(t, y) = 2t + 3t^2y \quad e \quad N(t, y) = 3y + 4ty^2$$

pelo que

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial t} = 2 + 6ty \quad e \quad \frac{\partial N(t, y)}{\partial y} = 3 + 8ty.$$

Dado que a igualdade

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial y}$$

apenas se verifica ao longo da curva $2xy + 1 = 0$, a equação diferencial (2.25) não é exata em nenhum domínio de \mathbb{R}^2 . No entanto, se considerarmos $k\mu(x, y) = kx^2y$ como um potencial fator integrante a correspondente equação diferencial é agora

$$\begin{aligned} kt^2y(2t + 3t^2y) dt + kt^2y(3y + 4ty^2) dy &= 0 \Leftrightarrow \\ (2kt^3y + 3kt^4y^2) dt + (3kt^2y^2 + 4kt^3y^3) dy &= 0. \end{aligned}$$

Como esta equação é exata em \mathbb{R}^2 , pois

$$\frac{\partial}{\partial t} (2kt^3y + 3kt^4y^2) = 6kt^2y + 12kt^3y^2$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} (3kt^2y^2 + 4kt^3y^3) = 6kt^2y + 12kt^3y^2$$

então podemos concluir que $k\mu(t, y) = kt^2y$, com $k \neq 0$, é um fator integrante da equação diferencial.

2.3.3 Equações de variáveis separáveis

Existem equações diferenciais de primeira ordem que são resolúveis através da aplicação de métodos de primitivação, eventualmente, precedidos por uma mudança de variável.

Definição 2.41 Uma equação diferencial da forma

$$f_1(t)g_2(y) dt + f_2(t)g_1(y) dy = 0 \tag{2.26}$$

designa-se uma equação de variáveis separáveis.

Observação 2.42 Em geral, a equação diferencial de variáveis separáveis (2.26) não é exata, mas possui um fator integrante óbvio, a saber,

$$\mu(t, y) = \frac{1}{f_2(t)g_2(y)}, \text{ desde que } g_2(y) \neq 0 \text{ e } f_2(t) \neq 0.$$

De facto, multiplicando ambos os membros de (2.26) por $\mu(t, y)$ obtém-se a equação diferencial

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} dt + \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = 0. \quad (2.27)$$

Esta equação diferencial é exata, pois

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f_1(t)}{f_2(t)} \right] = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{g_1(y)}{g_2(y)} \right],$$

para todo $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, a equação diferencial (2.26) pode ser resolvida usando o fator integrante. Sejam $M(t)$ e $N(y)$ as funções definidas por

$$M(t) = \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \quad \text{e} \quad N(y) = \frac{g_1(y)}{g_2(y)},$$

então a equação (2.27) transforma-se numa equação de variáveis separáveis da forma

$$M(t) dt + N(y) dy = 0. \quad (2.28)$$

Teorema 2.43 A equação diferencial exata $M(t) dt + N(y) dy = 0$, onde M e N são funções da classe C^1 , admite uma família de soluções que é dada por

$$\int M(t) dt + \int N(y) dy = c, \quad (2.29)$$

onde c é uma constante arbitrária.

Dem. Sendo a equação (2.28) uma equação diferencial exata, então uma família de soluções dessa equação é da forma $F(t, y) = c$, onde a função $F(t, y)$ existe garantidamente e verifica as condições $\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t)$ e $\frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(y)$.

Da primeira equação obtém-se

$$F(t, y) = \int M(t) dt + \phi(y),$$

pelo que da segunda equação decorre

$$\frac{\partial \left[\int M(t) dt + \phi(y) \right]}{\partial y} = N(y) \Rightarrow \frac{d\phi(y)}{dy} = N(y).$$

Donde

$$\phi(y) = \int N(y) dy + k,$$

logo,

$$F(t, y) = \int M(t) dt + \int N(y) dy + k.$$

Tomando-se $k = 0$ e recordando que uma família de soluções da equação (2.28) se escreve na forma $F(t, y) = c$, tem-se a equação (2.29). ■

Exemplo 2.44 Considere uma família de soluções da equação diferencial

$$(3t - 5)y^6 dt + t^5(3y^2 - 1) dy = 0. \quad (2.30)$$

Como se trata de uma equação diferencial de variáveis separáveis, então usando o fator integrante

$$\mu(t, y) = \frac{1}{t^5 y^6}$$

e assumindo que $t^5 \neq 0$ e $y^6 \neq 0$, sendo t a variável independente, obtém-se a equação diferencial exata

$$\frac{3t - 5}{t^5} dt + \frac{3y^2 - 1}{y^6} dy = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{t^4} - \frac{5}{t^5} \right) dt + \left(\frac{3}{y^4} - \frac{1}{y^6} \right) dy = 0$$

Primitivando, obtém-se

$$\int \left(\frac{3}{t^4} - \frac{5}{t^5} \right) dt + \int \left(\frac{3}{y^4} - \frac{1}{y^6} \right) dy = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Assim, tem-se que

$$-\frac{1}{t^3} + \frac{5}{4t^4} - \frac{1}{y^3} + \frac{1}{5y^5} = c \quad (2.31)$$

é uma família de soluções da equação diferencial proposta. De facto, derivando implicitamente ambos os membros da solução encontrada (2.31) em ordem a t , obtém-se

$$\left(\frac{3}{t^4} - \frac{5}{t^5} \right) + \left(\frac{3}{y^4} - \frac{1}{y^6} \right) \frac{dy}{dt} = 0,$$

que é equivalente a ter-se

$$\left(\frac{3}{t^4} - \frac{5}{t^5} \right) dt + \left(\frac{3}{y^4} - \frac{1}{y^6} \right) dy = 0$$

pelo que multiplicando por $t^5 \neq 0$ e $y^6 \neq 0$, obtém-se a equação diferencial (2.30).

Teorema 2.45 Considere-se uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dt} = h(at + by + c), \quad (2.32)$$

onde a, b e c são constantes tais que $a, b \neq 0$. Então, a mudança de variável

$$w = at + by + c$$

transforma a equação diferencial precedente numa equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis w e t .

Dem. A mudança de variável proposta conduz a

$$w = at + by + c \Rightarrow \frac{dw}{dt} = a + b \frac{dy}{dt}.$$

Substituindo a expressão $\frac{dy}{dt}$ dada por (2.32) na equação precedente, obtém-se

$$\frac{dw}{dt} = a + bh(w),$$

resultando na equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{a + bh(w)} dw - dt = 0,$$

como se pretendia. ■

Exemplo 2.46 *Determine-se uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = 8t - 4y + 3.$$

Como a mudança de variável adequada é

$$w = 8t - 4y + 3,$$

então, derivando ambos os membros da equação em ordem a t , obtém-se

$$\frac{dw}{dt} = 8 - 4\frac{dy}{dt}.$$

Atendendo à forma da equação diferencial dada e à mudança de variável proposta, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = 8t - 4y + 3 = w,$$

pelo que podemos escrever a equação diferencial da seguinte forma

$$\frac{dw}{dt} = 8 - 4w. \tag{2.33}$$

Esta equação diferencial é uma equação de variáveis separáveis, resultando, para $w(t) \neq 2$,

$$\frac{1}{2-w} dw = 4dt \Leftrightarrow -\ln|2-w| = 4t + c_1 \Leftrightarrow \ln|2-w| = -4t - c_1.$$

Uma vez que $w(x) = 2$ também é a solução da equação (2.33), obtém-se a família de soluções

$$2 - w = ce^{-4t}.$$

Portanto, atendendo a que $w = 8t - 4y + 3$, obtemos a família de soluções

$$-8t + 4y - 1 - ce^{-4t} = 0.$$

Finalmente, para averiguar se esta família de soluções verifica a equação diferencial dada, basta derivar (implicitamente) a expressão precedente em ordem a t ,

$$-8 + 4\frac{dy}{dt} + 4ce^{-4t} = 0 \Leftrightarrow 4\frac{dy}{dt} = 8 - 4ce^{-4t} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 2 - ce^{-4t},$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = 2 - (2 - w) = w = 8t - 4y + 1 + 2 = 8t - 4y + 3,$$

como se pretendia.

2.3.4 Equações diferenciais homogêneas

Consideremos agora uma classe de equações diferenciais que podem ser transformadas em equações diferenciais de variáveis separáveis através de uma mudança de variável adequada.

Definição 2.47 *A equação diferencial*

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0 \tag{2.34}$$

diz-se uma equação diferencial homogênea de primeira ordem se poder ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

e se existir uma função $g(t)$ tal que $f(t, y)$ pode ser expressa como

$$f(t, y) = g\left(\frac{y}{t}\right).$$

Portanto, concluímos que uma equação diferencial é homogênea se for da forma

$$\frac{dy}{dt} = g\left(\frac{y}{t}\right). \quad (2.35)$$

Exemplo 2.48 A equação diferencial

$$(t^2 - 3y^2) dt + 2ty dy = 0$$

é uma equação diferencial homogênea de 1ª ordem pois, considerando as funções

$$M(t, y) = t^2 - 3y^2 \quad e \quad N(t, y) = 2ty,$$

a equação diferencial pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = \frac{3y^2 - t^2}{2ty} = \frac{3\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{t}\right)} = g\left(\frac{y}{t}\right),$$

onde $g(s)$ é a função definida por $g(s) = \frac{3s^2 - 1}{2s}$.

Definição 2.49 Uma função $F(t, y)$ definida num domínio D de \mathbb{R}^2 diz-se uma função homogênea de grau n , para todo $(t, y) \in D$, se e só se

$$F(\lambda t, \lambda y) = \lambda^n F(t, y) \quad , \forall t \in I,$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $(\lambda t, \lambda y) \in D$

Exemplo 2.50 A função

$$F(t, y) = t^2 + y^2$$

é uma função homogénea de segundo grau, pois

$$F(\lambda t, \lambda y) = (\lambda t)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 (t^2 + y^2) = \lambda^2 F(t, y), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.51 Considere-se a equação diferencial

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0.$$

Se $M(t, y)$ e $N(t, y)$ são funções homogéneas do mesmo grau, então a equação diferencial é homogénea de primeira ordem.

Dem. Admitindo que $M(t, y)$ e $N(t, y)$ são funções homogéneas de grau n , tem-se

$$\begin{aligned} M(t, y) &= M\left(t, t\frac{y}{t}\right) = t^n M\left(1, \frac{y}{t}\right) \\ N(t, y) &= N\left(t, t\frac{y}{t}\right) = t^n N\left(1, \frac{y}{t}\right) \end{aligned}$$

pelo que a equação diferencial (2.34) pode-se escrever na forma

$$t^n \left[M\left(1, \frac{y}{t}\right) dt + N\left(1, \frac{y}{t}\right) dy \right] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{t}\right)}{N\left(1, \frac{y}{t}\right)}.$$

Assim, o segundo membro desta equação diferencial depende apenas de $\frac{y}{t}$, pelo que resulta

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = g\left(\frac{y}{t}\right),$$

como se pretendia. ■

Observação 2.52 Note-se que nestas condições $f(t, y)$ é uma função homogénea de grau zero.

Teorema 2.53 *Se a equação $M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, então a mudança de variável $y(t) = v(t)t$ transforma a equação diferencial dada numa equação de variáveis separáveis nas variáveis v e t .*

Observação 2.54 *A demonstração deste resultado descreve, sem perda de generalidade, o procedimento a adotar na determinação de famílias de soluções deste tipo de equações diferenciais.*

Dem. Se $M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, dado que, por hipótese, $M(t, y)$ e $N(t, y)$ são funções homogéneas de grau n , então aplicando a mudança de variável $y(t) = v(t)t$ deduz-se que

$$\begin{aligned} M(t, vt)dt + N(t, vt)dy &= 0 \Leftrightarrow \\ t^n [M(1, v)dt + N(1, v)d(vt)] &= 0 \Leftrightarrow \\ M(1, v)dt + N(1, v)d(vt) &= 0 \Leftrightarrow \\ M(1, v)dt + N(1, v)(vdt + t dv) &= 0 \Leftrightarrow \\ [M(1, v) + vN(1, v)]dt + tN(1, v)dv &= 0. \end{aligned}$$

Como a última equação é do tipo da equação (2.26), trata-se de uma equação diferencial de variáveis separáveis, pelo que, usando o fator integrante

$$\mu(t, y) = \frac{1}{t [M(1, v)dt + vN(1, v)]}$$

podemos escrever a equação diferencial anterior na forma

$$\frac{1}{t}dt + \frac{N(1, v)}{[M(1, v)dt + vN(1, v)]}dv = 0$$

e, por primitivação obtém-se, a família de soluções

$$\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{N(1, v)}{M(1, v) dt + vN(1, v)} dv = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Atendendo a que $v = \frac{y}{t}$, resulta a seguinte família de soluções da equação diferencial dada

$$\ln |t| + g(v) = c \Leftrightarrow \ln |t| + g\left(\frac{y}{t}\right) = c,$$

onde

$$g(v) = \int \frac{N(1, v)}{M(1, v) dt + vN(1, v)} dv$$

é determinada a partir das funções $M(t, y)$ e $N(t, y)$ dadas. Em alternativa, podemos partir da hipótese de que uma equação diferencial homogénea pode escrever-se na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

onde

$$f(t, y) = g\left(\frac{y}{t}\right),$$

ou seja, $f(t, y)$ é uma função homogénea de grau zero.

Assim, substituindo $y(t) = tv(t)$ na equação diferencial obtém-se

$$\frac{d}{dt}(tv) = g(v) \Leftrightarrow v + t \frac{dv}{dt} = g(v) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{g(v) - v}{t}$$

que é uma equação de variáveis separáveis, tal como pretendido. ■

Capítulo 3

Equações diferenciais de ordem superior

Neste capítulo o foco é apresentar e analisar como podemos resolver algumas equações diferenciais ordinárias de ordem superior à primeira.

3.1 Equações diferenciais lineares de ordem n

Definição 3.1 *Seja I um intervalo aberto da reta real. Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n , na variável dependente y e na variável independente t , é uma equação que pode ser expressa da seguinte forma*

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = b(t), \quad (3.1)$$

onde $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas no intervalo I e $a_0(t)$ nunca se anula nesse intervalo. No caso particular em que $n = 2$, tem-se

$$a_0(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_2(t)y = b(t),$$

e assim sucessivamente.

Definição 3.2 *Uma equação diferencial ordinária não linear de ordem n , é uma equação que não pode escrever-se como em (3.1).*

Exemplo 3.3 Suponhamos que $y = y(t)$, as equações que se apresentam constituem exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem superior.

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 5y &= 0, \\ \frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{d^4y}{dt^4} - 16y &= 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ty\frac{dy}{dt} = 0$$

é um exemplo de uma equação diferencial ordinária não linear.

Observação 3.4 Nas equações diferenciais lineares temos que ter em conta que:

- (i) Quer y , quer as suas derivadas são sempre de 1º grau;
- (ii) Nunca surgem produtos de y ou das suas derivadas;
- (iii) Nunca figuram funções transcendentais de y , ou seja, a exponencial, a logarítmica, a potência, etc.

3.2 Soluções de equações diferenciais de ordem n

Sem abordar qualquer método relativo à determinação de soluções de equações diferenciais, sem perda de generalidade, convém termos presente que uma equação diferencial ordinária de ordem n (linear ou não) estabelece uma relação entre:

- (i) Algumas derivadas da variável dependente;
- (ii) A variável dependente;
- (iii) A variável independente.

Assim sendo, tal como quando existe uma relação entre as variáveis t e y , a qual podemos expressar genericamente na forma

$$f(t, y) = 0,$$

como é, por exemplo, o caso da relação

$$t^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow t^2 + y^2 - 2 = 0,$$

à qual corresponde

$$f(t, y) = t^2 + y^2 - 2,$$

o mesmo pode ser feito para representar qualquer equação diferencial ordinária de ordem n que envolva as variáveis t e y , pelo que podemos considerar

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0,$$

onde se assume que $y = y(t)$. A igualdade anterior expressa, de forma genérica, que existe uma relação entre as "variáveis" que figuram como argumento da função real F , relação essa que constitui uma equação diferencial. Assim, a cada equação diferencial corresponde uma forma particular da função F , a qual tem $n + 2$ argumentos.

Definição 3.5 *Considere-se a equação diferencial ordinária de ordem n*

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0, \quad (3.2)$$

onde F é uma função real de $n + 2$ argumentos. Diz-se que uma solução desta equação diferencial é qualquer relação implícita ou explícita entre as variáveis t e y que não contenha derivadas e que satisfaça a equação (3.2).

Exemplo 3.6 À equação diferencial de terceira ordem

$$t \frac{d^3 y}{dt^3} - y = e^{-t} \Leftrightarrow t \frac{d^3 y}{dt^3} - y - e^{-t} = 0,$$

corresponde a função

$$F \left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^3 y}{dt^3} \right) = t \frac{d^3 y}{dt^3} - y - e^{-t}.$$

Com este formalismo podemos abordar, de forma genérica, a solução de uma equação diferencial ordinária independentemente da forma específica da equação diferencial.

Definição 3.7 Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real, definida para todo t pertencente a um intervalo real aberto I , que tenha derivada de ordem n em I . A função f designa-se uma solução explícita da equação (3.2) no intervalo I sse satisfaz as condições:

- (i) $F \left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n} \right)$ está definida para todo $t \in I$;
- (ii) $F \left(t, f, \frac{df}{dt}, \dots, \frac{d^n f}{dt^n} \right) = 0$, para todo $t \in I$.

Exemplo 3.8 A função $f(t) = \sin t$ é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

De facto, uma vez que as funções

$$f(t) = \sin t,$$

$$f'(t) = \cos t,$$

$$f''(t) = -\sin t,$$

estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, então substituindo y por $f(t)$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$ por $f''(t)$ em (3.3), obtém-se a identidade

$$(-\sin t) + (\sin t) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

a qual é válida para todo o real. Portanto, podemos afirmar que $f(t)$ é uma solução explícita da equação diferencial (3.3) para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Em seguida apresentamos o Teorema da existência e unicidade da solução de um PVI linear de ordem superior. Com este formalismo podemos abordar, de forma genérica, a solução de uma equação diferencial ordinária independentemente da forma específica da equação diferencial.

Teorema 3.9 *Consideremos a equação (3.1). Se as funções $a_i(t)$, com $i = 0, \dots, n$ e $b(t)$ são funções contínuas num intervalo I e $a_n \neq 0$, para todo $t \in I$, e se $t_0 \in I$, então existe uma única solução da equação linear (3.1) no intervalo I , que verifica as condições iniciais*

$$y(t_0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(t_0) = y_1, \dots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(t_0) = y_{n-1}. \quad (3.4)$$

3.3 Equações diferenciais lineares homogêneas de ordem n

Nesta seção vamos estudar equações diferenciais lineares homogêneas de ordem n , isto é, equações diferenciais lineares da forma

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t) y = 0, \quad (3.5)$$

onde as funções a_i , com $i = 0, \dots, n$, são contínuas em I e $a_0(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Teorema 3.10 *A função nula é solução de qualquer equação diferencial linear homogênea de ordem n .*

Teorema 3.11 *Um problema do valor inicial associado a uma equação diferencial linear homogénea de ordem n tem solução única.*

Teorema 3.12 *Sejam $y_i(t)$, com $i = 1, \dots, n$, n soluções da equação diferencial (3.5) então*

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t),$$

onde c_1, c_2, \dots, c_n são constantes arbitárias, é ainda uma solução da equação diferencial (3.5).

Definição 3.13 *Se $y_i(t)$, com $i = 1, \dots, n$, são n funções dadas e c_1, c_2, \dots, c_n são n constantes, então a expressão*

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

designa-se uma combinação linear das funções $y_i(t)$, com $i = 1, \dots, n$.

Assim da Definição 3.13 e do Teorema 3.12 obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.14 *Qualquer combinação linear de soluções da equação diferencial linear homogénea (3.5) é ainda uma solução dessa equação diferencial.*

Teorema 3.15 *A equação diferencial linear homogénea de ordem n (3.5) tem sempre n soluções linearmente independentes e se $y_i(t)$, com $i = 1, \dots, n$, são n soluções linearmente independentes da equação (3.5), num intervalo aberto I , então toda a solução da equação (3.5) pode ser expressa como uma combinação linear*

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t),$$

para todo $t \in I$.

Podemos assim salientar que dada uma equação diferencial linear homogênea de ordem n , existe um conjunto de n soluções linearmente independentes. Garantida a existência desse conjunto e sem perda de generalidade, o teorema estabelece que qualquer solução da equação diferencial (3.5) pode ser escrita como combinação linear de quaisquer n soluções linearmente independentes, escolhendo de forma adequada as constantes que constam na combinação linear.

Definição 3.16 *Uma equação diferencial linear de segunda ordem diz-se homogênea se puder ser escrita na forma*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_2(t) y = 0. \quad (3.6)$$

Observação 3.17 *O traço característico desta equação consiste no facto de ser linear na função desconhecida y e nas suas derivadas, enquanto $a_1(t)$ e $a_2(t)$, podem ser quaisquer funções dadas de t . As funções $a_1(t)$ e $a_2(t)$ denominam-se os coeficientes das equações.*

Corolário 3.18 *Qualquer combinação linear de duas soluções da equação diferencial linear homogênea (3.6) num intervalo I , é novamente uma solução da equação anterior.*

3.4 Equações diferenciais lineares homogêneas de coeficientes constantes

Os conteúdos deste capítulo tem por base as referências bibliográficas [8], [5] e [11].

Definição 3.19 *Uma equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes é uma equação da forma*

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \quad (3.7)$$

onde a_i , com $i = 0, \dots, n$ são constantes reais e $a_n \neq 0$. No caso particular em que $n = 2$, tem-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \quad (3.8)$$

com a_1 e a_0 constantes reais, num intervalo aberto I , é uma solução $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, com y_1 e y_2 soluções de (3.8) em I e c_1, c_2 constantes arbitrárias.

Teorema 3.20 *Sejam y_1, y_2, \dots, y_n n soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogénea de ordem n (3.7). Se y é solução de (3.7), então existem n constantes c_i com, $i = 0, \dots, n$ tais que*

$$y(t) = c_0 y_0(t) + c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t). \quad (3.9)$$

Os próximos resultados são para o caso particular das equações diferenciais de 2.^a ordem.

Suponhamos que t varia num intervalo I . Uma solução de uma equação diferencial de segunda ordem linear ou não num intervalo aberto $]a, b[$ é uma função $y = h(t)$ que tem derivadas $\frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dt}$ e $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2h}{dt^2}$ e satisfaz a equação diferencial para todo t no intervalo I .

Definição 3.21 *A solução geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem (3.8), é uma solução $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, com y_1 e y_2 soluções de (3.8) em I e c_1, c_2 constantes arbitrárias.*

Consideremos a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de 2.^a ordem à equação (3.8), vejamos em que condições a função exponencial $y(t) = e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$,

é solução da equação (3.8). Derivando duas vezes e substituindo na equação obtém-se

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0. \quad (3.10)$$

Como a equação (3.10) é equivalente à equação

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (3.11)$$

designada por equação característica, então podemos afirmar que $y(t) = e^{\lambda t}$ é solução da equação (3.8) se e só se λ é raiz da equação característica.

Como sabemos, a equação (3.11) tem duas raízes reais distintas se e só se $b^2 - 4ac > 0$, uma raiz dupla se e só se $b^2 - 4ac = 0$ e um par de raízes complexas conjugadas se e só se $b^2 - 4ac < 0$. Vejamos o que acontece em cada um dos casos:

(i) Raízes reais distintas

Neste caso, a equação característica tem duas raízes reais

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logo, a solução geral da equação diferencial (3.8) é

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

com $t \in \mathbb{R}$ e c_1 e c_2 constantes reais.

(ii) Raiz dupla

Neste caso, a equação característica tem uma raiz dupla

$$\lambda = -\frac{b}{2a},$$

logo a solução geral da equação diferencial (3.8) é

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t},$$

com $t \in \mathbb{R}$ e c_1 e c_2 constantes reais.

(iii) Raízes complexas conjugadas

Neste caso, a equação característica tem um par de raízes complexas conjugadas, que pode ser escrito na forma

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i \vee \lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

com α e β reais positivos. Então, a solução geral da equação diferencial (3.8) é

$$y(t) = e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)].$$

Exemplo 3.22 *Considere o PVI*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0, \text{ com } t > 0, y(0) = -1 \quad e \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0.$$

Dado que equação característica associada à equação diferencial é

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 2,$$

pelo que admite duas raízes reais distintas, pode concluir-se que e^t e e^{2t} são as duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de segunda ordem dada, portanto a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Considerando as condições iniciais do PVI, determina-se o valor das constantes c_1 e c_2 e obtém-se

$$y(t) = e^t - 2e^{2t}.$$

3.5 Equações diferenciais não homogéneas de ordem n

Nesta secção vamos estudar equações diferenciais lineares não homogéneas de ordem n de coeficientes constantes com $b(t) = \xi$, onde ξ é uma constante não nula, isto é, equações diferenciais da forma

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + p_1 \frac{dy}{dt} + p_0 y(t) = \xi, \quad (3.12)$$

Teorema 3.23 *Se y_H é a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada a (3.12) e y_p é uma solução particular da equação diferencial não homogénea, então a solução geral da equação diferencial (3.12) é dada por*

$$Y(t) = y_H(t) + y_p(t).$$

Exemplo 3.24 *Verificar que $y_p = e^{2t}$ é uma solução particular da equação diferencial*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} - 4y = -3e^{2t}$$

e seguidamente escrever a solução geral. Calculando a primeira e segunda derivadas da solução particular $y_p = e^{2t}$ obtém-se

$$\frac{dy_p}{dt} = 2e^{2t} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 y_p}{dt^2} = 4e^{2t}.$$

Substituindo na equação diferencial tem-se

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} - 4y = 4e^{2t} - 3e^{2t} - 4e^{2t} = -3e^{2t},$$

pelo que fica provado que $y_p = e^{2t}$ é uma solução particular da equação diferencial dada.

Em seguida vamos procurar a solução geral da equação homogénea associada, isto é, a

solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0.$$

Como a equação característica associada à equação diferencial é

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

e as suas raízes são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$, então a solução geral da equação homogénea associada é

$$y_H(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t}.$$

Portanto, pelo teorema anterior, a solução geral da equação diferencial não homogénea é

$$Y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} + e^{2t},$$

com c_1 e c_2 constantes reais.

Capítulo 4

Sistemas de equações diferenciais de 1.^a ordem

4.1 Introdução aos sistemas de equações diferenciais

Este capítulo foi elaborado tendo por base os conteúdos das referências bibliográficas [8], [10] e [12].

No que se segue quando nos referimos a um sistema estamos, obviamente, a referimo-nos a um sistema de equações diferenciais.

Consideremos a equação diferencial linear de segunda ordem homogénea de coeficientes constantes na variável x , que depende de t ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0. \quad (4.1)$$

Fazendo a mudança de variável $\frac{dx}{dt} = y$ tem-se $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$ e substituindo na equação (4.1) obtemos o sistema de duas equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -qx - py. \end{cases} \quad (4.2)$$

O qual se escreve na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Desta forma, a resolução de uma equação do tipo (4.1) reduz-se à resolução de um sistema linear de duas equações diferenciais de primeira ordem.

Um dos métodos para resolver este tipo de sistemas de equações diferenciais lineares é o denominado método de eliminação, que consiste em eliminar as incógnitas, uma de cada vez, até obtermos uma equação com uma só incógnita. Vejamos a sua aplicação no seguinte exemplo.

Exemplo 4.1 *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases} \quad (4.4)$$

A partir da segunda equação obtemos

$$x = \frac{dy}{dt} - y \quad (4.5)$$

e, portanto, temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}. \quad (4.6)$$

Substituindo agora na primeira equação obtemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 3 \left(\frac{dy}{dt} - y \right) - y = 3 \frac{dy}{dt} - 4y, \quad (4.7)$$

deste modo, eliminamos a variável x e para chegarmos à solução do sistema basta resolvermos a equação diferencial linear de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + 4y = 0.$$

Como a equação caraterística associada à equação diferencial é dada por $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

e

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2,$$

ou seja, a equação caraterística tem uma única raiz, com multiplicidade 2, tem-se que a solução geral é dada por

$$y_H(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}.$$

Donde se tem que

$$\frac{dy}{dt} = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t},$$

logo a solução geral da equação diferencial (4.5) é dada por

$$x(t) = \frac{dy}{dt} - y = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2tc_2 e^{2t} - c_1 e^{2t} - c_2 t e^{2t} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + c_2 t e^{2t} = (c_1 + c_2) e^{2t} + c_2 t e^{2t}.$$

Então, a solução do sistema é

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2) e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \\ y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \end{cases} \quad (4.8)$$

sendo c_1 e c_2 constantes a determinar pelas condições iniciais do sistema.

4.2 Sistemas de equações diferenciais lineares de 1.^a ordem

Definição 4.2 Um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem definido

por

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

onde a_{ij} e f_i com $i, j = 1, \dots, n$, são funções, diz-se **homogêneo** se e só se as funções f_i , são identicamente nulas. Caso contrário diz-se **não homogêneo**.

Qualquer sistema linear de n equações diferenciais de primeira ordem pode ser escrito sob a forma matricial. Para tal, considere-se $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]$, com $i, j = 1, \dots, n$, a matriz dos coeficientes e definam-se os vetores coluna $\mathbf{x} = [x_i]$ e $\mathbf{f}(t) = [f_i(t)]$, pelo que o sistema (4.9) escreve-se na forma matricial como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \quad (4.10)$$

Teorema 4.3 Admita-se que as funções a_{ij} e f_i , com $i = 1, \dots, n$, são contínuas num intervalo I contendo t_0 . Então, dados n números reais b_i , com $i = 1, \dots, n$, o sistema (4.9) tem uma única solução satisfazendo as condições iniciais

$$x_1(t_0) = b_1, x_2(t_0) = b_2, \dots, x_n(t_0) = b_n.$$

Exemplo 4.4 Verificar que as funções vetoriais definidas por

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$$

são soluções do sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dado que

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12e^{2t} - 6e^{2t} \\ 18e^{2t} - 14e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}$$

e, do mesmo modo,

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-5t} - 9e^{-5t} \\ 6e^{-5t} - 21e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5e^{-5t} \\ -15e^{-5t} \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{x}_2}{dt},$$

então podemos afirmar que ambos os vetores são solução do sistema dado.

No resultado seguinte estabelece-se que uma combinação linear de n soluções do sistema é ainda uma solução do sistema.

Teorema 4.5 *Sejam c_1, c_2, \dots, c_n n constantes e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ n soluções do sistema linear homogéneo*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad (4.11)$$

definidas num intervalo I . Então a combinação linear

$$x(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_p\mathbf{x}_p. \quad (4.12)$$

também é solução do sistema (4.11).

Definição 4.6 *Considerem-se p vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ e p constantes c_1, c_2, \dots, c_p tais que*

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}. \quad (4.13)$$

Dizemos que os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ são linearmente independentes se e só se (4.13) se verifica com $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$. No caso em que existem constantes c_1, c_2, \dots, c_p , não todas nulas tais que (4.13), então os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ dizem-se linearmente dependentes.

Teorema 4.7 *Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ n soluções do sistema linear homogéneo (4.11), definidas num intervalo I . Admita-se que a matriz dos coeficientes \mathbf{A} é contínua em I . Seja*

$$W(t) = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

o determinante $n \times n$ definido por

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Portanto,

- (i) Se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ são linearmente dependentes em I , então $W = 0$ em todo o ponto de I .
- (ii) Se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ são linearmente independentes em I , então $W \neq 0$ em cada ponto de I .

Teorema 4.8 *Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ n soluções linearmente independentes do sistema linear homogêneo, (4.11) definidas num intervalo I . Admita-se que a matriz dos coeficientes $\mathbf{A}(t)$ é contínua em I . Se \mathbf{x} é solução do sistema, então existem constantes c_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, tais que*

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n.$$

4.2.1 Sistemas lineares não homogêneos

Consideremos o sistema linear não homogêneo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

o próximo teorema é análogo ao teorema para equações lineares homogêneas e indica que para encontrar a solução de um sistema linear não homogêneo devem realizar-se os seguintes passos:

1. Determinar a solução do sistema linear homogêneo associado;
2. Determinar uma solução particular do sistema linear não homogêneo.

Teorema 4.9 *Seja \mathbf{x}_p uma solução particular do sistema linear não homogêneo*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

onde $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ são funções contínuas em I . Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ n soluções linearmente independentes em I do sistema linear homogêneo associado. Se \mathbf{x} é solução do sistema não homogêneo, então existem constantes c_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, tais que

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_p,$$

para todo $t \in I$.

4.2.2 Sistemas lineares homogêneos de coeficientes constantes

Consideremos agora um caso particular dos sistemas anteriores, nomeadamente os sistemas lineares homogêneos de coeficientes constantes, ou seja, os sistemas do tipo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4.14)$$

onde $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, com a_{ij} números reais e $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Para determinarmos as soluções do sistema (4.14) é necessário começarmos por determinar quais os valores próprios da matriz \mathbf{A} , ou seja, os valores de λ que são solução da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (4.15)$$

E depois, para cada valor próprio da matriz \mathbf{A} determina-se o vetor próprio a ele associado através da resolução da equação

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \quad (4.16)$$

onde λ é o valor próprio de \mathbf{A} e \mathbf{v} o seu vetor próprio.

Assim, seja λ um valor próprio da matriz \mathbf{A} associado ao vetor próprio \mathbf{v} . Pela definição de vetor próprio, isso significa que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Seja $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$, calculemos $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$. Dado que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}e^{\lambda t}}{dt} = \lambda\mathbf{v}e^{\lambda t}$$

e como $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ temos que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t},$$

mas como $\mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{x}$, então por (4.14), concluímos que \mathbf{x} é solução do sistema. Daqui resulta o teorema que se segue.

Teorema 4.10 *Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, um valor próprio da matriz \mathbf{A} e \mathbf{v} o vetor próprio associado. Então, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ é solução do sistema linear homogêneo de coeficientes constantes (4.14).*

Consideremos que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ com $i = 1, \dots, n$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ são os valores próprios da matriz A , a cada um dos quais está associado um vetor próprio, pelo que se existem n vetores próprios linearmente independentes \mathbf{v}_i , com $i = 1, \dots, n$, então pelos teoremas anteriores obtemos n soluções do sistema linearmente independentes, $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$, com $i = 1, \dots, n$. Portanto, neste caso, a solução geral do sistema (4.14)

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$$

pode escrever-se como uma combinação linear destes vetores, ou seja, na forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

Observação 4.11 *Observe-se que os valores próprios associados à matriz \mathbf{A} podem ser um de três tipos: reais e distintos, portanto, com multiplicidade algébrica igual a 1, ou reais com multiplicidade algébrica superior a 1, ou ainda complexos. Portanto, a expressão*

da solução geral do sistema (4.14) vai depender de cada um dos tipos de valores próprios que se obtém para a matriz \mathbf{A} .

Tendo em conta os modelos que serão estudados, no que se segue, apresentamos os vários tipos possíveis que a expressão da solução geral do sistema (4.14) pode ter, para o caso particular em que $n = 2$, ou seja, para um sistema do tipo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4.17)$$

onde $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \right]^T$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, e $\mathbf{x} = (x, y)$, caso em que a matriz \mathbf{A} tem dois **valores próprios reais e distintos**, então \mathbf{A} possui dois vetores próprios linearmente independentes portanto a solução geral do sistema é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

No caso em que a matriz \mathbf{A} tem dois **valores próprios reais iguais**, então a solução geral do sistema é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v} e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} (t\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

No caso em que a matriz \mathbf{A} tem dois **valores próprios complexos e distintos**, então a matriz \mathbf{A} possui 2 vetores próprios linearmente independentes. Uma vez que a matriz \mathbf{A} é real, os valores próprios complexos aparecem em pares de valores conjugados. Consideremos que, $\lambda = a + bi$ e $\bar{\lambda} = a - bi$ são um par de valores próprios conjugados. Seja \mathbf{v} um vetor próprio associado a λ então

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = 0.$$

Considerando o conjugado complexo de \mathbf{v} tem-se

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

Logo, se $\mathbf{v} = \mathbf{w} + i\mathbf{z}$, então $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{w} - i\mathbf{z}$. Usando a Fórmula de Euler obtemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{w} + i\mathbf{z}) e^{(a+bi)t} &= (\mathbf{w} + i\mathbf{z}) e^{at} e^{ibt} = e^{at} (\mathbf{w} + i\mathbf{z}) [\cos(bt) + i \sin(bt)] = \\ &= e^{at} (\mathbf{w} \cos(bt) - \mathbf{z} \sin(bt)) + i e^{at} [\mathbf{w} \sin(bt) + \mathbf{z} \cos(bt)]. \end{aligned}$$

Assim, obtemos como as duas soluções linearmente independentes

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{at} (\mathbf{w} \cos(bt) - \mathbf{z} \sin(bt)) \text{ e } \mathbf{x}_2(t) = e^{at} [\mathbf{w} \sin(bt) + \mathbf{z} \cos(bt)].$$

Portanto, a solução complexa geral associada ao par próprio (λ, \mathbf{v}) é da forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{at} (\mathbf{w} \cos(at) - \mathbf{z} \sin(bt)) + i e^{at} (\mathbf{z} \cos(at) + \mathbf{w} \sin(bt)).$$

No caso em que os valores próprios da matriz \mathbf{A} forem **imaginários puros**, ou seja, $\lambda = \pm bi$, então obtemos a solução

$$\mathbf{x}(t) = c_1 (\mathbf{w} \cos(bt) - \mathbf{z} \sin(bt)) + c_2 (\mathbf{w} \sin(bt) + \mathbf{z} \cos(bt)).$$

Os exemplos que se seguem ilustram alguns dos casos anteriores, e foram elaborados com base nas referências bibliográficas [8] e [12].

Exemplo 4.12 *Considere-se o sistema linear*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dado que a matriz \mathbf{A} associada ao sistema é dada por $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ então, por (4.15) o polinómio característico é

$$\lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0,$$

portanto, os valores próprios são

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } \lambda_2 = -2,$$

pelo que, por (4.16) vamos obter os vetores próprios associados a cada um dos valores próprios. Assim, para o valor próprio $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que o vetor próprio associado a este valor próprio é $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

De modo análogo, para $\lambda_2 = -2$,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que o vetor próprio associado ao valor próprio é $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Donde, se conclui que a solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-\frac{t}{2}} - c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^{-\frac{t}{2}} + c_2 e^{-2t} \end{bmatrix},$$

com c_1 e c_2 constantes

Exemplo 4.13 Considere-se o seguinte sistema linear

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Como a matriz \mathbf{A} associada ao sistema é dada por $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ então, por (4.15), obtém-se os seguintes valores próprios complexos

$$\lambda_1 = -2 + 3ie \quad \lambda_2 = -2 - 3i.$$

Por (4.16), resulta que o vetor próprio associado ao par de valores próprios complexos é

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Donde se concluiu que a solução complexa é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} e^{-2+3i} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-2t} (\cos 3t + i \sin 3t) = \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-2t} \cos 3t \\ -e^{-2t} \sin 3t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -e^{-2t} \sin 3t \\ -e^{-2t} \cos 3t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, as duas soluções linearmente independentes são

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} \cos 3t \\ -e^{-2t} \sin 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} \sin 3t \\ -e^{-2t} \cos 3t \end{bmatrix},$$

logo, a solução geral do sistema é uma combinação linear destas duas soluções da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t)$$

com c_1, c_2 constantes.

Exemplo 4.14 Considere agora o seguinte sistema linear

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Neste caso tem-se, que a matriz associada ao sistema é dada por $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, pelo que, por (4.15), a solução do polinómio característico é apenas o valor próprio $\lambda = 3$, com multiplicidade 2. E, por (4.16), o correspondente vetor próprio é $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Portanto, uma solução é

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Uma segunda solução independente será da forma $\mathbf{x}_2(t) = e^{3t} (t\mathbf{v} + \mathbf{w})$, onde \mathbf{w} satisfaz

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Embora esta equação tenha muitas soluções vamos escolher a solução

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a segunda solução do sistema será da forma

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{3t}(t\mathbf{v} + \mathbf{w}) = e^{3t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} te^{3t} \\ (t+1)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Donde, a solução geral do sistema é uma combinação linear destas duas soluções, ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} te^{3t} \\ (t+1)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

com c_1, c_2 constantes.

4.3 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Na sua maioria os modelos que serão estudados são modelados por sistemas bidimensionais da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases} \quad (4.18)$$

Um sistema deste tipo designa-se por **sistema autónomo**. Suponhamos que as funções f e g são funções contínuas e diferenciáveis de classe C^1 numa região D do plano xy que designamos por **plano de fase**. Pelo Teorema da existência e unicidade da solução de um PVI, dado t_0 e um ponto (x_0, y_0) de D , existe uma única solução $x = x(t)$ e $y = y(t)$ do sistema autónomo (4.18) definida num intervalo I contendo t_0 satisfazendo as condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

As equações $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representam a parametrização das curvas solução no **plano de fase**. O traço dessas curvas designa-se usualmente por **trajetória**. Por cada ponto da região D passa uma e uma só **trajetória**.

Definição 4.15 *Um ponto crítico ou ponto de equilíbrio do sistema autónomo (4.18)*

é um ponto (x_*, y_*) tal que

$$f(x_*, y_*) = g(x_*, y_*) = 0.$$

Definição 4.16 *Seja (x_*, y_*) um ponto de equilíbrio de um sistema autónomo do tipo do sistema (4.18).*

(i) *O ponto (x_*, y_*) diz-se **estável** se e só se para qualquer ponto inicial (x_0, y_0) suficientemente próximo de (x_*, y_*) , $(x(t), y(t))$ permanece próximo de (x_*, y_*) para todo $t > 0$. Caso contrário o ponto de equilíbrio diz-se **instável**.*

(ii) *Um ponto diz-se **assintoticamente estável** se e só se toda a trajetória que se inicie suficientemente próximo de (x_*, y_*) tenda para (x_*, y_*) , quando $t \rightarrow +\infty$.*

Um caso particular dos sistemas autónomos são os sistemas autónomos lineares, ou seja, os sistemas da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (4.19)$$

que na forma matricial se representam por

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes do sistema.

Observação 4.17 *Note-se que, em qualquer sistema autónomo linear, o ponto de equilíbrio é a origem.*

O nosso objetivo é estudar as soluções particulares do sistema e de que forma se comportam na vizinhança do ponto de equilíbrio.

Como vimos anteriormente, a solução geral de um sistema homogêneo de duas equações diferenciais de primeira ordem pode ser escrita na seguinte forma

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \quad (4.21)$$

em que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, são os valores próprios da matriz \mathbf{A} e \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são os vetores próprios associados a cada valor próprio. Como base em (4.21), estudemos o comportamento da solução de \mathbf{x} na proximidade do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ que corresponde à origem das coordenadas do plano de fase.

Uma vez que a origem é o único ponto de equilíbrio, pois $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, então $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio **isolado**. Pelo facto de $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, sabemos que os valores próprios da matriz \mathbf{A} não são nulos.

Teorema 4.18 *Seja (x_*, y_*) o ponto crítico do sistema linear $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onde \mathbf{A} é uma matriz 2×2 , com valores próprios λ_1 e λ_2 . Então, tem-se:*

(i) *o ponto crítico é assintoticamente estável, se os valores próprios λ_1 e λ_2 são reais negativos ou complexos com parte real negativa.*

(ii) *o ponto crítico é estável mas não assintoticamente estável, se os valores próprios λ_1 e λ_2 são imaginários puros.*

(iii) *Finalmente, o ponto crítico é instável, se os valores próprios λ_1 e λ_2 são reais e um deles é positivo ou se ambos são complexos com parte real positiva.*

Lema 4.19 *Seja $(x_*, y_*) = (0, 0)$ um ponto equilíbrio do sistema linear (4.20). Portanto,*

(i) *Se $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$ e $\det(\mathbf{A}) > 0$, então o ponto de equilíbrio (x_*, y_*) é **estável**;*

(ii) *Se $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$ e $\det(\mathbf{A}) > 0$, então o ponto de equilíbrio (x_*, y_*) é **assintoticamente estável**;*

(iii) Se $tr(\mathbf{A}) > 0$ ou $det(\mathbf{A}) < 0$, então o ponto de equilíbrio (x_*, y_*) é *instável*.

Dem. Consideremos a matriz dos coeficientes do sistema (4.20), ou seja, a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Sendo $tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$, $det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ e λ o valor próprio associados à matriz \mathbf{A} , tem-se que o polinómio característico pode escrever-se

$$\lambda^2 - \lambda tr(\mathbf{A}) + det(\mathbf{A}) = 0$$

Então

$$\lambda = \frac{tr(\mathbf{A}) \pm \sqrt{tr^2(\mathbf{A}) - 4 det(\mathbf{A})}}{2}.$$

(i) Se $tr(\mathbf{A}) = 0$ e $det(\mathbf{A}) > 0$, então $-4 det(\mathbf{A}) < 0$ e vem que

$$\lambda = \frac{\pm \sqrt{-4 det(\mathbf{A})}}{2} = \frac{\pm \sqrt{4 det(\mathbf{A})}}{2} i,$$

ou seja, os valores próprios são imaginários puros e, pelo teorema 4.18, o ponto de equilíbrio é estável.

(ii) Se $tr(\mathbf{A}) < 0$ e $det(\mathbf{A}) > 0$, então $-4 det(\mathbf{A}) < 0$ e portanto

a) ou $tr^2(\mathbf{A}) - 4 det(\mathbf{A}) < 0$ e tem-se

$$\lambda = \frac{tr(\mathbf{A}) \pm \sqrt{tr^2(\mathbf{A}) - 4 det(\mathbf{A})}}{2} = a + bi$$

com $a \in \mathbb{R}^-$ e $b \in \mathbb{R}$, portanto, os valores próprios são complexos com parte real negativa.

b) ou $tr^2(\mathbf{A}) - 4 det(\mathbf{A}) > 0$ e como $tr^2(\mathbf{A}) - 4 det(\mathbf{A}) < tr^2(\mathbf{A})$, então

$$\lambda = \frac{tr(\mathbf{A}) \pm \sqrt{tr^2(\mathbf{A}) - 4 det(\mathbf{A})}}{2} \in \mathbb{R}^-.$$

Logo por $a)$, $b)$ e pelo teorema 4.18 (i) , o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

(iii) Se $tr(\mathbf{A}) > 0$ e $tr^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A}) > 0$, então

$$\lambda = \frac{tr(\mathbf{A}) \pm \sqrt{tr^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A})}}{2} \in \mathbb{R}$$

onde pelo menos

$$\lambda_1 = \frac{tr(\mathbf{A}) + \sqrt{tr^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A})}}{2} \in \mathbb{R}^+.$$

Portanto, pelo teorema 4.18 (iii) , o ponto de equilíbrio é instável .

Se $tr(\mathbf{A}) > 0$ e $tr^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A}) < 0$, então

$$\lambda = \frac{tr(\mathbf{A}) \pm \sqrt{tr^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A})}}{2} = a + bi,$$

com $a, b \in \mathbb{R}^+$, ou seja, a matriz A tem valores próprios complexos com parte real positiva e, pelo teorema 4.18 (iii) , o ponto de equilíbrio é instável.

Se $\det(\mathbf{A}) < 0$, então $\sqrt{tr^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A})} > |tr(\mathbf{A})| > 0$, independentemente do sinal do $tr(\mathbf{A})$. Pelo que

$$\lambda = \frac{tr(\mathbf{A}) + \sqrt{tr^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A})}}{2} \in \mathbb{R},$$

e um dos valores próprios será positivo, portanto, pelo teorema 4.18 (iii) , o ponto de equilíbrio será instável. Assim, se $tr(\mathbf{A}) > 0$ ou $\det(\mathbf{A}) < 0$, então o ponto de equilíbrio é instável. ■

Capítulo 5

Modelos Matemáticos em epidemiologia

Este capítulo foi elaborado tendo por base os conteúdos das referências bibliográficas [4] e [13].

A modelação matemática de epidemias apresenta grande relevância para a área da epidemiologia, pois possibilita uma melhor compreensão do desenvolvimento de uma doença na população e permite analisar o impacto das medidas a tomar para o controlo e de eliminação da mesma.

Os modelos matemáticos frequentemente usados na epidemiologia, permitem-nos descrever a dinâmica de doenças infecciosas. São modelos do tipo compartimental, onde cada indivíduo é "categorizado" de acordo com o seu estado de saúde. A população hospedeira é dividida em classes, categorias ou grupos. Essas categorias baseiam-se no percurso do hospedeiro infetado e na forma como a infeção se transmite. Assim, os indivíduos são divididos por categorias, onde cada uma representa o estado em que o indivíduo se encontra relativamente às diferentes fases de desenvolvimento da doença. Num modelo, as escolhas das categorias dependem exclusivamente das características de cada doença.



Figura 5.1: Dinâmica de uma infecção.

O modelo compartimental mais geral é constituído por cinco categorias designadas pelas letras M, S, E, I, R, onde M representa os indivíduos com imunidade passiva, adquirida pelos recém-nascidos através dos anticorpos que a mãe transfere para o nado vivo pela placenta. Com a extinção desses anticorpos, os indivíduos são transferidos para a classe dos suscetíveis, que representamos pela letra S. Esta classe abrange todos os indivíduos que se podem infectar.

Quando um indivíduo da classe S tem contacto com um indivíduo infeccioso, significa que o indivíduo suscetível adquire a doença, desta forma é transferido para a classe dos expostos, que no modelo é representado pela letra E. Nesta classe, os indivíduos encontram-se em fase de latência, que representa o intervalo de tempo durante o qual o indivíduo está infetado mas que ainda não é infeccioso, isto é, ainda não é capaz de transmitir a doença a um indivíduo suscetível.

Após terminada a fase de latência, o indivíduo é transferido para a classe dos infecciosos, representado no modelo pela letra I. A partir desta fase o indivíduo infetado pode infectar outros.

Finalmente, terminado o período de infecção, o indivíduo passa a pertencer à classe dos recuperados, representado pela letra R, podendo ficar permanentemente ou não imune à doença. A classe R também inclui os indivíduos que morrem devido à doença. A dinâmica de uma infecção está ilustrada na Figura 5.1.



Figura 5.2: Dinâmica de uma doença.

Os modelos matemáticos de doenças infecciosas são importantes na medida que possibilitam uma melhor compreensão de epidemias. Uma doença diz-se epidémica se forma epidemias regulares ou esporádicas. As doenças epidémicas caracterizam-se por mudanças rápidas na prevalência da infeção, com picos elevados de curta duração. Por isso, uma doença epidémica pode ou não ser endémica.

Para melhorar o entendimento e a compreensão do processo de transmissão e propagação de uma doença utilizam-se, frequentemente, modelos matemáticos epidemiológicos, os quais permitem que se atue com maior brevidade na tomada de medidas e decisões que levem ao decréscimo da transmissão da doença, uma vez que, através destes modelos, podem fazer-se estimativas de parâmetros que envolvem a doença e, dessa forma, efetuar uma previsão com maior rigor.

5.1 **Epidemiologia das doenças infecciosas**

A epidemiologia das doenças infecciosas traduz a influência de três fatores importantes: a interação entre o hospedeiro e o agente da doença, o processo de transmissão da doença e, finalmente, as características demográficas da população. O impacto da vacinação relativamente a doenças epidemiológicas é determinado pelas características da vacinação e pelos fatores anteriores.

Fazendo uma abordagem analítica, através da construção de modelos matemáticos onde se expõem explicitamente os pressupostos acerca destes três fatores determinantes

da epidemiologia, conclui-se que a análise matemática destes modelos não difere muito dos dados reais.

A epidemiologia estuda a incidência de doenças infecciosas em populações de grande dimensão. Para se compreender a propagação das doenças infecciosas nessas populações, recorreremos a modelos matemáticos, cujas conclusões são importantes e desempenham um papel fundamental na conceção dos programas de controlo de doenças infecciosas.

Embora a infeção, a patologia e a sintomatologia da maioria das doenças infecciosas sejam geralmente bem compreendidas, tal não é condição suficiente para que seja possível prever a forma como esta se vai propagar na população, pois existem fatores de incremento do grau de complexidade das investigações que impossibilitam a previsão do curso da epidemia.

5.2 A dinâmica de doenças infecciosas e o R_0

O número de pessoas infetadas por uma doença infecciosa num determinado instante, denominado a prevalência da doença, bem como o número de novos infetados por unidade de tempo, denominado a incidência da doença, variam à medida que o tempo vai decorrendo.

Quando não existe qualquer controlo sobre a infeção, a doença adquire uma dinâmica própria, como ilustra a Figura 5.2, resultando que determinadas doenças se possam tornar endémicas, com uma prevalência média curta, apresentando uma variação sazonal típica.

Existem doenças que geram uma epidemia e depois podem desaparecer. Contudo, se surgirem novos indivíduos infecciosos vindos de fora, esse fator pode gerar novamente uma epidemia. Outras doenças tornam-se endémicas e originam epidemias com uma certa

regularidade e com uma periodicidade que pode ser determinada.

De certa forma, os modelos matemáticos ajudam-nos a compreender a causa da doença e, ao mesmo tempo, conferem alguma capacidade de previsão acerca do que podemos esperar da doença infecciosa numa população.

O número básico de reprodução da doença, R_0 , desempenha um papel crucial na propagação de uma doença, pois representa o número médio de novos infetados gerados por um indivíduo infeccioso, quando este é introduzido numa população em que todos os indivíduos são suscetíveis à infeção.

R_0 é o número de contactos "adequados" tidos por um indivíduo infeccioso. R_0 é, geralmente, superior a 1 (a maioria das doenças tem um valor de R_0 entre 7 e 20), o que representa a condição necessária para que uma doença se possa propagar. No entanto, não é condição suficiente, uma vez que, numa população, nem todos os indivíduos que tiveram contacto com a doença são suscetíveis, pois alguns ficam imunes. Daí resulta que parte dos contactos de R_0 não conduzem a novas infeções. Esta é uma ideia lógica subjacente à vacinação obrigatória de certas doenças na população em geral. Um dos objetivos consiste em baixar a percentagem de suscetíveis para um nível tão baixo que o número médio de "substitutos" de cada infeccioso seja inferior a 1.

5.3 Epidemias

Os modelos matemáticos ajudam-nos a compreender a razão porque determinadas doenças endémicas originam com regularidade epidemias.

Uma epidemia só ocorre quando o número de "substitutos" é superior a 1, isto é, cada indivíduo infeccioso deixa a "substituí-lo" mais do que um infetado antes de se curar.

No decorrer de algumas epidemias, há um número significativo de suscetíveis que é "consumido" pela infeção.

Em doenças como o Sarampo, a recuperação da doença confere, só por si, imunidade à mesma, pelo que a certa altura os suscetíveis à infeção começam a escassear. Um infeccioso começa a ter dificuldades em encontrar suscetíveis para o "substituírem". De salientar que R_0 , em princípio, não será alterado: os suscetíveis é que começam a diminuir. De facto, embora os suscetíveis sejam introduzidos na população pelos nascimentos, a velocidade de propagação da epidemia (medida de incidência) é, em geral, tão rápida que supera largamente a taxa de natalidade.

Quando o número de "substitutos" se torna menor que 1, a epidemia regride e a doença volta para níveis de endemismo muito baixos. Embora não seja eliminada, ela acaba por passar despercebida, devido ao pequeno número de infetados.

Com o passar do tempo, os nascimentos vão trazendo à população novos suscetíveis, os quais aumentam lentamente, ao ritmo da natalidade, recomeçando a criar terreno para nova epidemia. Se houver condições apropriadas, o número de substitutos torna-se, súbitamente, muito elevado, originando uma nova vaga epidémica.

A existência destas oscilações na incidência da doença, conhecidas por epidemias, demonstra-se matematicamente, sendo possível prever a sua periodicidade.

As doenças endémicas em que o "consumo" de suscetíveis decorre de uma forma lenta e/ou contínua, como é o caso de doenças com R_0 baixo, doenças com portadores crónicos ou doenças em que a recuperação da doença não confere imunidade à mesma (infeções bacterianas), não devem gerar oscilações periódicas regulares.

5.4 Conceitos Básicos

Numa população de grande dimensão, a transferência de indivíduos entre classes é um fenómeno contínuo, sendo por isso possível representar matematicamente a variação do número de indivíduos dentro de cada classe, à medida que o tempo vai avançando, por sistemas de equações diferenciais.

Estudemos a propagação e o controlo de epidemias através da população susceptível.

A propagação de uma doença depende entre muitos outros factores da forma de transmissão, da suscetibilidade, do período infeccioso e da resistência.

Começemos com o modelo de população conhecido por modelo determinístico simples. Consideremos uma dada população, cujo número total de indivíduos no instante t é $N(t)$.

Tem-se que :

- $S(t)$ representa o número de indivíduos suscetíveis, isto é, o número de indivíduos que pode ser infetado.
- $I(t)$ representa o número de indivíduos infetados na população, ou seja, os indivíduos com a doença que estão no período ativo de transmissão.
- $R(t)$ representa o número de indivíduos removidos da população por recuperação, morte ou imunidade, ou seja, os indivíduos que não podem transmitir a doença nem podem ser contagiados.

Considerando que a população total, que representamos por N , tem tamanho constante, isto é, desprezando-se os nascimentos e os fenómenos migratórios, tem-se

$$S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{constante.} \quad (5.1)$$

Além disso, as taxas de transição entre as classes são dadas por:

- $\frac{dS}{dt}$ representa a taxa de variação de suscetíveis.
- $\frac{dI}{dt}$ representa a taxa de variação de infetados.
- $\frac{dR}{dt}$ representa a taxa de variação de removidos.

As premissas que se seguem são comuns aos modelos específicos, que seguidamente apresentamos:

- (i) A doença é transmitida por contacto entre um indivíduo infetado e um indivíduo suscetível.
- (ii) Não existe período latente para a doença, por isso a doença é transmitida instantaneamente por contacto.
- (iii) Todos os indivíduos suscetíveis são igualmente suscetíveis e todos os infetados são igualmente contagiosos.
- (iv) A população em estudo é constante, não existe migração nem ocorrem nascimentos, e todas as mortes por doença são consideradas.

5.5 Modelo SI

O primeiro modelo epidemiológico que iremos apresentar, o modelo SI, é o mais simples entre os modelos epidémicos e servirá de base a muitos outros modelos.

A ideia subjacente a este modelo é a de dividir a população em dois grupos de indivíduos: os suscetíveis, $S(t)$, isto é, aqueles que ainda não foram contaminados pela doença, e os indivíduos infetados, $I(t)$, aqueles que já tiveram contacto com a doença e foram infetados. Neste modelo, o processo evolutivo dos indivíduos encontra-se esquematicamente representado na Figura 5.3.

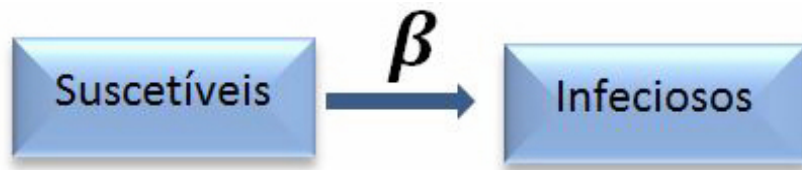


Figura 5.3: Esquema do modelo SI.

Considerando-se, tal como foi dito anteriormente, que a população em estudo tem tamanho constante, tem-se

$$S(t) + I(t) = N. \quad (5.2)$$

Este modelo baseia-se ainda na seguinte hipótese adicional: a razão da variação da população suscetível é proporcional ao número de encontros entre a população de suscetíveis e infetados. Então, o modelo SI é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t), \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $\beta > 0$ representa a taxa de transmissão da doença, isto é, o número médio de contactos entre indivíduos suscetíveis e indivíduos infetados por unidade de tempo e $\beta S(t)I(t)$ é a Lei de Ação das Massas. Assume-se ainda que S_0 e I_0 são, respetivamente, o número de pessoas suscetíveis e o número de pessoas infetadas no instante inicial, ou seja:

$$S(0) = S_0 \quad \text{e} \quad I(0) = I_0.$$

Assim, pela equação (5.2), obtém-se

$$S(0) + I(0) = S_0 + I_0 = N. \quad (5.4)$$

Neste modelo, por (5.2) e como partimos do pressuposto que a população é constante,

temos que

$$S(t) = N - I(t), \quad (5.5)$$

pelo que o sistema (5.3) pode ser reduzido ao estudo de uma única equação, isto é, a equação

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t) [N - I(t)], \quad (5.6)$$

que é conhecida como a equação de crescimento logístico. Uma vez que se trata de uma equação diferencial ordinária não linear de variáveis separáveis, então tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t) [N - I(t)] &\Leftrightarrow \frac{1}{I(t) [N - I(t)]} \frac{dI(t)}{dt} = \beta \\ \frac{1}{I(t) [N - I(t)]} dI(t) &= \beta dt, \end{aligned} \quad (5.7)$$

se $I(t) \neq 0$ e $I(t) \neq N$, o que corresponde ao caso em questão, uma vez que há apenas alguns indivíduos infectados na população. Se $I(t) = 0$, então $S(t) = N$ e todos os indivíduos estão saudáveis. Se $I(t) = N$, então todos os indivíduos estão infectados.

Integrando (5.7), para $t \geq 0$, tem-se

$$\int_0^t \frac{1}{I(s) [N - I(s)]} \frac{dI(s)}{ds} ds = \int_0^t \beta ds. \quad (5.8)$$

Dado que

$$\int_0^t \beta ds = [\beta s]_0^t = \beta t,$$

resta-nos calcular o primeiro integral. Aplicando o método dos coeficientes indeterminados tem-se

$$\frac{1}{I(s) [N - I(s)]} = \frac{A}{I(s)} + \frac{B}{N - I(s)} = \frac{AN + (-A + B)I(s)}{I(s) [N - I(s)]},$$

pelo que

$$\begin{cases} -A + B = 0 \\ AN = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{N}, \\ A = \frac{1}{N}. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{I(s)[N-I(s)]} \frac{dI(s)}{ds} ds &= \int_0^t \frac{\frac{1}{N}}{I(s)} \frac{dI(s)}{ds} ds + \int_0^t \frac{\frac{1}{N}}{N-I(s)} \frac{dI(s)}{ds} ds = \\
&= \frac{1}{N} \left[\int_0^t \frac{1}{I(s)} \frac{dI(s)}{ds} ds + \int_0^t \frac{1}{N-I(s)} \frac{dI(s)}{ds} ds \right] = \\
&= \frac{1}{N} \ln I(s) - \ln [N-I(s)]_0^t = \frac{1}{N} \left[\ln \frac{I(s)}{N-I(s)} \right]_0^t = \\
&= \frac{1}{N} \left\{ \ln \left[\frac{I(t)}{N-I(t)} \right] - \ln \left[\frac{I(0)}{N-I(0)} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{N} \ln \left[\frac{I(t)(N-I(0))}{I(0)(N-I(t))} \right].
\end{aligned}$$

Portanto, de (5.8), resulta que

$$\begin{aligned}
\ln \left[\frac{I(t)(N-I(0))}{I(0)(N-I(t))} \right] &= \beta Nt \Leftrightarrow \frac{I(t)[N-I_0]}{I_0[N-I(t)]} = e^{\beta Nt} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow I(t)[N-I_0] = I_0[N-I(t)] e^{\beta Nt} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow I(t)[N-I_0] + I_0 I(t) e^{\beta Nt} = I_0 N e^{\beta Nt} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow I(t) [N-I_0 + I_0 e^{\beta Nt}] = I_0 N e^{\beta Nt} \Leftrightarrow \\
I(t) &= \frac{I_0 N e^{\beta Nt}}{(N-I_0) + I_0 e^{\beta Nt}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I(t) = \frac{I_0 N}{I_0 + (N - I_0) e^{-\beta Nt}}. \quad (5.9)$$

Quando substituimos (5.9) diretamente em (5.5) obtém-se a expressão para $S(t)$

$$\begin{aligned} S(t) &= N - \frac{I_0 N}{I_0 + (N - I_0) e^{-\beta N t}} = \frac{N [I_0 + (N - I_0) e^{-\beta N t}] - I_0 N}{I_0 + (N - I_0) e^{-\beta N t}} = \\ &= \frac{N I_0 + N (N - I_0) e^{-\beta N t} - I_0 N}{I_0 + (N - I_0) e^{-\beta N t}} = \frac{N (N - I_0) e^{-\beta N t}}{I_0 + (N - I_0) e^{-\beta N t}} = \frac{N S_0 e^{-\beta N t}}{(N - S_0) + S_0 e^{-\beta N t}} = \\ &= \frac{\frac{N S_0 e^{-\beta N t}}{e^{-\beta N t}}}{\frac{(N - S_0) + S_0 e^{-\beta N t}}{e^{-\beta N t}}} = \frac{N S_0}{S_0 + (N - S_0) e^{\beta N t}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$S(t) = \frac{S_0 N}{S_0 + (N - S_0) e^{\beta N t}}.$$

Assim, a solução do sistema de equações (5.3), considerando as condições iniciais (5.4),

é

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{S_0 N}{S_0 + (N - S_0) e^{\beta N t}}, \\ I(t) &= \frac{I_0 N}{I_0 + (N - I_0) e^{-\beta N t}}. \end{aligned}$$

Como $I(t) = N - S(t)$ e $S(t) = N - I(t)$, então as funções anteriores podem ser reescritas na seguinte forma

$$S(t) = \frac{S_0 N}{S_0 + I_0 e^{\beta N t}}, \quad (5.10)$$

$$I(t) = \frac{I_0 N}{I_0 + S_0 e^{-\beta N t}}.$$

Dado que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I_0 N}{I_0 + S_0 e^{-\beta N t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I_0 N}{I_0 + \frac{S_0}{e^{\beta N t}}} = \frac{I_0 N}{I_0} = N$$

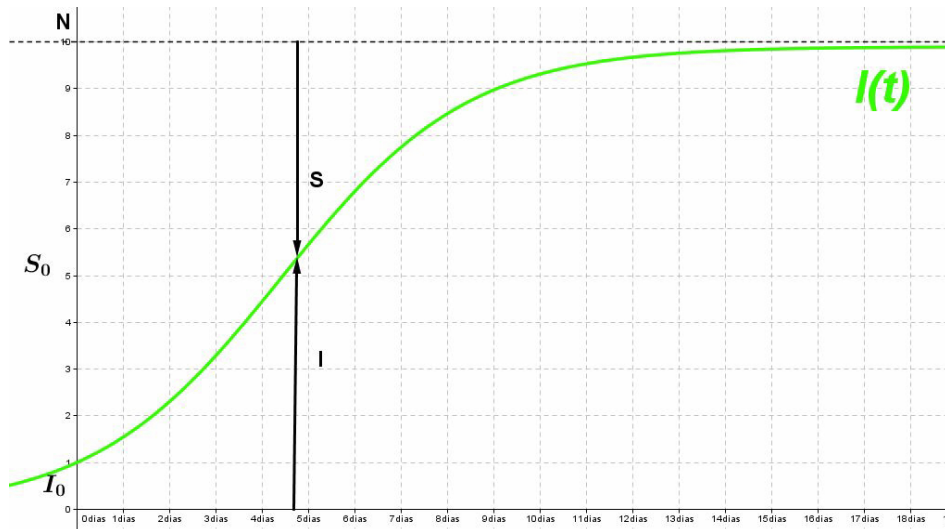


Figura 5.4: Evolução do número de suscetíveis e de infetados.

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S_0 N}{S_0 + I_0 e^{\beta N t}} = \frac{S_0 N}{+\infty} = 0,$$

conclui-se que neste modelo todos os indivíduos suscetíveis ficam infetados, surgindo assim uma epidemia. A evolução deste tipo de doença encontra-se representado na Figura 5.4. Como podemos observar na Figura 5.5, a partir do momento em que indivíduos suscetíveis contraem a doença, a epidemia inicia-se e parte-se do pressuposto que toda a população irá contrair a doença. Embora a taxa de crescimento diminua à medida que o número de indivíduos suscetíveis disponíveis na população diminui, a epidemia não pára até que toda a população contraia a doença. De salientar que os indivíduos infecciosos permanecem sempre infetados.

Em geral, os registos não mostram o número de pessoas infetadas, mas sim o número de novos casos que surgem em cada dia, que podemos considerar como sendo o registo da velocidade com que a doença se propaga na população. Assim sendo, se desenharmos

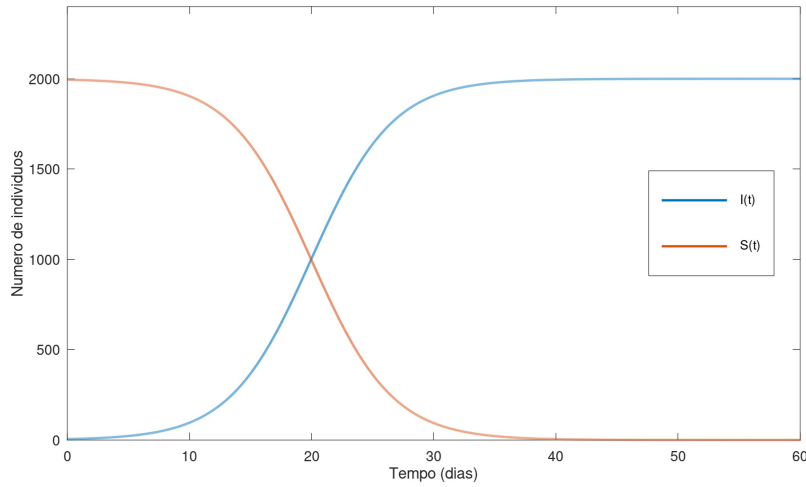


Figura 5.5: Curvas epidêmicas simples para os $S(t)$ e $I(t)$.

uma curva da taxa de variação do número de infecciosos $\frac{dI(t)}{dt}$ em função do tempo t e a taxa de variação do número de indivíduos suscetíveis $\frac{dS(t)}{dt}$ em função do tempo t , não esquecendo que $\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{dS(t)}{dt}$, obtemos uma curva conhecida como curva epidêmica.

Observemos que a curva epidêmica da Figura 5.6 é uma curva unimodal simétrica, que atinge o máximo em t_0 , onde t_0 representa o instante em que $S = I = \frac{N}{2}$. Além disso, a taxa de aparecimento de novos casos, que depende exclusivamente dos parâmetros β e N , aumenta drasticamente até atingir o valor máximo e a partir daí decresce tendendo para zero, como podemos observar na Figura 5.6.

Esse máximo obtém-se a partir da seguinte igualdade

$$\begin{aligned} I(t) = \frac{N}{2} &\Leftrightarrow \frac{I_0 N}{I_0 + S_0 e^{-\beta N t}} = \frac{N}{2} \\ &\Leftrightarrow 2N I_0 = N I_0 + N S_0 e^{-\beta N t} \\ &\Leftrightarrow N S_0 e^{-\beta N t} = 2N I_0 - N I_0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\beta N t} = \frac{N I_0}{N S_0} \Leftrightarrow -\beta N t = \ln \left| \frac{I_0}{S_0} \right| \end{aligned}$$

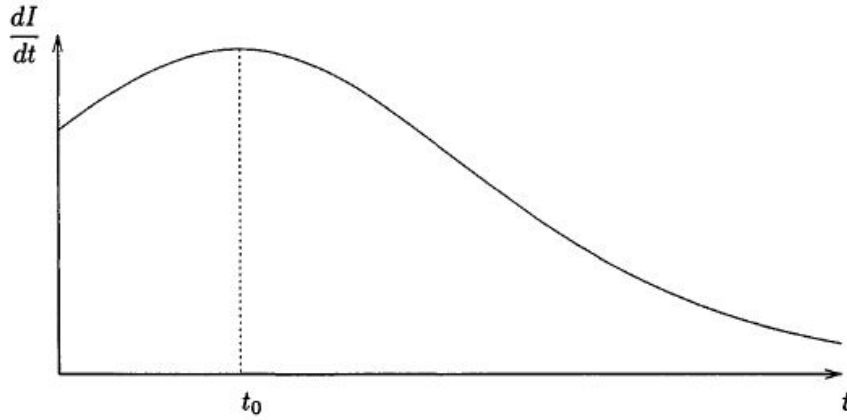


Figura 5.6: Curva epidêmica (imagem retirada de [14]).

$$\Leftrightarrow \beta N t = \ln \left| \frac{S_0}{I_0} \right| \Leftrightarrow t = \frac{1}{\beta N} \ln \left| \frac{S_0}{I_0} \right|,$$

logo, a curva atinge o máximo no instante

$$t_0 = \frac{1}{\beta N} \ln \left| \frac{N - I_0}{I_0} \right|. \quad (5.11)$$

5.6 Modelo SI melhorado

Os dados obtidos a partir de estatísticas e pesquisas nem sempre encaixam no modelo SI. Como tal, podemos melhorar o modelo *SI* estendendo a equação (5.6) da seguinte forma

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t) \left[1 - \left(\frac{I(t)}{N} \right)^p \right], \quad (5.12)$$

onde p e β são constantes.

Para tal, façamos a substituição

$$u = \left(\frac{I(t)}{N} \right)^p$$

o que implica que

$$I(t)^p = N^p \times u \Leftrightarrow I(t) = (N^p \times u)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow I(t) = N \sqrt[p]{u}.$$

Derivando u obtém-se

$$du = \frac{pI^{p-1}}{N^p} dI \Leftrightarrow du = p \left(\frac{I}{N} \right)^{p-1} \times N^{-1} dI = pu^{\frac{p-1}{p}} \times N^{-1} dI.$$

Então, podemos escrever a equação (5.12) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{p \times u^{\frac{p-1}{p}} \times N^{-1}} du &= \beta \times u^{\frac{1}{p}} \times N(1-u) dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{u^{\frac{p-1}{p}} \times u^{\frac{1}{p}} \times (1-u)} du &= \beta p N N^{-1} dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{u(1-u)} du &= \beta p dt. \end{aligned}$$

Integrando e aplicando o método dos coeficientes indeterminados obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{u(s)[1-u(s)]} \frac{du(s)}{ds} ds &= \int_0^t \beta p ds \\ \Leftrightarrow [\ln |u| - \ln |1-u|]_0^t &= \beta pt \\ \Leftrightarrow \left[\ln \left| \frac{u(s)}{1-u(s)} \right| \right]_0^t &= \beta pt \\ \Leftrightarrow \ln \left| \frac{\frac{u(t)}{1-u(t)}}{\frac{u(0)}{1-u(0)}} \right| &= \beta pt \\ \Leftrightarrow \frac{u(t)(1-u_0)}{u_0[1-u(t)]} &= e^{\beta pt} \\ \Leftrightarrow u(t)(1-u_0) &= u_0[1-u(t)] e^{\beta pt} \\ \Leftrightarrow u(t) - u(t)u_0 + u_0u(t)e^{\beta pt} &= u_0e^{\beta pt} \\ \Leftrightarrow u(t) \left(1 - u_0 + u_0e^{\beta pt} \right) &= u_0e^{\beta pt} \\ \Leftrightarrow u(t) &= \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-\beta pt}}. \end{aligned}$$

Como $u(t) = \left(\frac{I(t)}{N}\right)^p$, então substituindo na equação anterior tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{I(t)}{N}\right)^p &= \frac{\left(\frac{I_0}{N}\right)^p}{\left(\frac{I_0}{N}\right)^p + \left[1 - \left(\frac{I_0}{N}\right)^p\right] e^{-\beta pt}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{I(t)}{N}\right)^p &= \frac{\frac{I_0^p}{N^p}}{\frac{I_0^p}{N^p} + \frac{N^p - I_0^p}{N^p} e^{-\beta pt}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{I(t)}{N}\right)^p &= \frac{I_0^p}{I_0^p + (N^p - I_0^p) e^{-\beta pt}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$I(t) = \frac{N}{\sqrt[p]{1 + \left[\left(\frac{N}{I_0}\right)^p - 1\right] e^{-\beta pt}}}. \quad (5.13)$$

De modo análogo, partindo agora da equação

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) \left[1 - \left(\frac{S(t)}{N}\right)^p\right],$$

onde p e β são constantes, e usando os mesmos procedimentos que anteriormente, mas considerando agora a substituição $u(t) = \left(\frac{S(t)}{N}\right)^p$, mostra-se que a solução é

$$S(t) = \frac{N}{\sqrt[p]{1 + \left[\left(\frac{N}{S_0}\right)^p - 1\right] e^{\beta pt}}}.$$

Na Figura 5.7, representa-se a evolução do número de infeciosos ao longo do tempo, e comparam-se os gráficos dos modelos SI e SI melhorado relativamente à evolução do número de indivíduos infeciosos existentes na população.

5.7 Modelo SIS

Na tentativa de melhorar o modelo anterior introduz-se uma nova condição. Vamos considerar que, terminado o tempo após terem passado pelo período de infeção, alguns

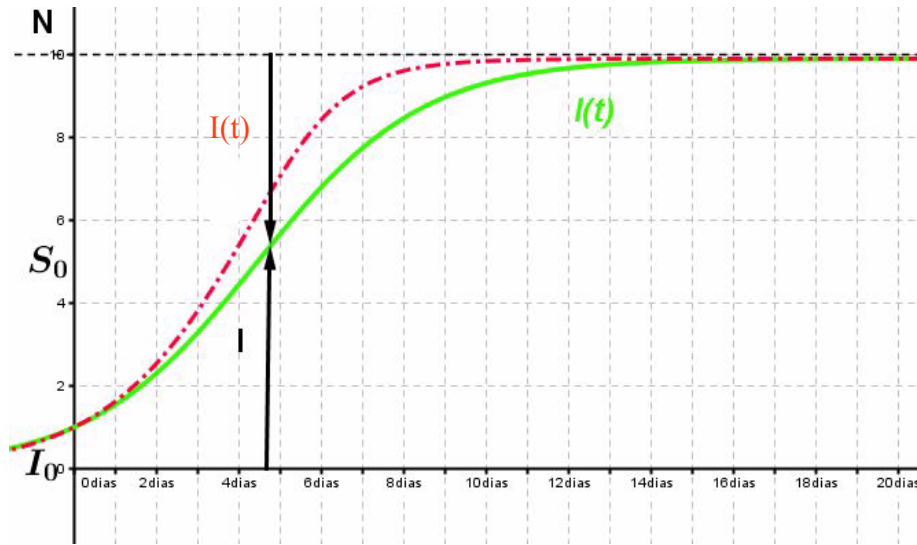


Figura 5.7: Evolução do número de infectados nos modelos SI e SI melhorado.

indivíduos da população voltam a ficar suscetíveis. Este modelo aplica-se a doenças que não conferem imunidade permanente como é o caso, por exemplo, da Gripe Sazonal. Neste modelo, à semelhança do que acontece no modelo SI , os pressupostos iniciais são os mesmos, ou seja, vamos considerar a população total, N , constante sem dinâmica vital, isto é, na população estudada não são considerados nascimentos nem mortes. Contudo, adicionalmente assume-se que um indivíduo suscetível torna-se infectado com uma taxa proporcional a SI e, de seguida, o indivíduo infectado recupera e torna-se novamente suscetível com uma taxa αI , proporcional ao número atual de indivíduos infectados $I(t)$. Portanto, as equações básicas neste modelo são dadas pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \alpha I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t), \end{cases} \quad (5.14)$$

onde α representa a taxa de indivíduos recuperados.

O processo sugerido pode ser representado esquematicamente como na Figura 5.8.

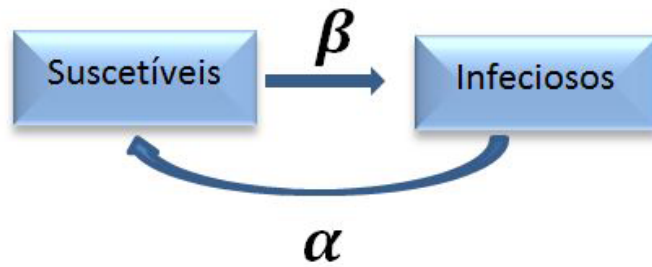


Figura 5.8: Esquema do modelo SIS.

À semelhança do modelo anterior, a partir das equações (5.14) e (5.5) obtém-se

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta [N - I(t)] I(t) - \alpha I(t) = I(t) [(\beta N - \alpha) - \beta I(t)]. \quad (5.15)$$

Considerando $k = \beta N - \alpha$, a equação (5.15) pode ser reescrita de forma mais simplificada como

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t) [k - \beta I(t)].$$

A solução desta equação é obtida de modo análogo ao que foi feito anteriormente, isto é, como se trata de uma equação diferencial ordinária não linear de variáveis separáveis, pode escrever-se na forma seguinte

$$\frac{1}{I(t) [k - \beta I(t)]} \frac{dI(t)}{dt} = 1, \quad (5.16)$$

se $I(t) \neq 0$ e $I(t) \neq N - \frac{\alpha}{\beta}$, porque se $I = 0$ então $S(t) = N$, pelo que todos os indivíduos continuam saudáveis. Se $I(t) = N - \frac{\alpha}{\beta}$, então $S = \frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{dI(t)}{dt} = 0$, portanto, não vai surgir uma epidemia

Integrando (5.16), para $t \geq 0$, tem-se

$$\int_0^t \frac{1}{I(s) [k - \beta I(s)]} \frac{dI(s)}{ds} ds = \int_0^t ds = [s]_0^t = t. \quad (5.17)$$

Agora basta determinar o primeiro integral. Pelo método dos coeficientes indeterminados tem-se

$$\frac{1}{I(s)[k - \beta I(s)]} = \frac{A}{I(s)} + \frac{B}{k - \beta I(s)} = \frac{Ak - A\beta I(s) + BI(s)}{I(s)[k - \beta I(s)]} = \frac{I(s)(B - A\beta) + Ak}{I(s)[k - \beta I(s)]}$$

donde

$$\begin{cases} B - A\beta = 0 \\ Ak = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{\beta}{k}, \\ A = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[\frac{1}{k} \frac{1}{I(s)} + \frac{\beta}{k} \frac{1}{k - \beta I(s)} \right] \frac{dI(s)}{ds} ds &= \frac{1}{k} \int_0^t \frac{1}{I(s)} \frac{dI(s)}{ds} ds - \frac{1}{k} \int_0^t \frac{-\beta}{k - \beta I(s)} \frac{dI(s)}{ds} ds = \\ &= \frac{1}{k} [\ln |I(s)| - \ln |k - \beta I(s)|]_0^t = \frac{1}{k} \left[\ln \left| \frac{I(s)}{k - \beta I(s)} \right| \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{k} \left(\ln \left| \frac{I(t)}{k - \beta I(t)} \right| - \ln \left| \frac{I_0}{k - \beta I_0} \right| \right) = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{I(t)(k - \beta I_0)}{I_0[k - \beta I(t)]} \right|. \end{aligned}$$

Assim, de (5.17), resulta que

$$\begin{aligned} \frac{I(t)(k - \beta I_0)}{I_0[k - \beta I(t)]} &= e^{kt} \Leftrightarrow I(t) (k - \beta I_0 + \beta I_0 e^{kt}) = k I_0 e^{kt} \\ \Leftrightarrow I(t) (k - \beta I_0 + \beta I_0 e^{kt}) &= k I_0 e^{kt} \Leftrightarrow I(t) = \frac{k I_0 e^{kt}}{(k - \beta I_0) + \beta I_0 e^{kt}} \\ \Leftrightarrow I(t) = \frac{k I_0 e^{kt}}{(k - \beta I_0) + \beta I_0 e^{kt}} &\Leftrightarrow I(t) = \frac{e^{kt}}{\frac{k - \beta I_0}{k I_0} + \frac{\beta I_0 e^{kt}}{k I_0}} \\ \Leftrightarrow I(t) = \frac{e^{kt}}{\frac{\beta (e^{kt} - 1)}{k} + \frac{1}{I_0}}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução desta equação, para $I(t) \neq 0$ e $I(t) \neq N - \frac{\alpha}{\beta}$, é

$$I(t) = \frac{e^{kt}}{\frac{\beta}{k} (e^{kt} - 1) + \frac{1}{I_0}}. \quad (5.18)$$

A solução de $S(t)$ determina-se de modo análogo. Do sistema de equações (5.14) tem-se que

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t) \left[S(t) - \frac{\alpha}{\beta} \right], \quad (5.19)$$

a qual, por (5.3), pode reescrever-se como

$$\frac{dS(t)}{dt} = [S(t) - N] [\beta S(t) - \alpha] \Leftrightarrow \frac{1}{[S(t) - N] [\beta S(t) - \alpha]} dS(t) = dt,$$

se $S(t) \neq N$ e $S(t) \neq \frac{\alpha}{\beta}$.

Integrando tem-se

$$\int_0^t \frac{1}{[S(u) - N] [\beta S(u) - \alpha]} \frac{dS(u)}{du} du = \int_0^t du = t. \quad (5.20)$$

Dado que

$$\frac{1}{[S(u) - N] [\beta S(u) - \alpha]} = \frac{A}{S(u) - N} + \frac{B}{\beta S(u) - \alpha},$$

então, pelo método dos coeficientes indeterminados, vem

$$\begin{cases} A\beta + B = 0 \\ -A\alpha - BN = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A\beta \\ -A\alpha + A\beta N = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A\beta \\ A = \frac{1}{\beta N - \alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{\beta}{\alpha - \beta N}, \\ A = -\frac{1}{\alpha - \beta N}. \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left[\frac{-1}{\alpha - \beta N} \frac{1}{S(u) - N} + \frac{\beta}{\alpha - \beta N} \frac{1}{\beta S(u) - \alpha} \right] \frac{dS(u)}{du} du & (5.21) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta N} \int_0^t \frac{-1}{S(u) - N} \frac{dS(u)}{du} du + \frac{1}{\alpha - \beta N} \int_0^t \frac{\beta}{\beta S(u) - \alpha} \frac{dS(u)}{du} du \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta N} \int_0^t \frac{-1}{S(u) - N} \frac{dS(u)}{du} du + \frac{1}{\alpha - \beta N} \int_0^t \frac{\beta}{\beta S(u) - \alpha} \frac{dS(u)}{du} du \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta N} [-\ln |S(u) - N| + \ln |\beta S(u) - \alpha|]_0^t = \frac{1}{\alpha - \beta N} \left[\ln \left| \frac{\beta S(u) - \alpha}{S(u) - N} \right| \right]_0^t = \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta N} \left(\ln \left| \frac{\beta S(t) - \alpha}{S(t) - N} \right| - \left| \frac{\beta S_0 - \alpha}{S_0 - N} \right| \right) = \frac{1}{\alpha - \beta N} \ln \left| \frac{[S(t) - N] (\beta S_0 - \alpha)}{[\beta S(t) - \alpha] (S_0 - N)} \right| = \\
&= \frac{1}{k} \ln \left| \frac{[S(t) - N] \left(S_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right)}{\left[S(t) - \frac{\alpha}{\beta} \right] (S_0 - N)} \right|.
\end{aligned}$$

Assim, de (5.20), resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \ln \left| \frac{[S(t) - N] (\beta S_0 - \alpha)}{[\beta S(t) - \alpha] (S_0 - N)} \right| &= t \Leftrightarrow \frac{[S(t) - N] (\beta S_0 - \alpha)}{[\beta S(t) - \alpha] (S_0 - N)} = e^{kt} \\
&\Leftrightarrow [S(t) - N] (\beta S_0 - \alpha) = [\beta S(t) - \alpha] (S_0 - N) e^{kt} \\
&\Leftrightarrow S(t) (\beta S_0 - \alpha) - \beta S(t) (S_0 - N) e^{kt} = N (\beta S_0 - \alpha) - \alpha (S_0 - N) e^{kt} \\
&\Leftrightarrow S(t) [(\beta S_0 - \alpha) - \beta (S_0 - N) e^{kt}] = N (\beta S_0 - \alpha) - \alpha (S_0 - N) e^{kt} \\
&\Leftrightarrow S(t) = \frac{N (\beta S_0 - \alpha) + \alpha (N - S_0) e^{kt}}{(\beta S_0 - \alpha) + \beta (N - S_0) e^{kt}} \\
&\Leftrightarrow S(t) = \frac{N (\beta S_0 - \alpha) + \alpha I_0 e^{kt}}{(\beta S_0 - \alpha) + \beta I_0 e^{kt}} \\
&\Leftrightarrow S(t) = \frac{N (\beta S_0 - \alpha)}{\alpha I_0} + \frac{\alpha I_0}{\alpha I_0} e^{kt} \\
&\Leftrightarrow S(t) = \frac{\alpha I_0}{(\beta S_0 - \alpha) + \frac{\beta I_0}{\alpha I_0} e^{kt}} \\
&\Leftrightarrow S(t) = \frac{e^{kt} - \frac{N (\alpha - \beta S_0)}{\alpha I_0}}{\frac{\beta}{\alpha} e^{kt} - \frac{(\alpha - \beta S_0)}{\alpha I_0}}.
\end{aligned}$$

Sob o ponto de vista matemático, podem determinar-se os pontos de equilíbrio do sistema de equações (5.14). Dado que

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} = 0 &\Leftrightarrow I[(\beta N - \alpha) - \beta I] = 0 \\ &\Leftrightarrow I = 0 \vee (\beta N - \alpha) - \beta I = 0 \\ &\Leftrightarrow I = 0 \vee I = N - \frac{\alpha}{\beta},\end{aligned}$$

por (5.5), podemos afirmar que o sistema tem dois pontos de equilíbrio, nomeadamente os pontos $(S_1, I_1) = (N, 0)$ e $(S_2, I_2) = \left(\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

O ponto $(S_1, I_1) = (N, 0)$ é um ponto de equilíbrio instável, porque a doença propaga-se quando $I \neq 0$. No que concerne ao estudo da estabilidade do outro ponto de equilíbrio, isto é, $(S_2, I_2) = \left(\frac{\alpha}{\beta}, N - \frac{\alpha}{\beta}\right)$, consideremos a solução do sistema quando $I(t) \neq 0$ e $I(t) \neq N - \frac{\alpha}{\beta}$. Como $\beta N > \alpha$, por (5.18) e calculando o limite, temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{kt}}{\frac{\beta}{k}(e^{kt} - 1) + \frac{1}{I_0}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{kt}}{\frac{\beta}{k}e^{kt}} = \frac{k}{\beta},$$

ou seja, $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = N - \frac{\alpha}{\beta}$ e conseqüentemente $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\alpha}{\beta}$. O que nos permite concluir que a doença manter-se-á tendencialmente constante na população, quando $I(t) \neq 0$ e $S(t) \neq \frac{\alpha}{\beta}$. Neste caso dizemos que o ponto é assintoticamente estável. No caso em que $I(t) = 0$ ou $S(t) = \frac{\alpha}{\beta}$, tem-se $\frac{dS(t)}{dt} = 0$ e $\frac{dI(t)}{dt} = 0$, pelo que pode concluir-se que não vai surgir uma epidemia.

Um dos principais objectos de estudo deste modelo, consiste em determinar quais as condições necessárias para que uma doença infecciosa se transforme numa epidemia. Sabe-se que só é possível surgir uma epidemia, se o número de infetados aumentar de forma significativa, ou seja, se a taxa de indivíduos infetados for superior a zero. Assim,

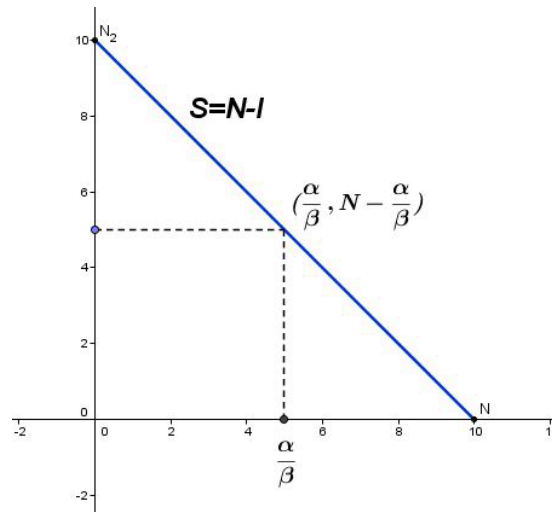


Figura 5.9: Plano de fase para o modelo SIS, com população sem dinâmica vital.

considerando o ponto de equilíbrio $I = 0$, da equação (5.15), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} > 0 &\Leftrightarrow \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\beta S(t) - \alpha) I(t) > 0. \end{aligned}$$

Como $I(t) \geq 0$, para todo o $t \geq 0$, temos

$$(\beta S(t) - \alpha) I(t) > 0 \Leftrightarrow \beta S(t) - \alpha > 0 \Leftrightarrow \beta S(t) > \alpha \Leftrightarrow \frac{\beta S(t)}{\alpha} > 1.$$

Definindo $R_0 = \frac{\beta S(t)}{\alpha}$ como o número básico de reprodução da infecção, isto é, o número de infecções secundárias causadas por um único indivíduo infetado quando introduzido numa população de indivíduos suscetíveis, tem-se que:

- (i) Se $R_0 > 1$, então estamos perante uma epidemia.
- (ii) Se $R_0 < 1$, a incidência da doença na população diminui.

Admitamos que não existe epidemia, isto é, que $S(t) = N$, pelo critério mencionado

anteriormente, temos que $R_0 < 1$, logo

$$\frac{\beta S(t)}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow N < \frac{\alpha}{\beta}.$$

Portanto, conclui-se que o número mínimo de pessoas para que exista uma epidemia é $N > \frac{\alpha}{\beta}$. Assim, no caso $R_0 < 1$, o ponto de equilíbrio $I = 0$ é estável. Caso contrário, se $R_0 \geq 1$, o ponto de equilíbrio $I = N - \frac{\alpha}{\beta}$ é estável. Estes resultados podem observar-se na Figura 5.9.

5.8 Modelo SIR

O modelo SIR descreve uma doença epidémica ou uma doença endémica. Este modelo está na base da epidemiologia moderna e na prática é ainda amplamente utilizado. O modelo SIR foi proposto por Kermack e Mckendrick, em 1927, e descreve a dinâmica de uma população que está dividida em três classes: a classe dos indivíduos suscetíveis à doença, $S(t)$, isto é, os indivíduos que ainda não se encontram contaminados, a classe dos indivíduos infetados, $I(t)$, ou seja, os que já estão contaminados pela doença, e, por último, a classe dos indivíduos removidos, $R(t)$, onde se encontram os indivíduos que recuperaram da doença, os que morreram e os que ficam em quarentena.

Na realidade, é difícil saber com antecedência quando é que um indivíduo suscetível se torna infeccioso, uma vez que só se sabe da existência da doença quando os primeiros sintomas aparecem. Quando o indivíduo infetado deixa de ser assintomático, o paciente deve ficar em isolamento profilático, sendo retirado da população. Subsequentemente o paciente poderá morrer ou recuperar da doença. No que diz respeito à transmissão da doença, a recuperação é, comparativamente, um acontecimento secundário que só acontece em alguns casos.

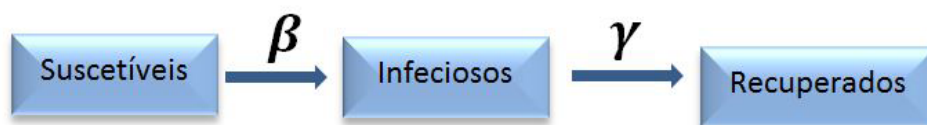


Figura 5.10: Esquema do modelo SIR.

Este modelo é um dos modelos mais populares no que concerne à modelação de doenças infecciosas, sendo que tem por base alguns dos princípios dos modelos anteriores.

Considerando, então, que a população neste modelo se encontra dividida nas três classes: $S(t)$, $I(t)$, e $R(t)$, o processo evolutivo dos indivíduos da população entre as classes está esquematicamente representado na Figura 5.10, sendo que β representa a taxa de infecção e γ a taxa de remoção.

5.8.1 Modelo de Kermack-McKendrick

Este modelo tem por base alguns dos princípios dos modelos anteriores. Vamos assumir que a dimensão da população é significativa e constante e que qualquer indivíduo infetado que tenha recuperado completamente terá imunidade permanente.

Vamos partir do pressuposto que os indivíduos que já foram infetados e recuperaram pertencem agora a uma nova classe que não é suscetível à doença. Se os indivíduos infetados são removidos da população, então a taxa de remoção, γ , é proporcional ao número de indivíduos infetados.

Nestas condições, o modelo clássico proposto por Kermack e McKendrick que pode ser

descrito pelo sistemas de equações:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t), \end{cases} \quad (5.22)$$

onde $\frac{dR}{dt}$ representa a taxa de variação dos removidos, por isolamento e/ou morte.

O estudo deste modelo, foi elaborado tendo por base os conteúdos da referência bibliográfica [5].

Consideremos que as condições iniciais no início da epidemia são

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0 > 0, \\ I(0) &= I_0 > 0, \\ R(0) &= R_0 > 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Como a população tem tamanho constante, então

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [S(t) + I(t) + R(t)] = 0, \quad (5.24)$$

Portanto, por (5.22) e (5.24), o estudo do sistema não linear vai reduzir-se a um sistema de duas equações que só dependem de $I(t)$ e de $S(t)$, sendo que a terceira variável se obtém à custa da igualdade (5.24). Assim o sistema a estudar é

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t). \end{cases} \quad (5.25)$$

À semelhança dos modelos anteriores, no início da epidemia temos como condições iniciais S_0 e I_0 . Portanto, as duas primeiras equações do sistema de equações (5.22) podem reduzir-se a uma única equação do seguinte modo:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\frac{dI(t)}{dt}}{\frac{dS(t)}{dt}} = \frac{\beta S(t)I(t) - \gamma I(t)}{-\beta S(t)I(t)} = \frac{\beta S(t) - \gamma}{-\beta S(t)} = \frac{\gamma - \beta S(t)}{\beta S(t)} = \frac{\gamma}{\beta S(t)} - 1,$$

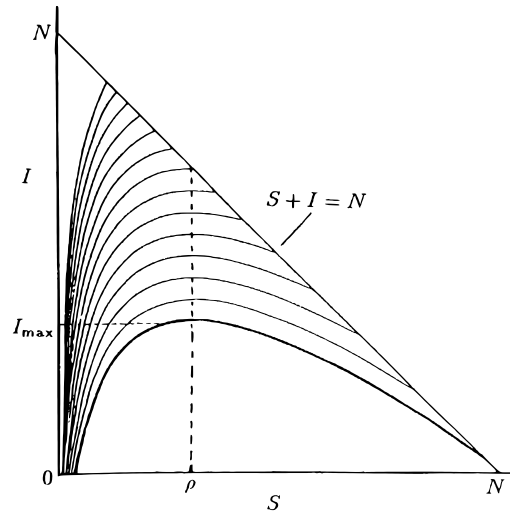


Figura 5.11: Curva epidêmica (imagem retirada de [13]).

logo,

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\gamma}{\beta S(t)} - 1 \Leftrightarrow dI = \left[\frac{\gamma}{\beta S(t)} - 1 \right] dS.$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dI(S(s))}{ds} ds &= \int_0^t \left[\frac{\gamma}{\beta S(s)} - 1 \right] \frac{dS(s)}{ds} ds \\ \Leftrightarrow [I(S(s))]_0^t &= \frac{\gamma}{\beta} \int_0^t \frac{1}{S(s)} \frac{dS(s)}{ds} ds - \int_0^t \frac{dS(s)}{ds} ds \\ \Leftrightarrow I(S) - I_0 &= \frac{\gamma}{\beta} [\ln S(t) - \ln S(0)] - [S(t) - S(0)] \\ \Leftrightarrow I(S) &= \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{S(t)}{S_0} - S(t) + S_0 + I_0. \end{aligned}$$

Considerando $\frac{\gamma}{\beta} = \rho$, o parâmetro que designa a taxa de remoção relativa ou limiar epidêmico, e as condições iniciais anteriores, onde $S_0 + I_0 = N$, temos que

$$I(S) = N - S(t) + \rho \ln \frac{S(t)}{S_0}, \quad (5.26)$$

Tentemos agora obter resultados que permitam analisar o curso de uma epidemia e de que forma podemos fazer uma previsão da mesma. Considerando que $S = N$ é solução da

equação (5.26) e que com o decorrer do tempo o número de indivíduos suscetíveis diminui, então temos que $I(S) \rightarrow -\infty$ quando $S \rightarrow 0$.

Observemos agora as propriedades do sistema (5.22) e as informações que o mesmo fornece. A partir da terceira equação do sistema (5.22) e de (5.24) vem que

$$\frac{d}{dt} [S(t) + I(t)] = -\gamma I(t) < 0, \quad (5.27)$$

pelo que, por (5.24), pode afirmar-se que

$$S(t) + I(t) < N.$$

Por outro lado, como

$$R(t) = N - S(t) - I(t),$$

isto permite-nos considerar apenas o sistema (5.24), uma vez que se trata de um sistema fechado de equações diferenciais. Olhemos então para as órbitas deste sistema. Uma vez que a partir da igualdade

$$dI = \left[\frac{\rho}{S(t)} - 1 \right] dS.$$

se obteve

$$I(S) = N - S(t) + \rho \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right), \quad (5.28)$$

e dado que a derivada de I é positiva sse $\frac{\rho}{S(t)} - 1 > 0$, isto é, sse $S < \rho$ e é negativa sse $\frac{\rho}{S(t)} - 1 < 0$, isto é, sse $S > \rho$, portanto, podemos concluir que $I(S)$ é uma função crescente se $S < \rho$ e decrescente se $S > \rho$. Isto significa que a população inicialmente infetada aumenta até atingir um valor máximo I_{\max} , quando $S = \rho$, ponto esse que designamos por o pico da doença, e em seguida diminuiu tendendo para zero, como se pode observar na Figura 5.11.

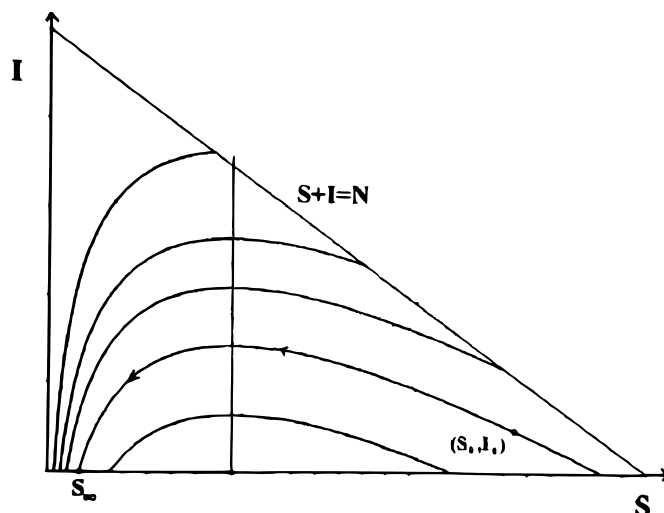


Figura 5.12: Plano de fase do modelo SI para o sistema (5.22)-(5.23) (imagem retirada [13]).

Pela equação (5.28) observamos que $I(0) = -\infty$ e $I(S_0) = I_0 > 0$. Consequentemente, pelo teorema de Bolzano, existe pelo menos um ponto S_∞ e como a função é monótona crescente neste intervalo, $0 < S_\infty < S_0$, o ponto S_∞ é único, como tal que $I(S_\infty) = 0$. Além disso, $I(S) > 0$, para todo o S tal que $S_\infty < S \leq S_0$. Observe-se que o ponto $(S_\infty, 0)$ é um ponto de equilíbrio de (5.25) uma vez que $\frac{dS}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$ se anulam quando $I = 0$.

Na Figura 5.12 podemos observar qual o curso da epidemia quando t varia de t_0 até $+\infty$. À medida que o ponto $(S(t), I(t))$ corre ao longo da curva (5.28), ele move-se no sentido decrescente de S , uma vez que $S(t)$ diminui ao longo do tempo.

A partir da primeira equação do sistema (5.22), observamos que

$$\frac{dS(t)}{dt} < 0,$$

pelo que $S(t)$ é uma função decrescente, então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_\infty. \quad (5.29)$$

Por outro lado, também podemos obter S_0 como a única raiz da equação (5.29), quando $t \rightarrow +\infty$, uma vez que

$$N - S_\infty + \rho \ln \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right) = 0, \quad (5.30)$$

onde S_∞ denota o número de suscetíveis que nunca foram infectados.

Saliente-se que podemos determinar o número de indivíduos suscetíveis em qualquer momento t , pois a partir das equações (5.22) e (5.24) deduz-se que

$$\frac{dS}{dR} = \frac{\frac{dS(t)}{dt}}{\frac{dR(t)}{dt}} = \frac{-\beta S(t) I(t)}{\gamma I(t)} = -\frac{\beta}{\gamma} S(t) = -\frac{S(t)}{\rho},$$

ou seja

$$\frac{1}{S(t)} dS = -\frac{1}{\rho} dR.$$

Donde, por integração, obtém-se

$$\begin{aligned} [\ln S(s)]_0^t &= -\frac{1}{\rho} [R(s)]_0^t \\ \Leftrightarrow \ln S(t) - \ln S_0 &= -\frac{1}{\rho} [R(t) - R_0] \\ \Leftrightarrow \ln \frac{S(t)}{S_0} &= \frac{(R_0 - R(t))}{\rho} \\ \Leftrightarrow \frac{S(t)}{S_0} &= e^{\frac{R_0 - R(t)}{\rho}}. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se

$$S(t) = S_0 \times e^{-\frac{R(t) - R_0}{\rho}} \geq S_0 \times e^{-\frac{N}{\rho}} > 0. \quad (5.31)$$

Observemos que como $S(t)$ é sempre positivo, então significa que na população irão permanecer sempre alguns indivíduos que nunca serão infectados. Em suma, quando um

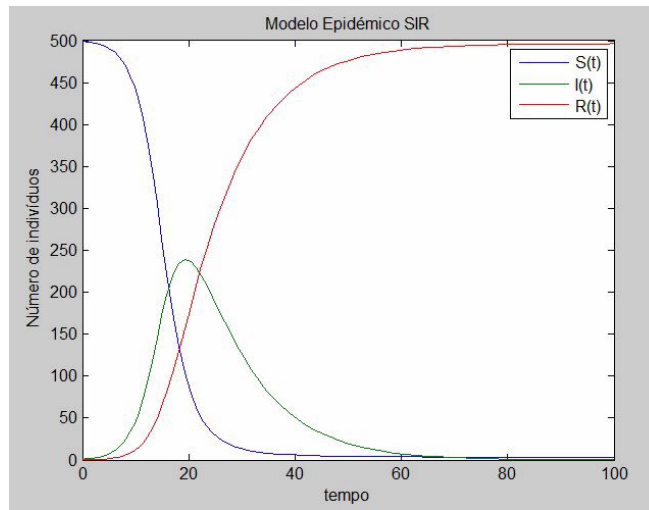


Figura 5.13: Comportamento dos indivíduos em cada classe.

pequeno grupo de indivíduos infecciosos, $I_0 > 0$, é inserido numa população de suscetíveis, nunca irá ocorrer uma epidemia.

Na Figura 5.13 apresentam-se um exemplo ilustrativo da propagação de uma doença correspondente ao modelo estudado, onde se podem observar as curvas correspondentes à evolução dos suscetíveis, infecciosos e removidos, representados respetivamente por $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$. Salienta-se ainda o facto de que nesta imagem também se localiza o pico da doença.

Capítulo 6

O Modelo epidemiológico SI aplicado VIH

Este capítulo foi elaborado tendo por base os conteúdos da referência bibliográfica [2].

Sida (síndrome da imunodeficiência adquirida), pandemia que trouxe muito sofrimento pessoal e social, bem como um incalculável número de perdas. Três décadas após a referência aos primeiros casos de Sida, cujo reconhecimento se atribui ao Centers for Disease Control and Prevention (CDC), em Atlanta. As pandemias de VIH (síndrome da imunodeficiência humana) e de Sida constituem, mundialmente, um dos problemas dominantes em saúde pública. De início, a evolução epidemiológica desta doença era imprevisível e desconhecia-se se os mecanismos clássicos de controlo das doenças infecciosas modificariam os padrões epidemiológicos observados. Hoje, com a informação obtida através dos sistemas de vigilância epidemiológica, considera-se que a pandemia VIH/Sida afeta todas as regiões do mundo, constituindo um grande problema de saúde pública, que limita o desenvolvimento demográfico e económico. A rápida expansão desta infeção traduz-se na necessidade permanente de estatísticas a nível global, a cargo da Organização Mundial de Saúde (OMS) e das Nações Unidas (UNAIDS).

VIH é caracterizado pela sua extrema variabilidade genética, diferente patogenezidade e capacidade de expansão epidémica. A heterogeneidade de VIH e as formas de transmissão vírica constituem os principais fatores responsáveis pelos padrões epidemiológicos mundiais. A identificação e o conhecimento dos fatores locais, promotores da diversidade epidemiológica, devem-se à criação de novos sistemas de vigilância epidemiológica de forma a obter a melhor caracterização das epidemias de âmbito regional, mediante o conhecimento de fatores sociais e comportamentais, permitindo a aplicação de medidas adequadas aos grupos populacionais mais afetados. Na classificação das epidemias por VIH/Sida consideram-se três padrões:

1. Epidemia em início, que se caracteriza pelos primeiros casos assintomáticos e sintomáticos terem sido diagnosticados há mais de cinco anos, cuja prevalência é inferior a 5% em diversos subgrupos populacionais e cujos casos ocorreram, predominantemente, em subgrupos com comportamentos de riscos elevados.
2. Epidemia concentrada, que se caracteriza por uma transmissão de VIH predominantemente associada a grupos social e economicamente mais desfavorecidos, e cuja prevalência da infeção é superior a 5% em, pelo menos, um subgrupo populacional.
3. Epidemia generalizada, em que na maioria da população ocorrem casos de infeção por VIH, atribuindo-se a transmissão a contactos heterossexuais, registando-se uma prevalência em mulheres grávidas superior a 1%.

A principal característica que caracteriza a diversidade dos padrões epidemiológicos refere-se à prevalência variável de VIH, ou seja, a percentagem de indivíduos infectados onde a expansão epidémica reforce a ocorrência de novos casos.

Nesse sentido, os modelos matemáticos desenvolvidos, que incluem variáveis já identificadas como de elevada importância para as projecções epidemiológicas (políticas terapêuticas, mecanismos de prevenção, modificações comportamentais, aspectos víricos reimmunitários e factores intrínsecos ao hospedeiro), não podem substituir os sistemas de vigilância epidemiológica locais, como instrumento para avaliar a progressão da pandemia.

Tendo por base os conteúdos da referência bibliográfica [16] propõe-se um modelo simplificado, para analisar, o caso de todos os seropositivos ficarem infetados por Sida.

Consideremos que, numa certa população, todos os indivíduos suscetíveis são portadores do vírus de VIH.

Partindo do presuposto que no instante inicial, $t = 0$, os indivíduos suscetíveis ainda não estão infetados, apresentando apenas os sintomas da doença. Com o passar do tempo vai existir uma parte da população, $x(t)$, que não contraiu Sida, e outra parte da população, $y(t)$, que contraiu a doença.

Embora, também neste modelo se assuma que a população é constante, ou seja, que

$$x(t) + y(t) = N, \tag{6.1}$$

agora as condições iniciais são

$$x(0) = N \quad \text{e} \quad y(0) = 0.$$

Consideremos que $\mu(t)$ é a taxa de transmissão de portadores do VIH para portadores de Sida, com $\mu(t) = kt$ ($k > 0$). Portanto, o modelo fica descrito pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\mu x \\ \frac{dy}{dt} = \mu x \end{cases} \quad (6.2)$$

com as condições iniciais $x(0) = N$ e $y(0) = 0$.

A primeira equação do sistema de equações (6.2), pode ser escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = -ktx. \quad (6.3)$$

Tratando-se de uma equação diferenciável de variáveis separáveis, integrando obtêm-se:

$$\int \frac{1}{x} dx = - \int kt dt. \quad (6.4)$$

Donde

$$\ln |x| = -\frac{kt^2}{2} + c \quad (6.5)$$

e resolvendo em ordem a x , tem-se

$$x(t) = \pm e^{-\frac{kt^2}{2} + c} \Rightarrow x(t) = Ce^{-\frac{kt^2}{2}}. \quad (6.6)$$

Considerando a condição inicial $x(0) = N$, podemos concluir que

$$x(t) = Ne^{-\frac{kt^2}{2}} \quad (6.7)$$

e substituindo a equação (6.7) na segunda equação de (6.2), obtêm-se

$$\frac{dy}{dt} = ktNe^{-\frac{kt^2}{2}} \quad (6.8)$$

pelo que

$$\int dy = \int ktNe^{-\frac{kt^2}{2}} dt. \quad (6.9)$$

Logo,

$$y(t) = -Ne^{-\frac{kt^2}{2}} + c \quad (6.10)$$

e da condição inicial vem que

$$y(t) = N - Ne^{-\frac{kt^2}{2}}. \quad (6.11)$$

Portanto, $y(t) \rightarrow N$ quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja, com o decorrer do tempo toda a população irá desenvolver a doença.

Para sabermos a que velocidade os portadores de VIH passam para portadores da Sida, determinemos os pontos críticos da segunda equação do sistema (6.12)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = kt \frac{dx}{dt} + kx \quad (6.12)$$

vem que $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, é equivalente

$$k\left(t \frac{dx}{dt} + x\right) = 0. \quad (6.13)$$

E, para $k > 0$, segue que

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}, \quad (6.14)$$

donde, pelas equações (6.3) e (6.14), obtém-se :

$$-ktx = \frac{-x}{t} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{k} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{k}}{k}. \quad (6.15)$$

Portanto, o valor máximo de variação de transmissão será determinado por

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=\frac{\sqrt{k}}{k}} = N \sqrt{\frac{k}{e}}. \quad (6.16)$$

Capítulo 7

Conclusão

Esta dissertação de mestrado teve como objetivo compreender melhor os modelos matemáticos em doenças infecciosas. Para tal realizou-se em primeiro lugar uma revisão de literatura sobre equações diferenciais e alguns modelos matemáticos de transmissão de doenças epidemiológicas.

Assim, na parte inicial desta tese, foram abordados alguns conceitos de equações diferenciais, os quais serviram de base para a análise e construção dos modelos epidemiológicos SI, SIS e SIR.

O estudo dos modelos anteriormente referidos, foi organizado de acordo com a sua complexidade. A escolha do modelo é fundamental, deve-se escolher o modelo que melhor se ajusta a uma doença infecciosa, e adequado para evitar um surto epidémico.

Embora os modelos apresentados sejam modelos compartimentais simples, eles encontram-se muito próximos da realidade. O modelo SI é um modelo em que o número de infetados aumenta exponencialmente e, à medida que o tempo vai decorrendo, os infetados deixam de encontrar indivíduos suscetíveis, fazendo com que a doença facilmente se dissipe. Portanto, com o decorrer do tempo a propagação da doença vai diminuir, dado que a maioria da população fica infetada.

No que concerne ao modelo SIS, este é um modelo que se obtém do anterior, acrescentando mais uma permissa, ou seja, supõe-se que os indivíduos infetados após recuperarem voltam a entrar na classe dos suscetíveis, podendo ficar novamente infetados. Este modelo é utilizado em algumas doenças sexualmente transmissíveis, em que não existe imunização.

Relativamente ao modelo SIR, ele inclui também o grupo dos indivíduos que recuperaram da doença, mas com a particularidade de ficarem imunes. Assim, eles são retirados da população dos suscetíveis não podendo ser infetados novamente nem transmitirem a doença. Em suma, este modelo é utilizado quando após contágio por uma doença infecciosa o indivíduo contagiado fica imune a essa doença.

Os modelos apresentados não abrangem todos os tipos de doenças infecciosas, uma vez que existem ainda vários modelos bem mais complexos, que podem ficar para um futuro aprofundamento do tema.

Em síntese, pode dizer-se que, este trabalho apenas contribuiu para o conhecimento dos modelos epidemiológicos já existentes. Dada a importância do tema, considera-se que há ainda um longo caminho a percorrer nesta área de investigação, podendo ser um tema bastante fértil para futuros trabalhos de investigação.

Bibliografia

- [1] Allman, E. S. e Rhodes, J. A., (2003), *An Introduction to Mathematical Models in Biology*, Cambridge University Press, doi:10.1017/CBO9780511790911.
- [2] Antunes, F., *Manual sobre Sida* (2011), Permanyer Portugal, 4^a edição .
- [3] Blower, S. e Bernoulli, D.,(2004), *An attempt at a new analysis of mortality caused by smallpox of advantages of inoculation to prevent it* , Rev Med Virol. 14(5), pp 275-88. doi: 10.1002/rmv.443.PMID: 15334536.
- [4] Brauer, F. e Castillo-Chavez, C., (2001), *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, New York.
- [5] Braun, M., (1992), *Differential Equations and Their Applications*, Springer, (Fourth Edition).
- [6] Bubniakova, L., (2007), *The Mathematics of infectious diseases*, dissertação não editada. Faculty of Mathematics, Physics and informatics comenius University Bratislava.
- [7] Figueiredo, J. e Ribeiro, C., (2013), *Equações Diferenciais*, repositorium-Uminho.
- [8] Logan, J. D., (2006), *A first course in differential equations*, New York, Springer.

- [9] Hethcote, H. W., (2000), *The Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM Review, Vol.42 No.4, pp. 599-653.
- [10] Hirsch, M. W. e Smale, S., (1974), *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press.
- [11] Jones, D. S. e Sleeman, B.D., (2003), *Differential Equations and Mathematical Biology*, Chapman & Hall / CRC.
- [12] Leah, E. K., (1988), *Mathematical Models in Biology*, McGraw-Hill.
- [13] Murray, J. D., (1993), *Mathematical Biology*, Springer-Verlang, Berlin.
- [14] Mazumdar, J., (1999), *An Introduction to Mathematical Physiology and Biology*, Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139173278.008
- [15] Pereira, C. e Veiga, N., (2014), *A epidemiologia de Hipócrates ao Século XXI*. Millennium, 47 (jun/dez), pp. 129-140.
- [16] Roy, M. A. e Robert, M. M., (1991), *Infections Diseases of Humans, Dynamics and Control*, Oxford University Press.
- [17] Vynncky, E. e Ricard G.W., (2010), *An introduction to Infections Diseasea Modeling*, Oxford University Press.