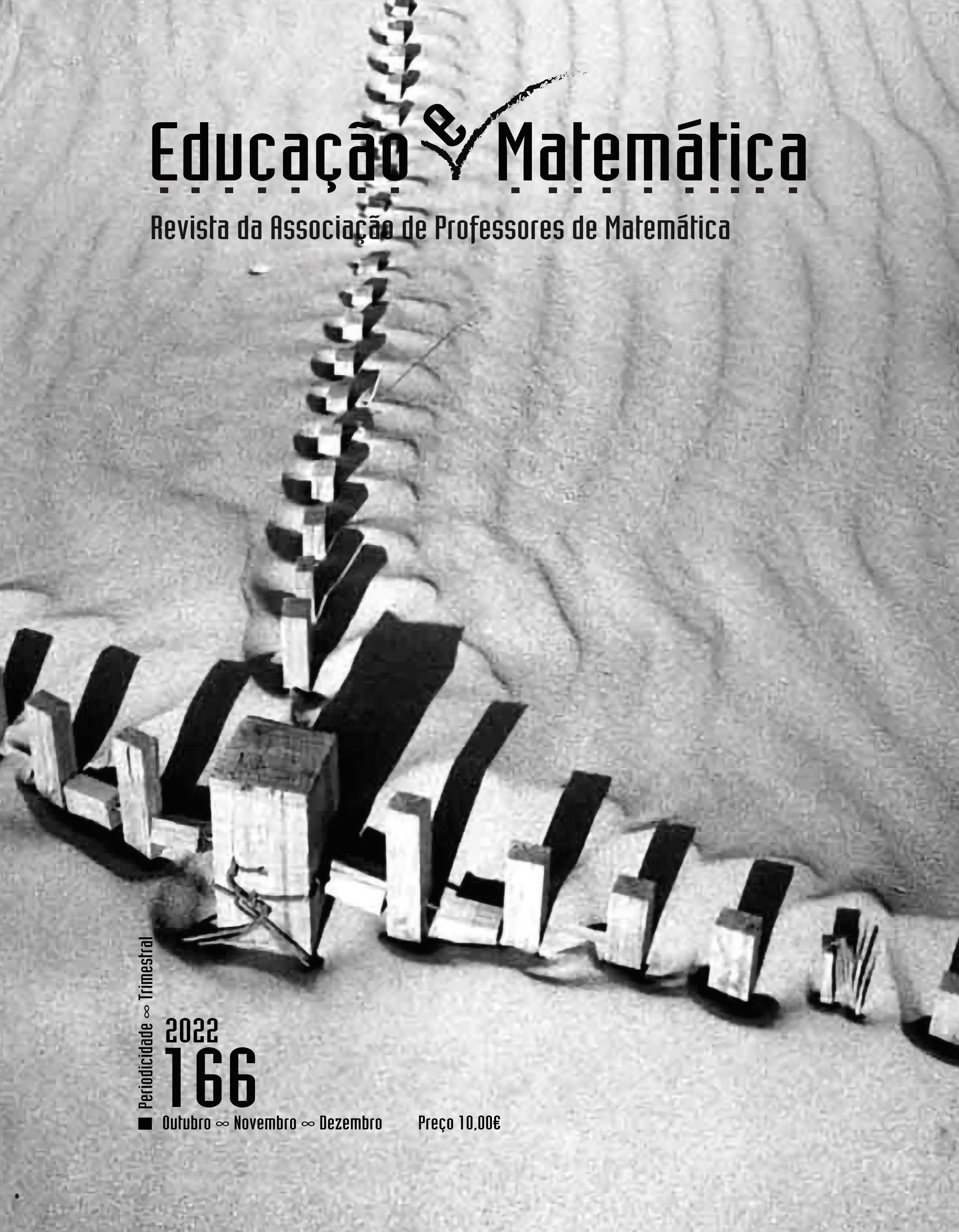


Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

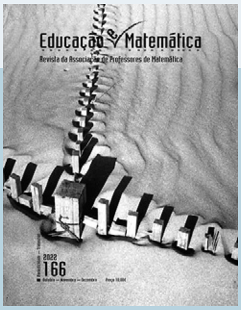
Periodicidade ∞ Trimestral

2022

166

Outubro ∞ Novembro ∞ Dezembro

Preço 10,00€



ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Helena Gil Guerreiro
Subdiretora Manuela Pires

Cristina Cruchinho
Cristina Morais
Elvira Santos
Filipa Machado
Helena Rocha
Irene Segurado
João Terroso
Lina Brunheira
Nuno Valério
Paula Gomes
Sílvia Zuzarte
Teresa Olga Duarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
José Paulo Viana **O problema deste número**
Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária e editora
Associação de Professores de Matemática
NIPC: 502006013
Sede do editor e sede da redação
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Dezembro de 2022
Tiragem 1000 exemplares
Periodicidade Trimestral
Estatuto editorial disponível em:
https://em.apm.pt/index.php/em/Estatutoeditorial

Impressão
Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
N.º ERC: 124051
ISSN online: 2795-4730
ISSN impresso: 0871-7222

Porte Pago

Sobre a capa

Sendo uma revista temática sobre Representações, a fotografia que escolhemos para a capa é ela própria uma representação do carinho, respeito e consideração que a equipa da *Educação e Matemática* quer manifestar pelo nosso amigo, colega e antigo redator, recentemente falecido, Henrique M. Guimarães. Trata-se de uma fotografia da sua autoria, tal como algumas das fotos que se encontram no caderno com que o homenageamos. As fotografias foram tiradas na praia da Amoreira, nos anos 1996 e 1997, e fazem parte da coleção "A harpa do vento", uma das coleções em que mais trabalhava ultimamente em processo de preparação para uma exposição.

O Henrique era generoso com os colegas e amigos. Oferecia conhecimento e reflexão, simpatia, alegria e entusiasmo, mas oferecia ainda algo cada vez mais escasso. Oferecia atenção. E é também essa atenção com que prescrutava os detalhes à sua volta, aqui captada pela objetiva da sua máquina, que queremos também agradecer. Obrigada, Henrique.

A equipa editorial

Sobre o número temático

A revista temática de 2022 é dedicada às Representações matemáticas, uma capacidade matemática que já tardava num número temático da *Educação e Matemática*.

Nélia Amado, a editora convidada, aceitou com determinação o nosso convite, apesar dos seus múltiplos projetos. Com grande energia e detalhe, quis, com esta revista, tornar inequívoco que uma aprendizagem da matemática com compreensão envolve, necessariamente, a articulação entre representações.

O seu entusiasmo trouxe consigo a estas páginas todos os autores que nesta revista colaboraram, e cuja escrita evidencia a importância e transversalidade desta capacidade matemática. A *Educação e Matemática* agradece a Nélia Amado a sua dedicação e entrega a este projeto de múltiplas representações, representações de ações, representações de objetos, representações de sentir e cuidar.

Muito obrigada.

A equipa editorial

Neste número também colaboraram

Ana Barbosa,Ana Paula Canavarro, António Cardoso, Cândida Tourais, Carla Faneco, Carlos Albuquerque, Célia Mestre, Cláudia Regina Flores, Cristina Martins, Elvira Santos, Fátima Alonso Guimarães, Hélia Oliveira, Helena Moreira, Hugo Almeida, Irene Martins, Isabel Guerra, Isabel Vale, Isabel Velez, Jaime Carvalho e Silva, Joana Conceição, João Pedro da Ponte, José Manuel Matos, Leonor Santos, Luís Saraiva, Lurdes Figueiral, Lurdes Serrazina, Manuel Vara Pires, Manuela Vicente, Margarida Rodrigues, Maria Madalena Dullius, Marisa Quaresma, Mónica Valadão, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro, Sandra Nobre, Sandra Raposo, Serhii Wakúlenko, Sónia Fernandes, Susana Brito, Susana Carreira, Susana Serra

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.
- As incorreções que forem detetadas na versão impressa da EeM, serão corrigidas na versão online.

Representações múltiplas numa perspetiva de *matemática para todos*

O ano letivo de 2022/23 é o ano da entrada em vigor das novas Aprendizagens Essenciais de Matemática[1] (AEM) no 1.º, 3.º, 5.º e 7.º ano do ensino básico. Este novo documento curricular marca uma mudança significativa no atual ensino e aprendizagem da matemática, voltando a assumir a perspetiva de uma *Matemática para todos*. Assim, desenvolver a capacidade de utilizar *representações múltiplas* é um dos objetivos deste documento curricular e que, pela sua importância, justifica a temática escolhida para esta revista.

As representações são naturalmente inerentes à própria natureza da matemática pelo que muitos dos nossos leitores poderão questionar porque atribuímos tanta importância a este tema. Na verdade, desde há vários anos que a investigação reconhece que o recurso exclusivo às representações formais da matemática não é suficiente para que os alunos compreendam o significado de ideias e conceitos matemáticos, razão pela qual não são capazes de os mobilizar na resolução de problemas. Devemos considerar como representações todas as ferramentas que os alunos podem usar para expressar as suas ideias e os procedimentos matemáticos que desenvolvem na resolução de uma tarefa. Estas tanto podem ser em linguagem natural, como linguagem simbólica, através de esquemas e diagramas, com ou sem recurso às tecnologias, ou recorrendo à combinação dos vários tipos. A estratégia de combinar diferentes tipos de representações, permite interconexões entre representações proporcionando aos alunos a oportunidade de visualizarem de diferentes perspetivas, mas complementares, uma mesma ideia. Esta possibilidade favorece a compreensão das ideias e conceitos matemáticos, facilita a abstração e promove a criatividade dos alunos. O recurso a múltiplas representações deve iniciar-se nos primeiros anos de escolaridade e estar presente em todos os níveis de escolaridade, incluindo o ensino secundário e superior.

Nesta revista são partilhadas experiências de recurso a representações múltiplas em todos os níveis de escolaridade, não esquecendo o recurso às tecnologias que oferecem a possibilidade de estabelecer conexões entre diferentes representações, nomeadamente, gráficas, numéricas e algébricas.

Esperamos que as experiências apresentadas neste número temático contribuam para apoiar os professores no desenvolvimento da capacidade de utilizar representações múltiplas.

Este número temático de 2022, da revista Educação e Matemática, é também um número de homenagem a Henrique Guimarães, um dos sócios fundadores da APM e uma figura de referência na Educação Matemática. Ao longo das páginas do caderno que lhe é dedicado, podemos conhecer diversas facetas da sua vida – a sua dedicação à APM, onde assumiu diversos papéis desde a sua fundação, a de professor e investigador e a de fotógrafo. Henrique Guimarães será sempre recordado pela sua capacidade de ouvir e ser ouvido por todos.

Nos últimos dias de 2022 recebemos a notícia da partida de outro sócio fundador da APM. Não posso deixar de prestar a minha homenagem ao Eduardo Veloso, meu companheiro de direção da APM, nos finais dos anos noventa, de quem guardo recordações memoráveis.

Obrigada, Eduardo e Henrique, pelo muito que nos deixaram.

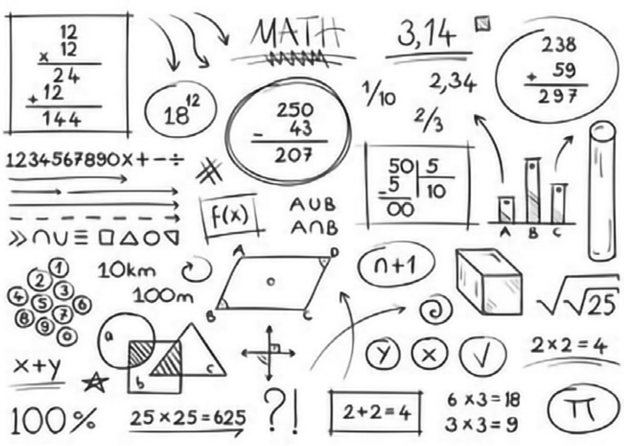
Nélia Amado
Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

[1] Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico. ME

Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática

Nélia Amado

Para alguns leitores o tema das representações, em matemática, pode parecer trivial, uma vez que aprender matemática envolve a aprendizagem de representações. De facto, desde os primeiros anos de escolaridade que os alunos aprendem representações dos números e das operações e, ao longo do percurso escolar vão ampliando os seus conhecimentos de novos símbolos matemáticos, novos números e novas operações. Outros objetos matemáticos vão igualmente surgindo, nomeadamente, as funções e limites, a derivação ou a integração, entre muitos outros. Na verdade, os alunos estão a aprender representações simbólicas próprias da linguagem da matemática.



$$x^2 \qquad e^x \qquad \frac{5}{2} \qquad \sqrt[3]{x+3}$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx \qquad log\,(4x-5)$$

$$A = \pi r^2$$

Figura 1. Exemplos de representações matemáticas

As representações matemáticas apresentadas na figura 1 traduzem ideias e conceitos matemáticos, alguns dos quais altamente sofisticados e abstratos. O conhecimento matemático é muito mais do que o conhecimento destas ideias e conteúdos em linguagem simbólica própria da matemática, implica ser capaz de as manipular, transformar e relacionar, mas acima de tudo, envolve a compreensão e o significado destas ideias e a capacidade de as mobilizar na resolução de resolução de diferentes tipos de tarefas.

Muitas das ideias e dos conceitos matemáticos que representamos em linguagem matemática são complexos e abstratos. Um dos casos bem conhecidos de todos os professores de matemática é a dificuldade dos alunos em representar e manipular números racionais. Mesmo no ensino superior, é frequente encontrar alunos com dificuldades em manipular e transformar números racionais. Aliás, não tenho dúvidas em dizer que conhecem a sua representação, porque assim que se deparam com um número representado na forma de fração ficam nervosos e angustiados. Perguntam os leitores, como é possível? É possível, porque eu tenho alunos nesta situação nas minhas aulas. Pode haver inúmeras explicações para que tal aconteça, mas uma hipótese pode ser a falta de compreensão do conceito de fração que os impede de manipular e transformar as representações matemáticas. E isso fica muito claro quando têm de realizar operações com números fracionários, nos mais variados contextos, seja no estudo de matrizes ou na resolução de um problema de programação linear.

Situação contrária acontece com os alunos que reconhecem representações múltiplas dos números racionais e são hábeis na sua manipulação e transformação, estes facilmente conseguem resolver, com elevado grau de sucesso, problemas mais complexos.

Destaco a expressão que utilizei, *representações múltiplas* porque na verdade é aqui que está o cerne da questão. Esta é uma das razões que justificam a relevância que é atribuída às representações nos currículos de muitos países, incluindo, em Portugal. O recurso a representações múltiplas é determinante para a aprendizagem matemática, razão pela qual este tema faz parte da investigação em educação matemática há várias décadas.

Estas representações múltiplas de que falarei adiante podem também ser designadas de representações externas, em oposição às representações internas, estudadas na neurociência e que não irei aprofundar aqui. Apenas quero sublinhar que a construção das representações internas, está relacionada com possíveis configurações mentais, determinantes nos processos de raciocínio, como é explicado pelo neurocientista António Damásio (2011). A construção destas configurações mentais só é possível se o aluno compreender e atribuir significado às ideias e aos conceitos estudados, mas para tal é necessário proporcionar aos alunos representações múltiplas, uma vez que o recurso exclusivo a representações matemáticas pode ser insuficiente dado o seu grau de abstração e complexidade.

AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICA NAS NOVAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

As novas Aprendizagens Essenciais de Matemática (AEM) (Canavarro et al., 2021) para o ensino básico, assim como as Aprendizagens Essenciais de matemática para o ensino secundário, que estiveram em discussão recentemente, apresentam novos desafios que prometem contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática e, consequentemente, para o sucesso dos nossos alunos ao longo da escolaridade obrigatória.

Começo por destacar as seis capacidades matemáticas transversais enunciadas nas novas AEM para o ensino básico e às quais têm sido dedicados números temáticos desta revista: resolução de problemas, o raciocínio matemático, o pensamento computacional, a comunicação matemática e representações matemáticas. Este número temático, dedicado à capacidade de usar múltiplas representações matemáticas, encerra assim este ciclo.

Esta capacidade é apresentada nas novas AEM como um dos objetivos para a aprendizagem da matemática:

> Desenvolver a capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática, e como possibilidade de apropriação da informação veiculada nos diversos meios de comunicação, nomeadamente digitais, onde surge em formatos em constante evolução. As ideias matemáticas são especialmente clarificadas pela conjugação de diferentes tipos de representação, e a compreensão plena depende da familiaridade e fluência que os alunos têm com as várias formas de representação. A tecnologia desempenha um papel especialmente relevante por facilitar a transição entre diferentes tipos de representação e análises com maior detalhe ou magnitude, inacessíveis sem os recursos tecnológicos. (AE, 2021, p. 3).

Mas do que falamos quando nos referimos a representações múltiplas em matemática?

O QUE ENTENDEMOS POR MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

Embora exista uma vasta literatura e inúmeros estudos em torno da temática das representações, Mainali (2021) apoiando-se em diversos autores define representações matemáticas, como um símbolo ou conjunto de símbolos, diagramas, objetos, imagens ou gráficos, que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem. Esta definição é bastante mais ampla do que o conceito de simbologia matemática, anteriormente referida, pois inclui a possibilidade de considerar diagramas, tabelas, objetos, imagens e gráficos para apresentar uma ideia ou um conceito matemático.

No domínio da matemática são habitualmente reconhecidos quatro modos de representação: i) verbal, ii) gráfico, iii) algébrico e iv) numérico, que podem ser utilizados isoladamente ou em interação entre si, pois o estabelecimento de conexões entre estes modos é fundamental para uma melhor compreensão da matemática.

A mesma autora aponta algumas razões que justificam a importância da utilização de múltiplas representações, no ensino e aprendizagem da matemática, como, por exemplo:

- As representações são inerentes à própria natureza da matemática. De facto, existem tópicos matemáticos que estão fortemente associados a representações, alguns dos quais não podem ser estudados sem o recurso a diferentes representações. Um exemplo, são os conceitos de função e de gráficos cartesianos que não só estão associados a várias representações, mas também ao estabelecimento de conexões entre elas.
  Na figura 2, apresentam-se três representações distintas: numérica, algébrica e gráfica cujas conexões permitem aos alunos, em simultâneo, a aprendizagem de funções e gráficos, atribuindo significado ao que se entende por calcular, por exemplo, *f*(3).

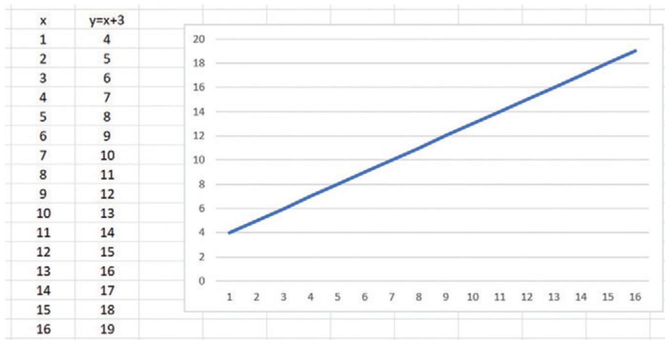


Figura 2. Representação gráfica, numérica e algébrica

- As representações permitem múltiplas concretizações de um conceito, isto é, podemos usar diferentes representações para um mesmo conceito matemático ou estrutura matemática. A utilização de múltiplas representações de um mesmo conceito permite aos alunos extrair e apreender determinadas propriedades do conceito. Por exemplo, o recurso a diferentes representações de frações permite aos alunos uma melhor compreensão do conceito e, em simultâneo, tirar conclusões sobre a equivalência de frações.

  Referi inicialmente, as dificuldades dos alunos em manipular números racionais, na verdade, o número pode não ser facilmente entendido por todos os alunos, mas se recorremos a um aplicativo (figura 3) facilmente conseguimos proporcionar ao aluno diferentes representações deste número racional.

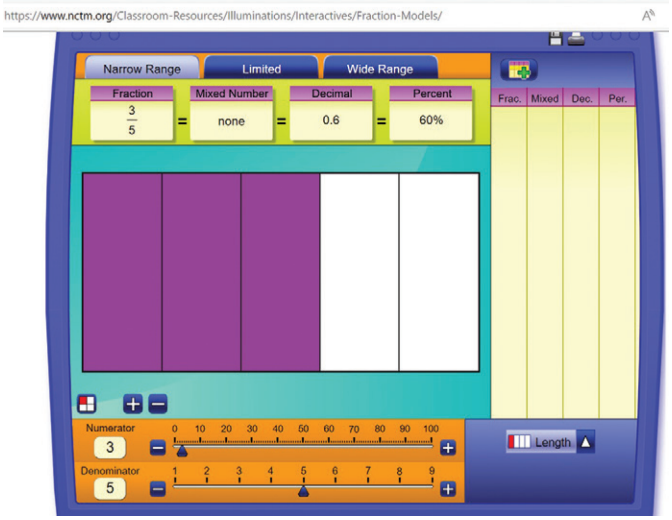


Figura 3. Fraction Models - Aplicação interativa do NCTM

- As representações podem e devem ser usadas para mitigar as dificuldades dos alunos. Na resolução de um problema ou na compreensão de um conceito o professor deve recorrer a várias representações de modo a facilitar a compreensão da situação. No exemplo da figura 3, o recurso a representações múltiplas, oferece ao aluno vários olhares sobre o mesmo objeto. Ao estabelecer conexões entre elas, poderá mais facilmente compreender não só o conceito de fração, mas as representações múltiplas do mesmo número.
- As representações permitem ainda tornar a matemática mais atraente e interessante. Por exemplo, atualmente os manuais escolares revelam um progresso significativo relativamente à utilização de múltiplas representações. Se compararmos os manuais escolares do início deste século com os atuais, facilmente reconhecemos o recurso a uma diversidade de representações em oposição ao uso, quase exclusivo, de representações simbólicas próprias da linguagem matemática.

Vários autores (p. e. Ballard, 2000) defendem que os alunos devem, desde os primeiros anos de escolaridade, contactar com representações múltiplas e estabelecer conexões entre elas. Deste modo, é necessário que os alunos, desde os primeiros anos, sejam envolvidos na construção e interpretação de diferentes modos de representação. Este envolvimento tem dois propósitos, por um lado, a utilização de diferentes representações permite uma melhor compreensão da matemática e, por outro, as representações múltiplas permitem aos alunos múltiplas formas de comunicar as ideias matemática e o raciocínio na resolução de problemas.

Também Tripathi (2008) destaca a importância da utilização de múltiplas representações ao considerar que diferentes representações permitem olhar para um conceito através de uma variedade de lentes, onde cada lente proporciona uma perspetiva diferente que torna a imagem (conceito) mais rica e mais profunda, possibilitando a cada um dos alunos uma compreensão do mesmo.

Em suma, para além da importância das múltiplas representações na compreensão de conceitos e ideias matemáticas, na resolução de problemas, no raciocínio matemático e na comunicação, é também reconhecida a sua importância no desenvolvimento de aspetos afetivos tais como a motivação e o gosto dos alunos para a aprendizagem da matemática.

AS TECNOLOGIAS COMO FACILITADORAS DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

O surgimento das tecnologias veio trazer um grande impulso à utilização de representações múltiplas. De facto, as tecnologias permitem construir representações que podem ser manipuladas tornando assim, as representações dinâmicas. O recurso à utilização da tecnologia permite que os alunos desenvolvam a compreensão de conceitos matemáticos, estabelecendo conexões entre diferentes ideias matemáticas ou entre múltiplas representações. Os ambientes tecnológicos dinâmicos possibilitam o desenvolvimento da compreensão de determinados conceitos através de conjeturas e da prova. Os alunos podem raciocinar e verificar as suas conjeturas observando os efeitos das suas interações com as representações em termos do que muda e do que não muda. Para além das calculadoras gráficas, o GeoGebra, pelo seu caracter dinâmico, possibilita representações dinâmicas e o estabelecimento de conexões entre diferentes tipos de representações, o que pode contribuir para uma melhor compreensão de diversos temas matemáticos. Ao combinar numa mesma imagem uma representação numérica, gráfica e algébrica, permite ao aluno estabelecer rapidamente conexões entre elas, facilitando assim um conhecimento mais sólido do tópico em estudo. Para além do GeoGebra ou da calculadora gráfica, temos ao dispor inúmeros aplicativos que facilitam a realização de experiências e promovem a obtenção de representações múltiplas, como o Fraction Models (nctm.org) , já referido na figura 3, ou os manipuláveis virtuais construídos no próprio GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/rps4kf84), como o da figura 4.

Figura 4. Representações de frações equivalentes num manipulável virtual do GeoGebra

Existe atualmente um grande número de aplicativos que permitem aos alunos não só manipular as representações, mas também explorar, investigar e conjeturar. Este trabalho pode ser feito, dentro ou fora da sala de aula, de acordo com o conhecimento que o professor tem dos seus alunos e do contexto. A utilização da folha de cálculo, como o Excel é outra ferramenta que facilita o recurso a representações múltiplas: numérica, gráfica ou algébrica.

Há evidências consideráveis de que o conhecimento representacional medeia a resolução de problemas complexos, promove a transferência de conhecimento para novas situações, bem como uma melhor compreensão dos conceitos.

O PAPEL DO PROFESSOR NA UTILIZAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

Ge (2012) defende que o uso de múltiplas representações deve ser organizado de forma a produzir o efeito desejado, promover as aprendizagens dos alunos. Para este autor é necessário cuidar da forma como as representações são apresentadas aos alunos e não as deixar ao acaso. O professor ao planificar as suas aulas deve ter em conta quais as representações mais adequadas para alcançar os objetivos a que se propõe, pois, cada tipo de representação tem as suas vantagens e desvantagens. É necessário que os alunos tenham conhecimento de quais as representações mais adequadas em cada tarefa.

Na resolução de problemas que envolvem a probabilidade condicionada, os professores recorrem, predominantemente, a representações na forma de tabelas. No entanto, existem problemas para os quais pode ser mais eficaz recorrer à representação na forma de um diagrama de árvore. Deste modo é importante que os professores na sua planificação incluam problemas que exigem os dois tipos de representação para chegar às representações simbólicas e resolverem os problemas com sucesso. Se os alunos recorrem sempre a tabelas (figura 5) nas suas aulas, então é pouco provável que utilizem um diagrama de árvore (figura 6), até porque desconhecem esta representação.

	S	$\overline{S}$	
R	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{R}$	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

Figura 5. Representação através de uma tabela

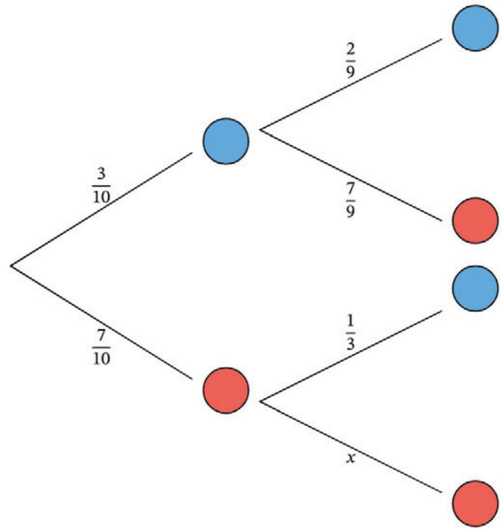


Figura 6. Representação através de um diagrama de árvore

AS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS NA AVALIAÇÃO FORMATIVA

As novas AEM para o ensino básico destacam a importância da avaliação formativa, referindo que esta prática "continuada contribui de forma muito expressiva para as aprendizagens dos alunos, pelo que é imperioso o seu desenvolvimento na aula de Matemática" (p. 7).

A avaliação formativa é um processo que envolve a recolha de informação sobre as aprendizagens dos alunos com vista à tomada de decisões sobre o ensino, ou seja, é um processo que informa sobre os níveis de compreensão. A avaliação formativa deve envolver uma diversidade de métodos de recolha de informação de modo a permitir ao professor aceder ao pensamento do aluno. Neste contexto, as representações produzidas pelos alunos permitem ao professor aceder à forma como estes pensam e raciocinam ao longo da resolução de um problema, permitindo-lhe dar feedback ao aluno, no sentido de o ajudar a regular a sua aprendizagem.

Heritage e Niemi (2006) tal como Duval (1999) ou Greeno e Hall (1997) defendem o valor das representações no processo de ensino e aprendizagem da matemática, não só pela natureza da própria matemática, mas também pelo poder que estas assumem na comunicação de ideias e conceitos, por esta razão consideram que o seu papel na avaliação formativa deve ser igualmente reconhecido. Para Heritage e Niemi (2006) as representações são uma poderosa ferramenta para os professores acederem ao pensamento do aluno, sejam eles símbolos, diagramas, mapas, imagens ou a própria linguagem oral ou escrita.

Os professores devem usar representações para envolver os alunos na aprendizagem da matemática, de modo que os alunos possam usar essas representações para estruturar a compreensão de conceitos emergentes. As representações devem ser um meio através do qual os alunos demonstram se e como entendem as ideias que foram introduzidas. Com base nas representações produzidas pelos alunos, os professores farão mais inferências sobre a aprendizagem e decidirão como planificar as aulas seguintes. Além disso, durante a aula, as interações entre professor e alunos, ancoradas nas representações, constituem uma oportunidade para aprimorar, corrigir e elaborar conceitos matemáticos. Deste modo, é possível afirmar que sem o recurso a representações múltiplas de ideias matemáticas não é possível envolver os alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Um ensino eficaz requer que os professores façam uso efetivo das representações para comunicar ideias, mas também que interpretem e respondam apropriadamente às representações produzidas pelos seus alunos.

Só assim, os alunos podem usar essas representações para estruturar a sua compreensão de conceitos e ideias. Finalmente, essas representações tornam-se um meio indispensável através do qual os alunos demonstram se e como entendem as ideias que foram trabalhadas. Com base nas representações produzidas pelos alunos, os professores podem fazer mais inferências sobre a aprendizagem do aluno e tomar decisões mais sustentadas para promover as aprendizagens. Além disso, o professor pode, a partir das representações produzidas pelo aluno, promover um diálogo que contribua para a clarificação do conceito matemático ou para o aluno prosseguir na resolução de determinada tarefa. Sem o recurso às representações, muitas vezes abstratas, não está claro como os professores podem ensinar e os alunos aprender.

Por conseguinte, não basta que os professores façam uma utilização efetiva de múltiplas representações para comunicar ideias e conceitos matemáticos com os seus alunos e que desenvolvam nos seus alunos a capacidade de mobilizar essas diversas representações na resolução das tarefas em sala de aula. É igualmente necessário que os professores interpretem as representações produzidas pelos alunos e os questionem sobre elas, como forma de promover a aprendizagem. Na figura 7, apresento o modelo proposto por Heritage e Niemi (2006), desenvolvido em cinco etapas, ligadas entre si num processo cíclico, que traduz o uso de representações no processo de ensino e aprendizagem, por professores e alunos.

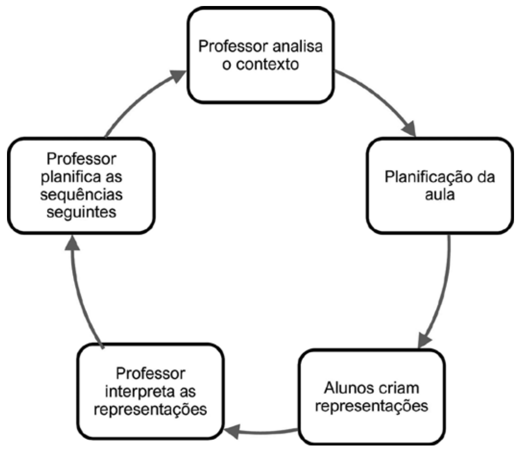


Figura 7. Modelo de ensino e aprendizagem envolvendo representações

PARA TERMINAR

Neste artigo procurei discutir a importância do uso de múltiplas representações no processo de ensino e aprendizagem da matemática e a sua relevância na avaliação formativa. As representações são ferramentas indispensáveis para os alunos aprenderem e compreenderem a matemática, mas também para os alunos comunicarem as suas ideias e aprendizagens. O professor deve pensar e planificar as sequências de representações tendo em vista os objetivos que pretende alcançar. Promover o uso de representações múltiplas é contribuir para uma aprendizagem da matemática que vai além da manipulação e transformação das representações matemáticas, é contribuir para que os alunos compreendam e atribuam sentido às ideias e aos conceitos matemáticos.

Referências

Ballard, J. (2000). *Students use of multiple representations in mathematical problem solving.* (Tese de doutoramento). Montana State University, Montana, USA

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Damásio, A. (2011). *O erro de Descartes: emoção, razão e cérebro humano*. Lisboa: Temas e Debates.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–26).

Ge, L. (2012). Sequences of multiple representations in mathematical education. *Journal of Applied Global Research, 5*(14), pp. 10-18

Greeno, J., & Hall, R. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78,* 361–367

Heritage, M., & Niemi, D. (2006). Toward a framework for using student mathematical representations as formative assessments. *Educational Assessment, 11*(3 & 4), 265–282. doi:10.1080/10627197.2006.9652992

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST), 9*(1), 1-21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445. http://www.jstor.org/stable/41182592.

Nélia Amado
Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

O poder das representações múltiplas e suas conexões: teoria e prática no 3.º ano do novo programa de matemática

Ana Paula Canavarro, Lina Brunheira, Manuela Vicente, Susana Brito

Este artigo começa por discutir em que consistem as representações matemáticas, evidenciando-as como ferramentas que apoiam a comunicação, a compreensão, o raciocínio e a descoberta em matemática e refere como as representações são contempladas no novo programa de matemática do Ensino Básico (EB). De seguida, exemplifica um caso de exploração de representações matemáticas múltiplas, no contexto da tarefa "Vamos ensinar retângulos ao robô", realizada em 2022, nas turmas de 3.º ano de escolaridade participantes na operacionalização do novo programa de matemática do EB. Por fim, concluímos sobre a importância das representações múltiplas e sobre o trabalho que o professor tem de fazer com elas para que cumpram o seu papel.

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS: O QUÊ E PORQUÊ?

O novo programa de matemática do Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) assume explicitamente a capacidade de usar representações matemáticas como uma capacidade matemática transversal essencial que deve ser desenvolvida por todos os alunos em todos os anos de escolaridade do Ensino Básico (EB).

Comecemos por esclarecer de que falamos quando nos referimos a representações matemáticas. Na verdade, este é um ponto de partida fundamental, pois a matemática é frequentemente identificada sobretudo com as suas representações simbólicas (algarismos, letras e outros símbolos específicos como, por exemplo, o sinal de "=") — a comprová-lo estão inúmeros resultados de pesquisas no Google de imagens sobre matemática, como é exemplo a figura 1. No entanto, uma representação matemática pode ser muito mais do que um símbolo — pode ser uma imagem, um objeto, ou mesmo uma simples palavra.

No fundo, isto nada tem de extraordinário. No nosso dia a dia, em qualquer domínio, usamos representações muito diversas para nos referirmos aos entes e ideias desse domínio. Bruner, reportando-se ao modo como comunicamos em geral e nas diferentes esferas de ação, refere-se às seguintes representações: linguagem verbal, escrita ou oral (que corresponde ao uso de palavras articuladas em discurso), representações icónicas (que correspondem a imagens expressas de diversas formas, como desenhos, esquemas, gráficos,...), representações ativas (que correspondem a objetos tangíveis que oferecem possibilidade de movimento/manipulação), representações simbólicas (que correspondem a símbolos cujo significado está institucionalizado numa dada comunidade).

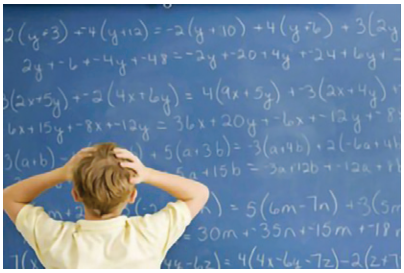


Figura 1. Resultado de pesquisa no Google de imagem sobre matemática

Fonte:https://exame.com/ciencia/ser-bom-em-matematica-e-hereditario-diz-estudo/

Esta categorização geral sintoniza com a proposta que Lesh, Post e Behr, num clássico publicado em 1987, apresentaram para teorizar sobre as representações matemáticas. Estes autores reportam-se a cinco diferentes representações que podem ser convocadas quando se pretende comunicar sobre entes e ideias matemáticas, no lato senso.

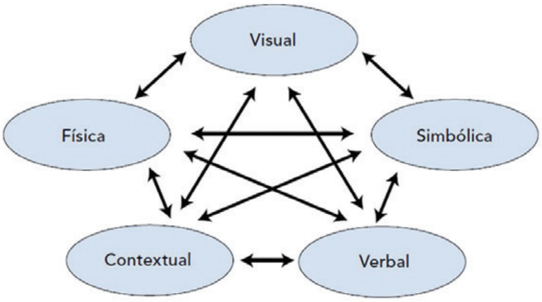


Figura 2. Representações matemáticas e suas conexões (Lesh, Post & Behr, 1987)

Analisemos a sua proposta através de um exemplo: o do trivial quadrado, ente matemático abstrato perfeito que não existe senão na nossa imaginação. Quando afirmamos que um quadrado é uma figura plana fechada com quatro lados de igual medida, usamos a representação verbal (equivalente à linguagem verbal em Bruner). Uma das potencialidades desta representação é a expressão das ideias através de palavras próprias, a que cada um poderá dar sentido, podendo ser admissíveis formulações distintas que façam uso de outros conceitos ou ideias (por exemplo, um quadrado é um quadrilátero com quatro ângulos retos e quatro eixos de simetria de reflexão). Assim, a representação verbal é rica na possibilidade de explicação e troca de pontos de vista sobre as mesmas ideias, embora nem tudo seja simples de explicar por palavras de forma clara e rigorosa.

Já um desenho de um quadrado que fazemos ou observamos constitui-se como uma representação visual, equivalente às representações icónicas de Bruner. O desenho do quadrado pode estar representado numa folha de papel, estampado num tecido, na tela de computador – o suporte não importa, embora alguns suportes como aplicações digitais ou programas de geometria dinâmica permitam potenciar o modo como percecionamos as imagens e o que delas podemos aprender. Existe uma grande diversidade de representações visuais que podem ser usadas no trabalho em matemática, com relevo para os gráficos e os diagramas (Canavarro & Pinto, 2012). As representações visuais são muito apelativas — todos sabemos que uma imagem vale mais do que mil palavras. No entanto, a representação visual de algumas ideias poder-se-á tornar demasiado complexa ou até impossível. Pode, também, gerar perceções erróneas se não for devidamente analisada.

O quadrado que recortamos em cartolina ou que manipulamos nos materiais estruturados (*Polydrons*, quadrados de espuma, etc.…) constitui-se como uma representação física, correspondente às representações ativas de Bruner. A possibilidade de manipulação oferece uma perceção mais completa do objeto em si, e permite observar de modo fácil e ágil alguns aspetos menos evidentes através do uso de outras representações. Por exemplo, um quadrado em cartolina pode ser dobrado de diversos modos e, através da observação dessas dobragens, ser testado quanto à sua simetria de reflexão. É o potencial das representações ativas que explica a popularidade do uso dos chamados materiais manipuláveis que tem tradição no trabalho da matemática, nomeadamente nos primeiros anos. Naturalmente, nem todos os conceitos matemáticos oferecem possibilidade de representação física acessível.

Mas um quadrado pode também ser representado pela designação [ABCD], com $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$. Neste caso estaremos a recorrer à representação simbólica que utiliza convenções prévias que permitem que quem as conheça entenda a ideia que está a ser veiculada. Por exemplo, no presente caso, é necessário saber que os parêntesis retos indicam uma figura plana fechada cujos vértices são os pontos designados pelas letras maiúsculas entre parêntesis. A representação simbólica é uma representação por excelência da matemática. Os símbolos têm um lugar único, o seu uso simplifica eficazmente a forma de referenciar algo e, frequentemente, a sua manipulação permite alcançar resultados que, sem eles, seriam de todo impossíveis. No entanto, os símbolos ocultam os significados e tornam-se, muito frequentemente, fator de incompreensão progressivo que provoca insucesso na aprendizagem da matemática (NCTM, 2017).

Por sua vez, os quadrados que dão forma aos azulejos das paredes das nossas cozinhas ou casas de banho, correspondem a uma representação contextual (que Bruner não sentiu necessidade de considerar). Na matemática, as representações contextuais surgem frequentemente na resolução de problemas ou modelação matemática de situações da realidade – por exemplo, será possível, com azulejos quadrados, pavimentar o chão? As representações contextuais têm o mérito de relacionar os conceitos matemáticos com os contextos da sua aplicação, permitindo concretizar conexões matemáticas autênticas e, consequentemente, dar a conhecer a relevância da matemática no mundo real. Nem sempre as representações contextuais surgem no contexto de situações realísticas, sendo frequentemente rodeadas de artificialismo e/ou aplicações bizarras e até contraproducentes do ponto de vista da mensagem que comunicam aos alunos sobre a utilidade da matemática para modelar a realidade.

O esquema de Lesh et al. (1987) (figura 2) não só identifica cinco representações matemáticas distintas como, para além disso, as coloca em relação umas com as outras. É importante que, em situação de trabalho em matemática, sejam usadas diversas representações e não apenas uma única. Cada representação funciona como uma lente e a conjugação de diferentes representações proporciona uma imagem mais completa e articulada do conceito ou ideia matemática representada (Tripathi, 2008). Assim, a articulação de representações múltiplas sobre uma mesma ideia favorece a ampliação da compreensão. A investigação em educação matemática tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essas ideias (NCTM, 2017). Vários estudos mostram que a profundidade da compreensão está relacionada com a força das conexões entre as representações matemáticas que os alunos tiverem interiorizado (Canavarro, 2017).

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NAS NOVAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES DE MATEMÁTICA NO EB

Pelo exposto, as novas orientações curriculares não poderiam deixar de valorizar que crianças e jovens desenvolvam a capacidade de usar e explorar representações matemáticas múltiplas, pois nesta capacidade assenta a possibilidade de comunicação e de compreensão em matemática, basilar para apoiar uma aprendizagem matemática para todos/as — um princípio fundamental assumido no novo programa.

Na página 3 dos programas de cada ano de escolaridade, na lista dos objetivos gerais a desenvolver por todos os alunos, pode ler-se:

> "Desenvolver a capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática, e como possibilidade de apropriação da informação veiculada nos diversos meios

de comunicação, nomeadamente digitais, onde surge em formatos em constante evolução. As ideias matemáticas são especialmente clarificadas pela conjugação de diferentes tipos de representação, e a compreensão plena depende da familiaridade e fluência que os alunos têm com as várias formas de representação. A tecnologia desempenha um papel especialmente relevante por facilitar a transição entre diferentes tipos de representação e análises com maior detalhe ou magnitude, inacessíveis sem os recursos tecnológicos."

Importa reter igualmente os três subtópicos e respetivos objetivos de aprendizagem definidos, em cada um dos anos de escolaridade do 1.º ciclo, relativamente às representações matemáticas:

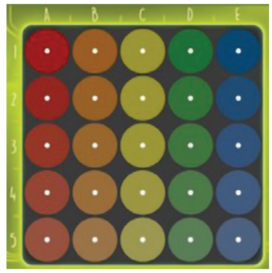
1. *Representações múltiplas*
   - *Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas;*
   - *Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.*
2. *Conexões entre representações*
   - *Estabelecer conexões e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia.*
3. *Linguagem simbólica matemática*
   - *Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.*

ENSINAR RETÂNGULOS AO ROBÔ: ANÁLISE DO PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

A tarefa "Vamos ensinar retângulos ao robô" (figura 3) foi criada pela mesma equipa que assina este artigo e que trabalhou em 2021/22 na operacionalização do 3.º ano do novo programa de matemática. As professoras, Manuela Vicente e Susana Brito, realizaram ambas a tarefa em sala de aula, com as respetivas turmas, tendo adotado sensivelmente a mesma forma de organização e dinamização da aula. O robô a que o enunciado diz respeito já havia sido usado previamente numa outra tarefa, em que foi ensinado a desenhar quadrados. A comunicação com o robô faz-se através da indicação de coordenadas. Estas coordenadas são pares letra-número que variam entre A1 e E5, como se pode observar no painel colorido incluído no enunciado da tarefa, que replica o teclado de coordenadas que o robô tem no seu "dorso".

Numa primeira fase da aula, os alunos trabalharam em grupos pequenos, tentando descobrir todos os retângulos que tinham vértice em B1. Note-se que desta vez não foi necessário esclarecer inicialmente como se liam as coordenadas, pois os alunos recordavam o significado dos pares letra-número da tarefa anterior — na aula anterior tinham combinado referir-se às coordenadas de modo uniforme, adotando a ordem letra-número, embora tenha sido discutido que também poderia ser número-letra. Esta discussão é pertinente pois existem alunos que têm tendência a ler o número-letra e, na verdade, assim poderia ser. A matemática está cheia de convenções que adotamos sem questionar, mas que poderiam ser outras e é importante que os alunos disso se apercebam.

Vamos ensinar retângulos ao robô



Agora que o robô já sabe fazer quadrados, vamos ajudá-lo a construir retângulos!

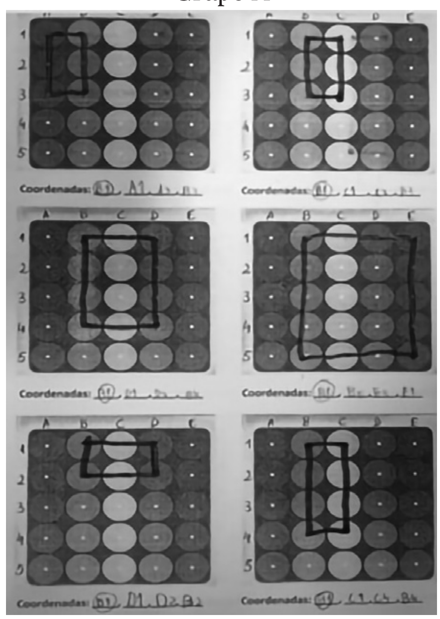
Vamos usar o ponto B1 como ponto de partida do robô e planear a construção de todos os retângulos que têm esse ponto como vértice.

1. Na folha em anexo (anexo 1), regista os retângulos que o robô pode desenhar, bem como as coordenadas dos seus vértices.
2. Tens a certeza de que encontraste todas as possíveis soluções? Explica como pensaste.

Figura 3. Enunciado da tarefa "Vamos ensinar retângulos ao robô"

Os grupos foram registando as soluções, à medida que as descobriam, numa "folha de coordenadas" especialmente concebida para o efeito. Esta folha replica seis vezes o teclado de coordenadas do robô e inclui, para cada um deles, espaço para a indicação das coordenadas que constituem os vértices das figuras desenhadas. Progrediram rapidamente no trabalho, criando respostas como as expostas na figura 4.

Grupo A



Grupo B

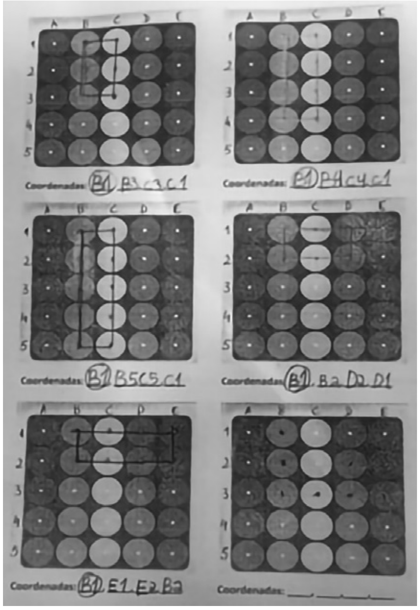


Figura 4. Exemplos de resoluções de grupos de alunos em resposta à questão 1

Na turma da professora Manuela, à medida que esta acompanhava o trabalho dos grupos, apercebeu-se de que todos desenhavam retângulos corretos e registavam bem as respetivas coordenadas, usando para tal o código que haviam combinado na tarefa anterior, em que o robô foi ensinado a fazer quadrados. Em concreto, combinaram que, apesar de saberem que teriam de indicar cinco coordenadas ao robô, bastaria, no registo escrito, escrever uma sequência de quatro e rodear a primeira — esta combinação correspondeu a ganhar eficácia na indicação de que a primeira coordenada deveria ser repetida no final das outras quatro, de modo a fechar o quadrilátero. Esta opção de registo foi proposta por um grupo de alunos e discutida e aceite por toda a turma, sendo coletivamente reconhecido que esta forma de escrita era mais simples, mas mesmo assim suficiente e inequívoca para garantir rigor no trabalho a fazer: identificar todos os retângulos distintos. Importa sublinhar aqui a importância da negociação coletiva do significado dos símbolos.

A discussão coletiva iniciou-se cerca de 20 minutos depois. A professora questionou cada grupo acerca do número de retângulos que encontrou e as respostas oscilaram entre 7 e 11. A professora desafiou a turma:

Professora: Então vocês acham que encontraram todos os retângulos? Serão mesmo 11?
Alunos: Pois não temos a certeza…, mas nós pensamos que sim… esforçamo-nos!
Professora: Será que o grupo dos 11 tem retângulos repetidos e afinal não são tantos?

O grupo debruça-se sobre o trabalho e tenta comparar rapidamente, mas a tarefa é vista como difícil.

Professora: E será que no conjunto dos grupos todos, não haverá mais retângulos diferentes? Se os 7 de um grupo e os 11 do outro grupo forem todos diferentes, então dá logo 18 diferentes! Como é?

Os alunos ficam pensativos.

Aluna: Podemos fazer como fizemos com os quadrados…. Procurar todos de uma forma organizada… e assim já sabíamos...
Professora: Olha que boa ideia! Concordam? Então vamos lá fazer isso aqui todos juntos. Como vamos organizar?

Na continuação do diálogo coletivo, retomam a importância de fazer registos visuais. O valor das representações visuais já havia sido explicitamente apreciado pela turma, tendo sido o seu uso incentivado em muitas outras situações de resolução de problemas. Importa também reparar que estas representações visuais aqui usadas não são simplesmente desenhos de retângulos ad-hoc, pois os alunos pretenderam desenhar de forma organizada. Isto significa que os alunos conferiram eficácia às representações visuais organizadas que já haviam feito antes para ensinar o robô a fazer quadrados. Assim, estas representações visuais são vistas com um valor acrescentado: não só permitem a representação, mas também proporcionam a descoberta, com rigor e completude, das soluções do problema.

Orientada pela professora, a turma decide o critério de organização: começar sempre em B1 e desenhar os retângulos obtidos fazendo um percurso orientado pelo sentido horário, variando o comprimento para cada largura de retângulo. Esta decisão está claramente ancorada na representação ativa associada aos movimentos do robô, que os alunos já conheciam antes, e que no caso coincide com a representação contextual, pois a ordem das coordenadas respeita a orientação do movimento do robô.

Os grupos avançam, à vez, com os desenhos no quadro branco, sobre a projeção dos esquemas simplificados das coordenadas, composta por quadrados ponteados de 5x5, com indicação das coordenadas, que a professora havia preparado e antecipado usar. Para cada retângulo desenhado, a professora registou no quadro verde, em diálogo com os alunos, a sequência das coordenadas dos seus vértices (figura 5).

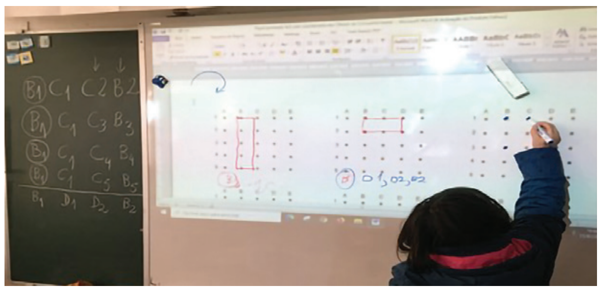


Figura 5. Registo coletivo no quadro verde das soluções de forma organizada, usado representações visuais e as simbólicas associadas

A análise da figura 5 permite observar a sistematicidade do trabalho dos alunos. As sequências de coordenadas escritas no quadro verde (lado esquerdo da figura 5) revelam que primeiro, tomando como ponto de partida do B1, se esgotaram todos os comprimentos de retângulos com largura 1. Depois, mantendo B1 como ponto de partida, iniciou-se a representação visual e simbólica dos retângulos com largura 2: B1, D1, D2, B2.

No entanto, após o desenho do segundo retângulo, aconteceu algo inesperado, pelo menos naquele momento: os alunos, ao ditarem as coordenadas do segundo retângulo de largura dois, repararam nas regularidades reveladas pelos símbolos: o segundo ponto teria de ser sempre D1, pois a largura era fixa. A terceira coordenada teria de ter sempre letra D, e ir variando os números; a quarta coordenada teria de ter sempre letra B, para ficar alinhada com o B1, e ir variando os números de acordo com o número da coordenada anterior. A partir daqui a turma foi capaz de indicar as restantes sequências de coordenadas, sem ter necessidade de desenhar todos os retângulos (o registo feito pode observar-se no lado esquerdo da figura 6). Daqui a turma concluiu rapidamente que existiam afinal 12 retângulos distintos: 3 larguras diferentes, 4 comprimentos possíveis para cada uma delas, logo 3 x 4.

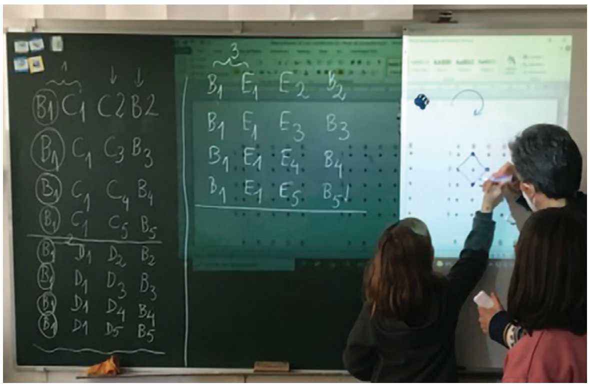


Figura 6. Registo das representações simbólicas organizadas que possibilitaram a descoberta do número de soluções do problema

Foi nessa altura que o grupo A exclamou que ainda faltavam retângulos... o grupo desenhara um que não estava ainda contado (figura 4, primeiro retângulo): B1, A1, A3, B3. A representação contextual permitiu perceber porque não fora ainda contemplado este retângulo — tinham imaginado o robô sempre a deslocar-se pelo sentido horário, mas ele podia deslocar-se orientado no sentido anti-horário, respeitando partir de B1. Nesta altura surgiram as exclamações de que não seria preciso desenhar: oralmente, fazendo apenas recurso à representação verbal, explicaram que sabiam que faltavam mais quatro, à semelhança do que havia acontecido com todas as outras situações analisadas! Portanto, as soluções possíveis seriam não 12, mas sim 12 + 4 = 16.

A discussão da tarefa continuou tendo sido ainda procurados retângulos com vértice em B1 mas em outras posições não verticais-horizontais. Não cabe neste artigo a discussão detalhada, mas de igual modo se recorreu a representações múltiplas (figura 7): representações visuais através de desenho sobre folhas de esquemas de coordenadas, representações ativas através do uso do "detetor de ângulos retos", representação verbal através da discussão e explicação de ideias, sempre presentes.

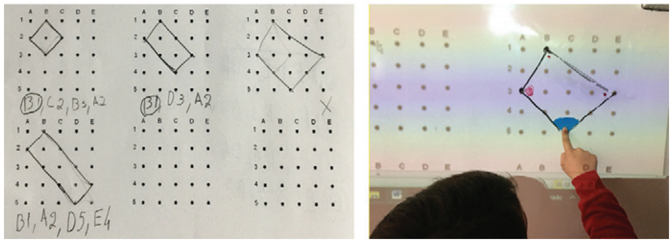


Figura 7. Uso do detetor de ângulos retos para testar se um quadrilátero era ou não um retângulo

Importa terminar o testemunho destas aulas informando que os registos dos 16 retângulos diferentes foram feitos por todas as crianças e anexados aos cadernos e, além disso, as soluções ficaram também expostas na sala de aula. Na turma da Professora Susana Brito este trabalho foi completado usando o computador para registar todas as soluções (figura 8).

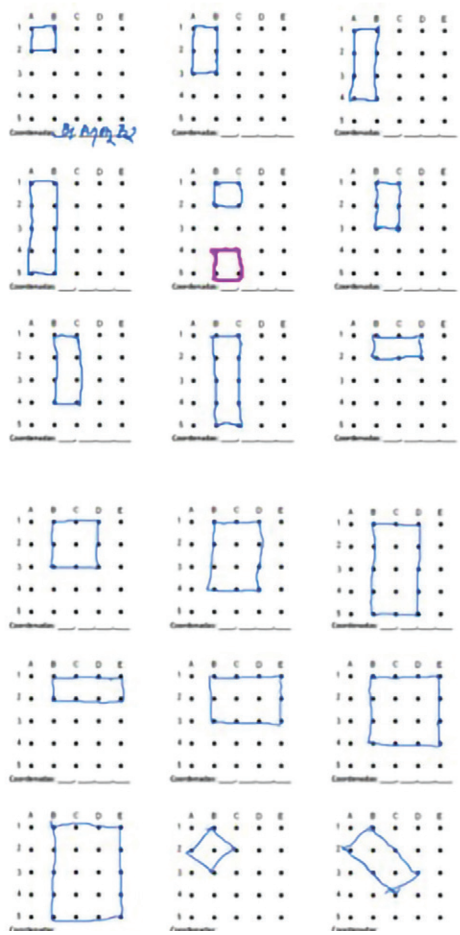


Figura 8. Extrato do registo final de todas as soluções, usando representação visual feita em computador

A CONCLUIR

O excerto de aula descrita mostra como as representações têm, cada uma delas e em conjunto, um papel decisivo na experiência matemática dos alunos. Destacamos o poder das imagens para identificar cada uma das soluções do problema, mas não só: usadas de modo intencionalmente organizado, permitem organizar o processo de busca de soluções, que é base do raciocínio em matemática, em particular de pensamento computacional. Destacamos também o papel das representações simbólicas, que conectadas com as representações visuais, permitiram evoluir com segurança e eficácia na contagem de todas as soluções.

Para que as representações pudessem desempenhar o seu papel, a planificação da exploração da tarefa antecipou como as usar e articular. As folhas de coordenadas e as folhas com os esquemas simplificados das coordenadas previamente preparadas, foram preciosas para que os alunos pudessem fazer diversos desenhos, tantos quantos quisessem, e com um rigor relativo. A organização da escrita das coordenadas no quadro, alinhadas umas por cima das outras, feita à medida que os desenhos eram produzidos, foi essencial para que os alunos detetassem as regularidades e tirassem as suas conclusões. A conexão entre estas duas representações permitiu que os alunos concluíssem rapidamente sobre o caso em falta, demonstrando uma boa compreensão da situação. O discurso que as professoras promoveram, apoiando os alunos na expressão e discussão permanente das ideias, foi também essencial para a compreensão e negociação dos significados.

Assim, é necessário antecipar quais as representações valiosas e como podem ser usadas de forma eficaz para apoiar o trabalho dos alunos. É igualmente necessário antecipar como estabelecer conexões entre as diversas representações de modo a aprofundar a compreensão e a possibilidade de descoberta matemática.

Referências

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico.* ME DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões — ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática, 144/145*, 38–42. (ISSN 0871-7222)

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante, XXI*(2), 51–79. (ISSN 0872-3915)

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics, 21*, 33–40.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–444.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

Manuela Vicente
EB1 da Comenda, AE Gabriel Pereira, Évora

Susana Brito
EB Quinta da Condessa, AE Braamcamp Freire, Pontinha

Polígonos inscritos: do papel e lápis ao GeoGebra

Carla Faneco
Nuno Valério

Nas práticas letivas de matemática, as representações são frequentemente usadas em sala de aula de duas formas distintas. Através da construção pelos alunos de representações (informais ou formais) ou a com a apresentação de representações pelos professores ou pelos discentes para construir conceitos. Infelizmente, e em muitas situações, no ensino da Geometria, é comum utilizarem-se representações como forma de exemplificar conceitos, recorrendo a ilustrações de elementos geométricos como "produtos finais", analisados segundo as suas caraterísticas.

Na maioria das aulas de 2.º ciclo, quando se abordam conteúdos como ângulo ao centro, setor circular, polígono inscrito numa circunferência, polígono circunscrito a uma circunferência e retas tangentes a uma circunferência, estes, costumam surgir de uma forma isolada e estanque com recurso a imagens que são meras ilustrações exemplificativas de uma representação. Em múltiplas situações, é ainda proposta a sua reprodução em papel e lápis, sem que se faça uma relação entre os conceitos. Na maioria dos manuais, as atividades propostas consistem apenas em observar as representações dos conceitos atrás indicados, como produtos finais, acompanhados por questões que conduzem à sua análise. A existência de atividades que envolvem os alunos na descoberta, problematização, investigação e/ou construção raramente fazem parte das propostas dos manuais e, como consequência, possivelmente das práticas de muitos docentes.

Esta apreciação, que resulta da nossa longa experiência como professores de 2.º ciclo, constituiu o ponto de partida para a apresentação e discussão de uma experiência realizada e integrada no projeto de trabalho colaborativo *Aproximações à utilização do GeoGebra nos 1.º e 2.º ciclos*. As condições de desenvolvimento deste projeto permitiram-nos realizar experiências de ensino da geometria de forma integrada na nossa planificação pessoal, discutindo-as com alguns colegas e, progressivamente, avançando na utilização do GeoGebra com os nossos alunos, em várias turmas.

Este texto relata aspetos das nossas primeiras experiências de utilização da geometria dinâmica com alunos. Trabalhamos em escolas diferentes, em contextos socioeconómicos distintos, embora com algumas analogias. Apresentamos a nossa experiência de forma interligada, procurando ilustrar como o processo de trabalho que vivemos foi influenciando a nossa prática.

Numa perspetiva de motivação dos alunos do 6.º ano através de aprendizagens mais dinâmicas e envolventes, um de nós decidiu fazer uma abordagem dos conteúdos atrás identificados recorrendo a construções em Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), neste caso, o GeoGebra. Numa fase inicial, os alunos começaram por utilizar o telemóvel, mas a necessidade de utilizar ecrãs maiores levou a que começassem a utilizar os seus próprios computadores e *tablets*. As primeiras aulas foram de exploração livre do *software*, através das quais os alunos se foram apropriando dos recursos disponíveis nos menus. Foram feitas algumas solicitações pontuais, nomeadamente, marcar um ângulo cujo centro coincidisse com o centro da circunferência, pelo que surgiram naturalmente um ângulo ao centro e um setor circular (figura 1). Numa segunda fase, solicitou-se aos alunos que inscrevessem um polígono regular numa circunferência.

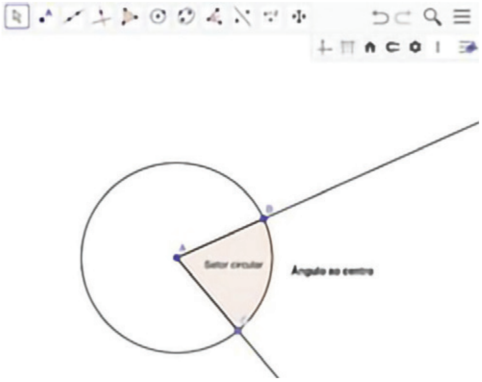


Figura 1. Construção de um aluno com um ângulo ao centro

Esta curta descrição foi discutida no grupo de trabalho colaborativo e comparada com o relato de outro docente que tinha também trabalhado este assunto com os seus alunos. Neste caso, os polígonos inscritos tinham sido construídos recorrendo a construções com papel e lápis. A discussão realizada despoletou uma motivação para realizar de novo as mesmas construções com os alunos, mas desta vez recorrendo ao GeoGebra. Por essa razão, o relato que se segue, baseia-se numa reflexão sobre a construção de representações, quando os alunos utilizam papel e lápis e quando são confrontados com a utilização de GeoGebra (figura 2). Esta experiência decorreu em 6 turmas, 3 por docente.

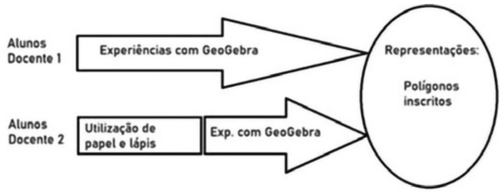


Figura 2. Esquema comparativo da experiência realizada pelos docentes

POLÍGONOS INSCRITOS COM PAPEL E LÁPIS

Quando a representação de polígonos inscritos surge no manual destes alunos, apenas com a definição do conceito e uma imagem associada, é habitual pedir-se a construção de um pentágono regular com recurso a papel e material de desenho. Esta construção é feita individualmente, mas acompanhada coletivamente pelo docente. Neste momento os alunos já conhecem a definição de polígono inscrito.

Foi pedido aos alunos que desenhassem uma circunferência no caderno, surgindo logo de seguida a questão de como marcar os cinco pontos equidistantes para desenhar o pentágono regular. Interessa referir, que nesta fase os alunos estavam a trabalhar conceitos relacionados com circunferência e ângulos ao centro e, por isso, deviam mobilizar esses conceitos para dar resposta a esta questão. Com frequência, foi necessário o docente referir que o arco da circunferência completa mede 360° para os alunos inferirem que estes 360° deviam ser divididos por 5 para depois marcar os vértices do pentágono regular inscrito. Após esta discussão coletiva, os alunos construíram individualmente ângulos ao centro de 72°, adjacentes, marcaram os vértices do pentágono nas interseções dos lados dos ângulos com a circunferência e desenharam o pentágono inscrito (figura 3).

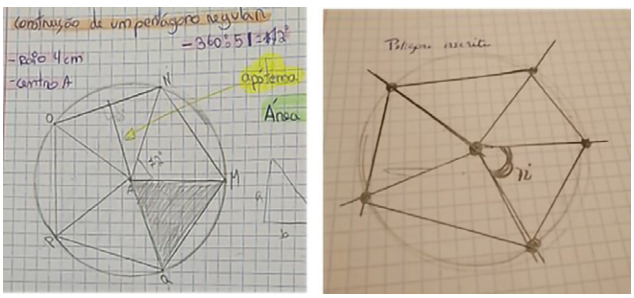


Figura 3. Construções de polígono regular com papel e lápis de dois alunos

Estas construções nem sempre são fáceis de conseguir realizar pelos alunos e alguns sentem-se frustrados por não conseguirem visualizar um pentágono regular inscrito como resultado. O processo é moroso e parece contribuir mais para o desenvolvimento da motricidade fina do que para a aquisição de conhecimentos matemáticos, dadas as instruções passo a passo. Esta tarefa nem sempre foi concluída por todos, mas alguns construíram outros polígonos regulares inscritos. Este enquadramento provocou curiosidade em perceber se os alunos, após a experiência de construir polígonos inscritos em papel, mobilizariam estes conhecimentos na construção de polígonos inscritos num AGD.

POLÍGONOS INSCRITOS COM GEOGEBRA

Ambos os docentes solicitaram aos seus alunos que construíssem um polígono regular inscrito na circunferência. Quer os alunos tivessem tido uma experiência prévia com papel e lápis ou não, a forma como olharam inicialmente para o plano no GeoGebra foi como se de uma folha de papel se tratasse, uma vez que inicialmente apenas se limitaram a sobrepor figuras em cima umas das outras, sem estabelecer ligações entre os elementos geométricos envolvidos. No caso do polígono inscrito com GeoGebra, logo após ter construído uma circunferência, utilizaram um dos seus pontos para construir um pentágono regular, por exemplo, com o comando do GeoGebra "polígono regular", e alinharam por aproximação os dois objetos, circunferência e polígono. Quando os docentes pediram aos alunos que movimentassem a construção, o pentágono deixava de estar inscrito. Nesse momento, os alunos perceberam que a construção é dinâmica e que o método de construção utilizado para representar um polígono inscrito numa circunferência é falível. O que aconteceu nas várias turmas foi muito semelhante e somos levados a concluir que a experiência prévia de construir polígonos inscritos com papel e lápis não parece ter tido grande influência na construção com recurso ao AGD. Nenhum dos alunos que já tinha construído polígonos inscritos no papel usou a construção de ângulos ao centro com uma dada amplitude para fazer a construção em GeoGebra. O que nos parece interessante evidenciar é que o desafio estava lançado entre os alunos e a necessidade de encontrar uma forma de representar um polígono inscrito requer a mobilização de outros conhecimentos. Fazer uma construção realmente dinâmica é de muito maior exigência.

O conceito de ponto comum aos dois objetos matemáticos, ponto pertencente à circunferência e ao polígono, ficou claro para os alunos, quer nas suas representações, quer no seu significado. Assim, todos os pontos do polígono teriam de ser pontos da circunferência e, desta forma, o polígono inscrito não se dissociava da circunferência. Alguns alunos construíram uma circunferência e posteriormente um polígono com um número de pontos comuns à circunferência, conseguindo um polígono inscrito, mas não regular (figura 4).

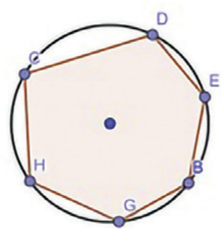


Figura 4. Construção de polígono inscrito não regular

Para conseguir construir um polígono regular, os alunos perceberam que teriam de encontrar pontos na circunferência que fossem equidistantes, e que conforme o número de pontos, assim seria o número de lados do polígono inscrito. Mas que ferramentas do GeoGebra e que conhecimentos matemáticos teriam de usar para conseguir encontrar estes pontos?

Foi dada orientação para os alunos usarem o conhecimento de ângulo ao centro no processo de construção do polígono regular. Em discussão coletiva, os alunos concluíram que uma circunferência completa representa 360º e quando questionados sobre como dividir essa circunferência em partes iguais, vários foram os que sugeriram dividir os 360º no número de pontos a marcar. Após esta discussão, os polígonos regulares inscritos começaram a surgir nas construções (figura 5).

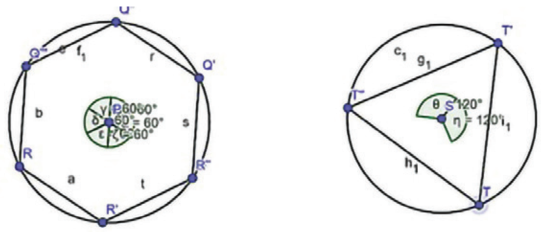


Figura 5. Construções de um aluno

Depois desta discussão todos os alunos conseguiram construir no GeoGebra um polígono regular inscrito. Estas construções representavam um processo com sentido e com resultado idêntico, considerado pelos alunos como "perfeito", o que não aconteceu quando as construções foram realizadas no papel. As construções eram agora dinâmicas: quando o raio da circunferência se altera, o polígono continua inscrito e regular, relação de dependência impossível de visualizar numa construção em papel. Os alunos concluíram também, que é possível construir um polígono regular inscrito com qualquer número de lados pela estratégia de divisão exata de 360º pelo número de vértices do polígono a inscrever.

Quando as construções são feitas neste ambiente de geometria, e ao escolher a ferramenta a usar, os conceitos passam a fazer sentido, pois as palavras escritas transformam-se em imagens. Por exemplo, quando se seleciona "Ângulo com uma dada amplitude" e surge a ajuda "Selecione o ponto, depois o vértice e digite a amplitude" (figura 6), o aluno tem de saber que o vértice do ângulo terá de ser o centro da circunferência e que o primeiro ponto a selecionar deve ser um ponto da circunferência.

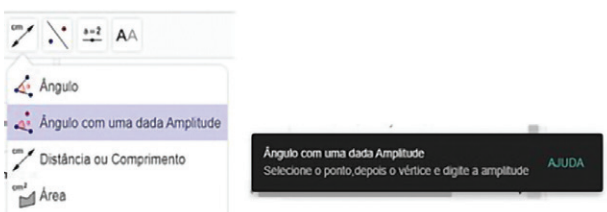


Figura 6. Menu e Instruções do GeoGebra

Quando o aluno não compreende bem os conceitos, ou não cumpre a ordem pela qual a construção deve ser feita, o resultado não é o pretendido. O aluno, muitas vezes de forma autónoma, consegue entender o erro e corrigir a própria construção. Todo este processo é realizado de forma rápida e sem deixar marcas, o que não acontece quando a construção é feita com papel e lápis (figura 7).

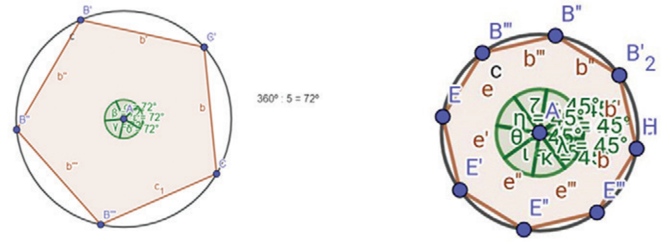


Figura 7. Construções de alunos com polígonos inscritos na circunferência

AS INTERAÇÕES NA PRODUÇÃO DE REPRESENTAÇÕES

Importa referir o papel das interações entre os alunos, tendo a necessidade de comunicar e de partilhar descobertas sido constantes. Neste sentido, a representação realizada por um aluno, focada em aspetos que outro aluno necessitava compreender para conseguir chegar ao seu objetivo, levou a que a representação fosse utilizada como uma forma de mostrar o raciocínio de um a outro. Na procura coletiva de uma solução para um problema comum, a representação surgiu, neste contexto, como o instrumento de partilha de uma solução, sem que houvesse uma manifestação de desacordos ou contradições. Cada representação, por si, constituiu uma forma de resposta ao que se procurava num determinado momento.

A discussão coletiva surgiu quando o professor entendeu que a turma procurava uma solução para avançar e que o tempo despendido para essa procura era suficiente para criar curiosidade e motivação, mas que estaria próximo de gerar desistência e desânimo. Ao proporcionar um espaço para, em conjunto, parar e procurar uma solução ou um caminho para a solução, renovava-se a vontade de continuar a trabalhar e estabeleciam-se conexões que permitiam também avançar no conhecimento. Muitas vezes a partilha da descoberta de alguns alunos foi feita pelo professor, no entanto, nestas nossas experiências percebemos que a partilha acontecia maioritariamente de aluno para aluno ou até mesmo de aluno para a turma. Embora o ambiente em sala de aula aparentasse ser muito individual, com cada um no seu portátil, na verdade os alunos deslocavam-se para ver as descobertas dos seus pares e falar para o coletivo quando descobriam algo que interessava a todos. A partilha foi feita de forma natural e sem perturbação, principalmente com o objetivo de todos avançarem e pela satisfação da descoberta. Desta forma o professor proporcionou condições para despertar a curiosidade, provocar a dúvida e identificar e explorar o momento adequado à partilha coletiva

AS REPRESENTAÇÕES COMO UM PROCESSO DINÂMICO

Quando os alunos utilizam o GeoGebra estão obrigatoriamente a representar as ideias que desejam e idealizam, a experimentar aleatoriamente até conseguir representar o que pretendem ou a realizar um pouco de ambos. No processo de compreensão de um conceito, quanto maior é a utilização das ferramentas, maior será a intenção de representar experimentando aleatoriamente até se chegar a uma representação intencional de algo que se pretende. Porém, a dicotomia entre uma e outra, nunca é isolada precisamente porque as representações que podem ser realizadas com AGD são dinâmicas. Não só é possível a sua eliminação com um simples voltar atrás, como também é possível mover os elementos desejados de modo a criar condições para formular conjeturas. Com o papel e lápis, consegue-se uma representação como um fim, ainda que o objetivo seja o de representar corretamente. Porém, com recurso a um AGD, a representação permite a manipulação e inclusão de novos elementos que, por sua vez, permitem fazer análises do próprio objeto representado. A construção em GeoGebra assume um processo dinâmico, e enquadra-se na perspetiva de Woleck (2001), enquanto ferramenta para articular, clarificar, justificar e comunicar e não se tratando de produtos estáticos, capturam o processo de construir um conceito ou uma relação matemática.

Recorrendo à abordagem de Lesh, Post e Behr (1987), que considera cinco tipos de representações que se relacionam entre si, podemos identificá-las nos processos de construção de representações dinâmicas com o GeoGebra. A construção dos objetos físicos (*static pictures*) que têm uma função visual, são sujeitos a uma manipulação (*manipulative models*) que permite a sua interação. Quando a sua manipulação tem como objetivo a resolução de um problema num determinado contexto (*real scripts*) que pode ser explicado através da expressão oral ou escrita (*spoken language*) e é alvo de interações, mobiliza por defeito a representação simbólica do software (*written symbols*) que referencia por sua vez os objetos utilizados e/ou construídos.

Temos ao dispor um conjunto de ferramentas que os computadores dos anos 90 não tinham. A maioria dos alunos dispõe, no mínimo, de um telemóvel. A não utilização de um AGD não faz qualquer sentido. Os alunos de hoje estão imersos em tecnologia e a rapidez com que o GeoGebra permite que se façam construções leva a que experimentem representações ao mesmo tempo que testam o que pensam com uma resposta rápida, construindo conhecimento. O uso da tecnologia é mais significativo para os alunos, permite a interação e o imediato, face ao papel e lápis, que é mais moroso. De tal forma, muitas vezes, foi difícil acompanhar o processo de construção das representações dos alunos. Se as representações em GeoGebra assumem um papel dinâmico, o pensamento e compreensão que desenvolvemos quando utilizamos GeoGebra, também assume um dinamismo constante, pois vão sendo construídos e alterados sucessivamente através da experimentação.

A apreciação dos alunos que utilizaram o GeoGebra após o uso de papel e lápis foi evidenciada na avaliação que fizeram. Se para muitos a experiência de construção em papel e lápis foi interessante, para a grande maioria, o GeoGebra teve um papel fundamental quer na rapidez das construções, quer na construção de conhecimento que a própria representação proporcionou (figura 8).

Uma ideia consensual é que as representações externas são uma forma de expressar as representações internas e que o modo de chegar às ideias internas é através de fatores externos. Evidenciamos a ideia de que "a forma como um aluno se relaciona com ou gera uma representação externa revela a forma como o aluno representou essa informação internamente" (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 66). Neste contexto, pensamos que a utilização do GeoGebra pode surgir como instrumento facilitador da produção de representações. O uso de um instrumento que permite a experimentação dinâmica, remete-nos para a abordagem bidirecional das representações de Goldin (2002) na qual, não só o externo representa o interno, por exemplo, um aluno expressa o que tem em mente ao desenhar um gráfico, mas também o interno representa o externo, isto é, o aluno visualiza o que é descrito por um gráfico ou por uma fórmula, numa ação que poderá ocorrer em simultâneo.

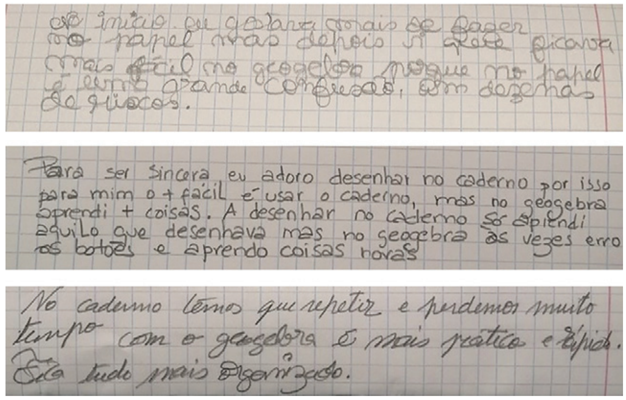


Figura 8. Opiniões de alguns alunos

Enquanto professores e após esta experiência, ficamos motivados para refletir sobre estas ideias e usá-las para melhor compreender a utilização de representações e o seu papel na aprendizagem. As representações realizadas e o conhecimento construído, mobilizando as aprendizagens feitas pelos alunos, permite-nos refletir sobre o papel do professor enquanto decisor e gestor do programa, não só relativamente à utilização de AGD, das tarefas selecionadas e propostas aos alunos, mas também à compreensão desenvolvida quando se utiliza uma ferramenta que permite a construção e a relação entre representações geométricas.

Referências

Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. Em Lyn D. English et al. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197–217). National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J., Carpenter, T. P. (1992). Learning as and Teaching with Understanding. Em Douglas A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics and learning* (pp. 65–97). Macmillan

Lesh, B., Post, T., Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures: An Investigation of Children's Mathematical Drawings. Em *Roles of Representation in School Mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 215–227). National Council of Teachers of Mathematics.

Carla Faneco
Agrupamento de Escolas de Sampaio
Nuno Valério
Agrupamento de Escolas Professor Reynaldo dos Santos

As representações em educação matemática

As representações constituem um aspeto chave no ensino da matemática, conhecer diferentes tipos de representações e saber usá-los com flexibilidade é determinante na construção do conhecimento matemático. As representações são ferramentas privilegiadas para os alunos exprimirem as suas ideias matemáticas e constituem-se como auxiliares na construção de novo conhecimento. Em sentido amplo, uma representação é uma configuração que representa alguma coisa de alguma forma (Goldin, 2008). O termo representação refere-se tanto ao processo de representar como ao resultado desse processo. Uma representação é tanto mais poderosa quanto maior for a sua versatilidade, estando esta diretamente relacionada com o facto de poder ser aplicada a diferentes contextos e poder relacionar-se com outras representações.

Diferentes representações matemáticas de um mesmo conceito evidenciam diferentes aspetos da sua estrutura que se complementam no sentido da compreensão do mesmo (Tripathi, 2008). A construção de representações pelos alunos, com posterior partilha e discussão coletiva, pode constituir um ponto de partida para aqueles "olharem" para outras representações e contribuir para que desenvolvam um "repertório de representações" mais ou menos convencionais. Daí a necessidade de haver espaço na sala de aula para que surjam várias estratégias de resolução para o mesmo problema, correspondendo a diferentes representações. Deste modo, os alunos podem usar aquelas com as quais se sentem mais à vontade a trabalhar, resultando que alunos diferentes podem usar representações diferentes.

As representações em matemática têm vindo a ser estudadas desde há muito, tendo Bruner (1962) categorizado as diferentes formas de representar ideias matemáticas em três tipos: (i) representações ativas, associadas à ação, envolvendo a manipulação de objetos e materiais manipuláveis; (ii) representações icónicas, implicam o uso de figuras, imagens, esquemas ou desenhos para ilustrar conceitos; e (iii) representações simbólicas são a tradução da experiência em linguagem simbólica, segundo regras convencionadas. O objetivo é que os alunos utilizem representações cada vez mais sofisticadas e caminhem para a utilização da linguagem simbólica própria da matemática. Já o NCTM nos Princípios para Ação (NCTM, 2017) retoma a classificação apresentada por Lesh et al. (1987) em cinco categorias: (i) física, usando materiais físicos; (ii) contextual, associada a um dado contexto; (iii) verbal, utilizando a linguagem verbal; (iv) visual, usando desenhos, esquemas ou imagens; e (v) simbólica. Para o NCTM o foco deve estar no saber usar e relacionar as diferentes representações. Por exemplo, o significado de fração 5/3 (forma simbólica) é desenvolvido quando os alunos a representam como cinco retângulos de tamanho 1/3 (a terça parte de um dado retângulo considerado a unidade) ou numa reta numérica (forma visual), ou ainda como a medida de uma fita cujo comprimento é 5/3 do metro (forma física). Esta última categorização é também a adotada nas Aprendizagens Essenciais de 2021 (Canavarro et al., 2021).

Mais recentemente, investigadores do Instituto Freudenthal na Holanda referem a construção de modelos associando o processo à atividade de modelação que os alunos desenvolvem quando usam e transformam representações para chegar à solução de um problema. Esta atividade de modelação implica uma evolução do próprio "de modelos de situações concretas para modelos de pensamento". A vivência pelos alunos de múltiplas e diversas experiências com diferentes modelos matemáticos é fundamental para darem sentido às representações matemáticas formais. Aqueles autores apresentam uma classificação das representações em três categorias: representações informais, que incluem as representações associadas a contextos, diagramas e explicações, que advêm de experiências vivenciadas pelos alunos associadas a situações de contexto; representações pré-formais, como o modelo da reta numérica dupla ou da tabela de área; e representações formais, como os algoritmos. Deste modelo decorre uma formalização progressiva, na qual as representações mais formais se constroem a partir das menos formais.

As representações informais e pré-formais do modelo holandês vão ao encontro das representações icónicas de Bruner ou das representações visuais de Lesh et al. Também nas diferentes categorizações, a categoria mais complexa, a que se pretende que os alunos cheguem, se reveste necessariamente de maior formalismo, traduzindo-se em linguagem simbólica. Para que a formalização, necessária e desejável não comprometa a compreensão, a simbologia da linguagem matemática deve ir integrando progressivamente a linguagem natural, de modo não arbitrário, dependendo do fim com que os símbolos são usados e do significado construído e partilhado por todos. Por um lado, a existência de representações partilhadas é essencial para que possa haver comunicação e compreensão, por outro, é através da comunicação que se negoceiam representações. O modelo de ensino-aprendizagem exploratória em que os alunos, depois da apresentação da tarefa, são convidados a trabalhar a pares ou em pequenos grupos para, posteriormente, se envolverem numa discussão em coletivo, permite que esta partilha possa acontecer.

Acresce que em educação matemática, as representações são ferramentas privilegiadas para os alunos exprimirem as suas ideias matemáticas, funcionando ainda como auxiliares na construção de novos conhecimentos (NCTM, 2007). Contudo, uma representação apenas faz sentido enquanto parte integrante de um sistema mais abrangente e estruturado no qual diferentes representações estão relacionadas não podendo ser compreendida ou interpretada isoladamente. Assim, o modo como as ideias matemáticas são representadas influencia de maneira profunda a forma como elas são compreendidas e usadas.

É através da análise das representações usadas pelos alunos que o professor se pode aperceber do seu raciocínio e ajudá-los na construção das representações próprias da matemática. Gravemeijer (2005) sustenta que o professor deve ajudar os alunos a modelar a sua atividade matemática informal e que os modelos usados pelos alunos devem evoluir de modelos de pensar para modelos para pensar, possibilitando um raciocínio matemático mais formal. Na sua perspetiva, modelos são representações usadas para resolver problemas ou explorar relações. Enquanto o modelo de pensar constitui a representação das ações dos alunos, apresentando elementos contextuais da situação, o modelo para pensar é um modelo generalizado de estratégias focado nas relações matemáticas. A linha numérica vazia é um exemplo de um modelo para pensar, na medida em que pode funcionar como um modelo para um raciocínio matemático mais sofisticado em que os números deixam de estar ligados a itens específicos contáveis ou a distâncias identificáveis para passarem a ser vistos como objetos matemáticos cujo significado deriva do seu lugar numa rede de relações numéricas. Por exemplo, os alunos podem usar diferentes representações na resolução do seguinte problema: "Um autocarro parte de uma paragem com 3 pessoas. Na paragem seguinte entram 5 e saem 3, na seguinte entram 2, depois quatro e na última sai uma. Quantas pessoas continuam a viagem no autocarro?" (figura 1). Enquanto a primeira linha da imagem é um exemplo de um modelo de pensar, representando a situação concreta, a terceira linha é um exemplo de modelo para pensar, na medida em que a linha numérica constitui um modelo generalizado de estratégias, independentemente da situação concreta de saídas e entradas de pessoas num autocarro, prevalecendo as relações numéricas.

Confrontando a classificação de Bruner (1962) ou a de Lesh et al. (1987) com a proposta por Gravemeijer (2005), pode considerar-se que um modelo de pensar corresponde a uma representação ativa/física (se envolver a manipulação de objetos) ou icónica/ visual (como exemplificado na figura 1-A). Quanto ao modelo para pensar, exemplificado pela linha numérica (figura 1-B), é uma representação simbólica. O NCTM (2007) ressalta ainda o papel das representações idiossincráticas construídas pelos alunos quando estão a resolver problemas e a investigar em matemática, na medida em que podem ajudá-los na compreensão e na resolução de problemas e proporcionar "formas significativas para registar um método de resolução e para o descrever aos outros" (p. 76). Observando estas representações, os professores podem compreender os modos de interpretar e de raciocinar dos seus alunos.

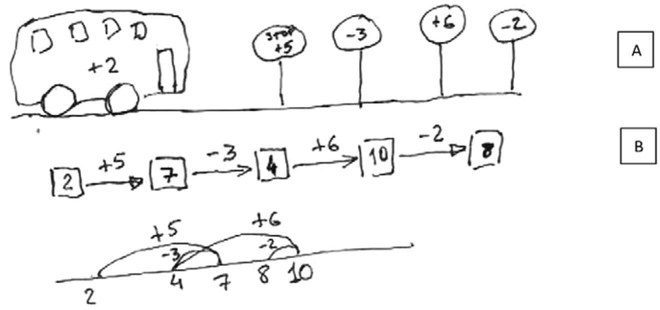


Figura 1. Várias representações usadas pelos alunos

Referências

Bruner, J. (1962). *The process of education*. Harvard University Press (Tradução portuguesa: O processo de Educação, 1998, Edições 70).

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico.* ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? Em L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Org.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83– 101). Lisboa: APM e DEFCUL.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education* (2ª ed.) (pp. 176–200). London: Routledge.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representatios in mathematics learning and problema solving. Em C. Janvier (ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*. Erlbaum.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Tradução de Principles and Norms of School Mathematics). APM.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática* (Tradução de Principles for Action). APM.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445.

Lurdes Serrazina
Aposentada

As representações: escolhas eficazes na resolução de problemas

Ana Barbosa
Isabel Vale

É um facto que as tarefas que cada professor seleciona para as suas aulas constituem a base para a aprendizagem dos alunos e a sua natureza influencia, de forma significativa, o tipo de trabalho que é desenvolvido na aula de matemática. Pelo que se devem propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas, permitir vários modos de abordagem e estratégias de resolução diversificadas, recorrendo a diferentes representações. As representações são uma ferramenta imprescindível na resolução de problemas pois permitem apoiar a compreensão matemática, ajudar o aluno a comunicar as suas ideias, clarificar o raciocínio através das conexões que se podem estabelecer e podem ser usadas na aplicação de conceitos matemáticos no mundo real. Neste sentido, espera-se que os alunos sejam capazes de compreender e aplicar com fluência uma diversidade de representações matemáticas. Este é um assunto importante, que se reveste de alguma complexidade, tendo em conta a multiplicidade de representações que se podem utilizar na aprendizagem da matemática.

Depois de uma breve discussão teórica que inclui alguns exemplos ilustrativos, apresentamos quatro tarefas que podem encorajar professores e alunos a pensar de modo flexível na resolução de problemas, através do recurso a múltiplas representações.

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

As representações são uma componente importante do processo de ensino e aprendizagem da matemática. O seu papel é amplamente apoiado por várias associações profissionais (e.g. NCTM, 2014) que as consideram como um processo matemático fundamental, atuando como ferramentas de manipulação, comunicação e compreensão concetual de ideias matemáticas. As representações são produções observáveis ou tangíveis, como números, diagramas, retas numéricas, gráficos, arranjos de objetos concretos ou manipuláveis, modelos físicos, expressões matemáticas, fórmulas, equações, ou até mesmo produções exibidas no ecrã de um computador ou de uma calculadora (Goldin, 2018). Podem ser consideradas uma construção mental ou física que descreve aspetos da estrutura inerente de um conceito e as interrelações entre o conceito e outras ideias (Tripathi, 2008).

As representações matemáticas e os sistemas de representação são frequentemente caracterizados de acordo com a natureza das configurações utilizadas. Vários autores têm procurado definir categorias para o conceito de representação (Bruner, 1966; Matteson, 2006; NCTM, 2014; Tripathi, 2008). Bruner (1966) identificou três formas diferentes de representar o mundo que nos rodeia: *ativa* (conjunto de ações para alcançar um determinado resultado usando materiais manipuláveis ou outro tipo de objetos); *icónica* (imagens visuais que simbolizam um conceito); e *simbólica* (conjunto de proposições lógicas ou simbólicas extraídas de um sistema regido por regras ou leis que formam e transformam proposições). Há outras propostas de categorização das representações na literatura que maioritariamente resultam de uma extensão do modelo apresentado por Bruner. Por exemplo, alguns autores (e.g. NCTM, 2014; Tripathi, 2008) defendem um modelo constituído por cinco formas de representação associadas à aprendizagem da matemática e à resolução de problemas: *contextual* (situações da vida real); *concreta/física* (materiais manipuláveis/objetos); *semiconcreta/visual* (pictórica); *verbal* (linguagem); e *simbólica* (notação matemática). Esta classificação ajuda a diferenciar as várias formas que uma ideia ou um conceito matemático podem assumir, mas dá também indicações sobre as capacidades necessárias para sua compreensão.

Os termos representação numérica, gráfica, verbal, simbólica e dual foram utilizados num estudo desenvolvido por Matteson (2006). Segundo esta autora, as representações numéricas reportam-se à utilização de números, recorrendo a dízimas, frações, percentagens ou outros; ou uma lista numérica, como uma lista de números que aparecem como resultados de probabilidades ou ao continuar um padrão/sequência de números. As representações gráficas contemplam uma variedade de representações visuais distintas, como as pictóricas, modelos, diagramas ou gráficos. As representações verbais requerem o uso do discurso para entender, descrever, analisar, explicar ou refletir sobre representações numéricas, algébricas ou gráficas, associadas ao uso da linguagem escrita ou oral. As representações simbólicas têm como foco o recurso a notação simbólica e incluem o uso de variáveis (e.g., equações, expressões algébricas, fórmulas). Por fim, as representações duais não constituem uma categoria diferenciada, são encaradas como uma ligação entre as quatro categorias anteriores, sendo aplicadas quando se recorre a representações de duas categorias representacionais diferentes, sendo que nenhuma apresenta detalhes suficientes para ser considerada como independente.

Tendo estas categorizações por base, optamos por formular um sistema representacional que cruza algumas das ideias apresentadas anteriormente e que se traduz no diagrama da figura 1. Consideramos cinco categorias principais (ativa, verbal, visual, numérica e simbólica), mas também as representações duais resultantes da utilização complementar de duas das principais.

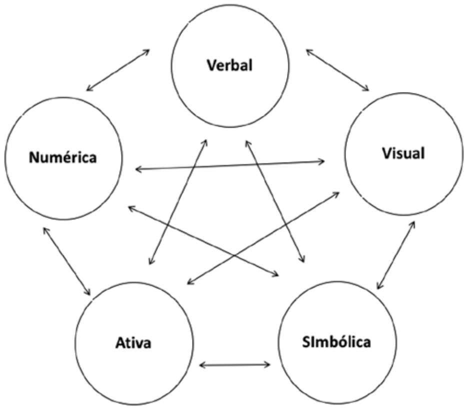


Figura 1. Múltiplas representações

É fundamental refletir sobre a diversidade de representações que se podem utilizar e sobre os correspondentes sistemas de representação, uma vez que traduzem diferentes tipos de raciocínio e contextos de trabalho, mas também reforçam a importância de se estimular os alunos a estabelecer relações entre as várias componentes, articulando ações, imagens e símbolos. Reforçando estas ideias, a investigação sobre a utilização de diferentes representações tem proporcionado um conjunto de evidências sobre os benefícios da utilização de múltiplas representações (Tripathi, 2008).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DOS ESTILOS DE APRENDIZAGEM ÀS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

Nem todos os alunos têm as mesmas preferências quando se trata do ensino e aprendizagem (da matemática), de facto podem ter diferentes estilos de aprendizagem que condicionam o modo como comunicam o seu raciocínio e as representações que usam. A preferência refere-se à abordagem predileta e habitual de um indivíduo para organizar, representar e processar informação, que subsequentemente afeta o modo como compreende e resolve problemas, e que está relacionada com os estilos cognitivos de cada indivíduo. Enfatizando esta perspetiva, tanto psicólogos como educadores matemáticos (e.g., Krutetskii, 1976; Vale et al., 2018) propõem uma tipologia de estilos de aprendizagem de acordo com as estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos: *Visualizadores ou geométricos* - preferem usar estratégias de resolução visuais (figuras, diagramas) ou esquemas pictórico-visuais, mesmo perante problemas que podem ser mais facilmente resolvidos com ferramentas analíticas; *Verbalizadores, não visuais ou analíticos* - preferem usar abordagens lógico-verbais ou estratégias de resolução não visuais (representações algébricas, numéricas, verbais), mesmo perante problemas em que poderia ser mais simples usar uma abordagem visual; e *Harmónicos, mistos ou integrados* - não tem uma preferência específica pelo pensamento lógico-verbal ou visual-pictórico, e tendem a combinar estratégias analíticas e visuais, apresentando assim um estilo de pensamento integrado. O continuum de verbalizadores e visualizadores é o mais amplamente aceite no domínio da educação matemática (Krutetskii, 1976).

Figura 2. Estilos de aprendizagem dos alunos na resolução de problemas

Estas questões têm fortes implicações nas práticas de sala de aula e, em particular, nas escolhas dos professores. Seja com a intenção de atender à diversidade de estilos de aprendizagem, com o propósito de ampliar o repertório de estratégias dos alunos, ou mostrar o potencial de certas ferramentas matemáticas. Os professores devem promover o uso de ambas as abordagens, analíticas e visuais e, se possível, integrá-las com a finalidade de construir compreensões ricas de conceitos matemáticos. Apesar dos diferentes estilos de aprendizagem que um professor pode encontrar na sala de aula, os alunos devem experimentar o uso de diferentes abordagens para o mesmo problema, sejam de natureza visual ou não visual.

Acreditamos que as tarefas com múltiplas resoluções dão aos alunos a oportunidade de aplicar os seus estilos de pensamento, qualquer que seja a natureza, e também de contactar com uma diversidade de estratégias e representações que contribuirão para a extensão do seu repertório. Neste enquadramento, e de acordo com a nossa própria experiência, consideramos que a visualização pode ter um grande potencial, quer como contexto em que a tarefa é apresentada, quer como veículo para chegar a uma solução. As estratégias visuais não são novas na literatura, mas geralmente são preteridas em relação às analíticas. Essa situação não beneficia os alunos, pois as abordagens visuais podem ser um excelente complemento ao pensamento analítico ou até mesmo ajudar a gerar resoluções mais simples e mais significativas para os alunos. A abordagem visual, sendo transversal, mediada por tarefas com múltiplas resoluções, contribui não só para uma melhor compreensão da matemática e para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, mas sobretudo para mostrar uma nova perspetiva da matemática. Isto significa que os alunos podem superar a ideia de ver a matemática como uma coleção isolada de temas, composta por um conjunto de fórmulas e procedimentos que devem memorizar e dominar, quando, na verdade, podem ter a oportunidade de vê-la como um conjunto de grandes ideias e conexões significativas. Vejamos o exemplo da figura 3 que procura ilustrar o que acabamos de referir.

Num quadrado inscreveu-se um círculo. Por sua vez, inscreveu-se outro quadrado no círculo. Qual é a área do menor quadrado, se a área do quadrado maior tem uma unidade de área.

Figura 3. Problema dos quadrados

Trata-se de um problema tradicional de geometria ao nível do 3.º ciclo, mas não de resolução imediata. Contudo, torna-se um problema acessível para alunos desse nível que não dominem os conceitos necessários ou até de níveis inferiores se tiverem alguma perceção espacial, recorrendo a propriedage básicas das figuras envolvidas. A figura 4 mostra que basta considerar o quadrado menor na posição mais conveniente para procurar relações mais simples, sem recorrer a fórmulas ou a outros conceitos (e.g. trigonometria, semelhança, teorema de Pitágoras). Trata-se de uma resolução dinâmica, pois ao colocar o quadrado menor com as diagonais na vertical e na horizontal, o círculo tona-se dispensável. E tornando a utilizar uma resolução dinâmica (como se mostra na figura 4) ou a relação parte-todo da figura, concluímos facilmente que a área do quadrado menor é metade da área do maior, ou seja, tem meia unidade de área.

Figura 4. Resolução visual do problema dos quadrados

São estas resoluções que valorizamos, pois, tarefas com características visuais, podem ajudar os alunos a superar algumas dificuldades, com conteúdos e procedimentos, resolvendo as tarefas com sucesso. Uma resolução visual, normalmente, recorre a uma forte orientação espacial com base nas propriedades das figuras envolvidas. As formas visuais de representação têm sido valorizadas nos últimos anos, em parte porque estão facilmente disponíveis, mas também porque vários investigadores têm concluído que desempenham um papel importante na resolução de problemas (Tripathi, 2008). Resolver o mesmo problema de várias formas, por um lado, e distinguir e interpretar diferentes formas de representação de objetos e situações matemáticas por outro lado, são reconhecidas como algumas das competências-chave necessárias para uma boa literacia matemática. Comparando diferentes resoluções para uma mesma tarefa, as diferenças ou semelhanças podem ser identificadas e ilustradas, por exemplo no recurso a diferentes representações de um ou mais conceitos matemáticos que têm subjacentes estilos de aprendizagem distintos.

A proposta de tarefas com diferentes resoluções, que implicam a utilização de múltiplas representações, facilita a análise de um problema por parte dos alunos, contribuindo para a sua proficiência na resolução de problemas, pois pode contribuir para um melhor desempenho por parte dos alunos, dando oportunidade a que optem pela estratégia que melhor dominam ou lhes convenha. Por outro lado, permite que, ao solicitar que o aluno resolva a tarefa por mais do que um processo (pode envolver conceitos estratégias de resolução ou representações diferentes, isoladas ou em conjunto), mostre a sua flexibilidade (ou divergência) de pensamento o que contribui para identificar estratégias alternativas e originais.

Vejamos um exemplo de um problema com múltiplas resoluções onde a resolução visual pode constituir uma alternativa mais compreensível para os alunos numa determinada fase da sua aprendizagem.

Três lápis , A, B, C, têm em conjunto 81 cm de comprimento. A é mais comprido 7 cm do que B. C é mais curto 4 cm do que B. Qual é o comprimento de A? Resolve por mais que um processo.

Figura 5. Problema dos lápis

Trata-se de um problema para diferentes níveis de ensino envolvendo vários processos de resolução, recorrendo a diferentes estratégias de resolução e representações, como se pode observar de seguida. Um aluno do 3.º ciclo utilizará uma resolução analítica, recorrendo a representações simbólicas (algébricas), p.e. equações ou sistemas de equações (figura 6).

$$x+(x+7)+(x-4)=81 \qquad \begin{cases} A+B+C=81 \\ A=B+7 \\ C=B-4 \end{cases}$$

Figura 6. Resoluções analíticas

Também pode ser resolvido a partir do 1.º ciclo, através de uma resolução analítica, recorrendo a representações e relações numéricas. É utilizada a estratégia de tentativa-erro, estando os dados organizados numa tabela (figura 7).

A	B	C	total
27	27	27	
34 +7	27	27	
34	27 -4	23	84
-1 $\boxed{33}$	-1 $\boxed{26}$	22 -1	$\boxed{81}$ -3

Figura 7. Resolução analítica

Contudo, há outro tipo de resolução, a visual, usando o modelo da barra, traduzindo as condições do problema, que conduz à construção de um esquema a partir do qual se pode gerar outro ainda mais simples (figura 8).

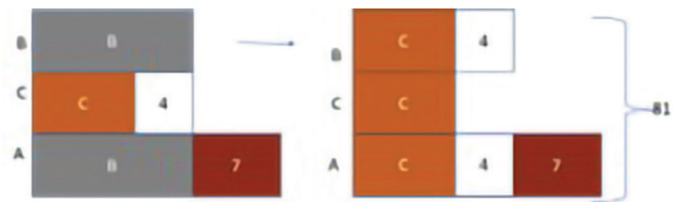


Figura 8. Resolução visual

A partir do último esquema emergem relações numéricas que permitem chegar de imediato à solução (figura 9).

4+4+7=15
81-15=76 → C=22 B=26 A=33
76:3=22

Figura 9. Resolução analítica

Esta última resolução numérica é muitas vezes aquela que alunos do ensino básico 1.º/2.º ciclos apresentam, mas nem todos chegam a esta resolução de forma compreensível. Contudo, o esquema da figura 8 dá significado aos símbolos da figura 9.

UM OLHAR SOBRE A RESOLUÇÃO DE ALGUMAS TAREFAS

Vejamos agora alguns exemplos de problemas apresentados a alunos do ensino básico (Tarefa 1) e da formação inicial de professores (Tarefas 2, 3 e 4) onde podemos observar as respetivas resoluções e as representações utilizadas. Procura-se evidenciar o tipo de representações usualmente privilegiadas pelos alunos em tarefas desta natureza, embora não esgote todas as possibilidades. Nestes exemplos, que permitem múltiplas abordagens, privilegiamos as (re)soluções visuais, sendo sempre solicitado aos alunos que apresentem mais do que uma resolução, para ir mais além da evidente, esperando que surja alguma resolução original. Há problemas que, pelo seu contexto e pela prática normalizada, induzem os alunos para uma resolução analítica, no entanto muitas destas situações podem ser abordadas utilizando outras estratégias e representações, como ilustramos nos exemplos seguintes.

Tarefa 1 – O paralelogramo

O retângulo [ABCD] foi construído unindo por um lado dois quadrados geometricamente iguais. Cada quadrado tem 5 cm de lado. No retângulo desenhou-se o paralelogramo colorido em que cada vértice é ponto médio de um dos lados dos quadrados iniciais. Qual é área do paralelogramo em cm?

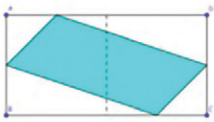
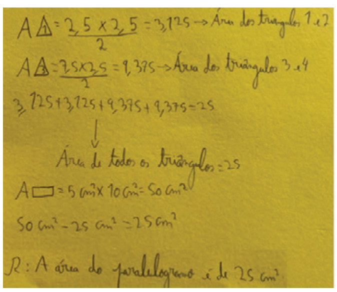


Figura 10. Problema do paralelogramo

Este problema, proposto no âmbito da Geometria, possibilita a utilização de diferentes estratégias, quer de natureza visual, quer de natureza analítica. Surgiram na turma resoluções distintas, evidenciando múltiplas representações, tendo predominado as abordagens analíticas. Nas figuras 11 e 12 podemos observar duas resoluções representativas das produções realizadas pelos alunos.



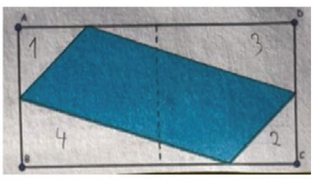


Figura 11. Resolução analítica

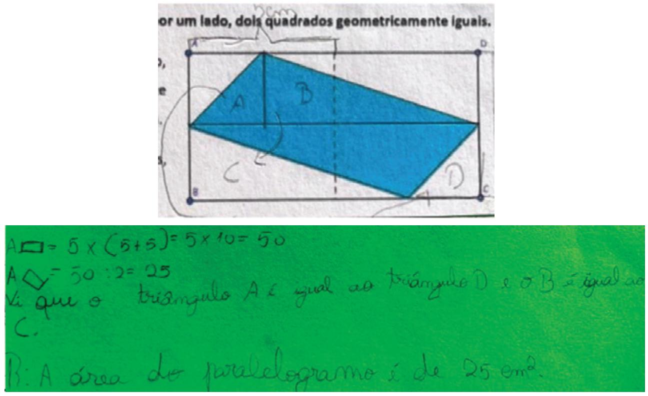


Figura 12. Resolução visual

Na resolução apresentada na figura 11, os alunos optaram por uma resolução que seria expectável (analítica), dado estarem a trabalhar estes conteúdos nas aulas, com aplicação das fórmulas das áreas, subtraindo à área do retângulo as áreas dos triângulos numerados. Recorreram a representações simbólicas, tendo usado a figura apenas como recurso para identificar os triângulos. Na resolução da figura 12, optaram por uma abordagem visual, deslocando partes do paralelogramo, devidamente assinaladas com as letras A, B, C, D e setas, de modo a constatar que a área da figura colorida correspondia a metade da área do retângulo. Trata-se de uma resolução dinâmica que permitiu aos alunos chegar à solução de uma forma simples e eficaz. Foram usadas representações visuais (desenho) e também simbólicas (fórmula da área do retângulo), no entanto as representações visuais tiveram um impacto maior no raciocínio dos alunos.

Tarefa 2 – Os livros

A Joana emprestou 4/9 dos livros da sua estante ao Pedro e ainda ficou com 35 livros. Descubra quantos livros tem a Joana. Apresente mais do que um modo.

Figura 13. Problema dos livros

O problema apresentado foi proposto durante a exploração do tema Números Racionais. Ao longo das aulas, estes alunos contactaram com o modelo da barra (que não conheciam), representação que facilita a resolução de problemas de âmbito numérico ou algébrico, já que permite dar significado às situações problemáticas propostas. Esta abordagem teve um impacto positivo junto destes alunos que lhe reconheceram grande potencial por comparação com estratégias analíticas, associadas a manipulações numéricas sem significado. Por esta razão os exemplos apresentados nas figuras 14 e 15 evidenciam o recurso ao modelo da barra.

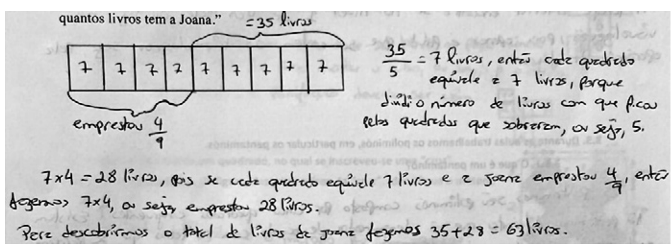


Figura 14. Resolução visual

As estratégias utilizadas nas duas resoluções são similares, ambas visuais, sendo o desenho (modelo da barra) um elemento crucial para compreender o problema, pondo claramente em evidência o significado parte-todo, o que facilita o estabelecimento das relações numéricas necessárias para chegar à solução. Apesar das representações visuais serem aqui dominantes, os alunos recorreram ainda a representações verbais (figura 14), explicitando o raciocínio por palavras, e a representações numéricas (Figura 15), complementando o esquema com os cálculos correspondentes.

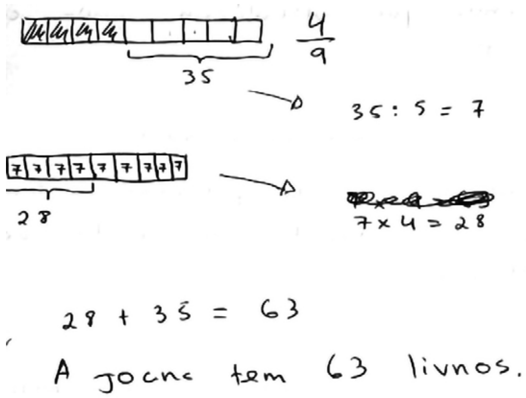


Figura 15. Resolução visual

Tarefa 3 – As casinhas

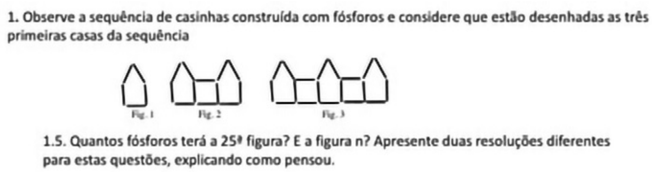

1. Observe a sequência de casinhas construída com fósforos e considere que estão desenhadas as três primeiras casas da sequência

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

1.5. Quantos fósforos terá a 25ª figura? E a figura n? Apresente duas resoluções diferentes para estas questões, explicando como pensou.

Figura 16. Problema das casinhas

Este problema foi proposto no âmbito do pensamento algébrico. Trata-se de uma tarefa que, embora seja apresentada em contexto visual, permite optar por múltiplas abordagens, quer analíticas quer visuais. Apresentamos nas figuras 17 e 18 dois exemplos de resoluções que emergiram do trabalho destes alunos.

Na resolução apresentada na figura 17, foi privilegiada uma estratégia analítica, para determinar o número de fósforos da 25.ª e enésima figuras, começando com um raciocínio de tipo recursivo para os termos próximos, sendo identificada uma variação de sete unidades. De modo a generalizar para termos distantes, estes alunos tiveram por base as relações numéricas identificadas e expressas na tabela. Como complemento às representações numéricas utilizadas recorreram ainda a representações verbais, explicando por palavras o modo como pensaram. A resolução observada na figura 18 tem um cunho visual, sendo claro que os desenhos tiveram um papel crucial na identificação da relação funcional, quer para termos próximos, como distantes. Para além dos desenhos, os alunos usaram uma tabela para organizar a informação, tendo recorrido a representações visuais, mas também simbólicas.

Este problema apresenta caraterísticas diferentes dos anteriores e dos tradicionalmente utilizados em sala de aula. Pode considerar-se uma tarefa autêntica pois tem por base situações que, embora por vezes possam ser fictícias, representam tipos de problemas encontrados em contexto real que facilitam o estabelecimento de conexões entre a matemática escolar e a realidade. Uma característica destas tarefas é que a solução é conseguida apenas por manipulação dos materiais fornecidos (figura 19) seguindo uma abordagem *hands-on*. Neste caso, todos os alunos conseguiram chegar à solução, apresentando diferentes modelos. A figura 20 mostra os alunos ativamente envolvidos na resolução do problema, até chegarem à construção do modelo solicitado.

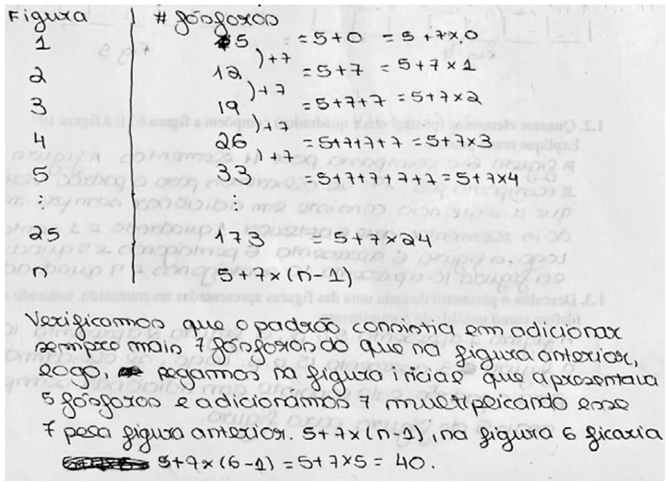


Figura 17. Resolução analítica

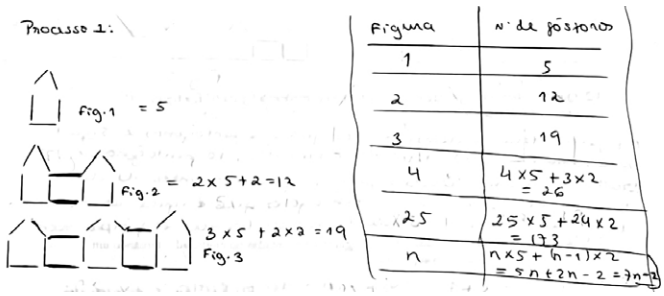


Figura 18. Resolução visual

Tarefa 4 – O poço

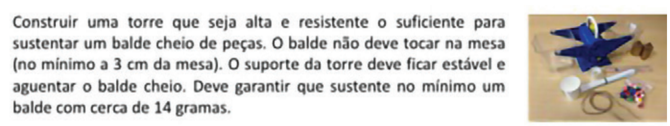

Construir uma torre que seja alta e resistente o suficiente para sustentar um balde cheio de peças. O balde não deve tocar na mesa (no mínimo a 3 cm da mesa). O suporte da torre deve ficar estável e aguentar o balde cheio. Deve garantir que sustente no mínimo um balde com cerca de 14 gramas.

Figura 19. Problema do poço

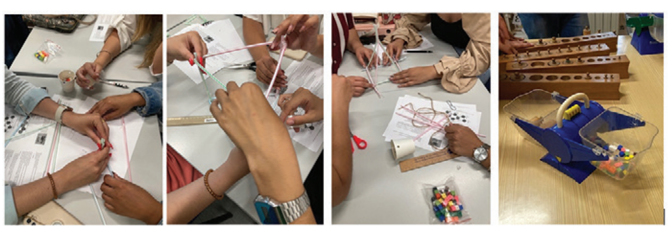


Figura 20. Os alunos na resolução do problema

Uma vez que esta tarefa foi desenvolvida no âmbito de uma *Gallery Walk*, para além de recorrerem a representações ativas, tiveram que utilizar outras representações, sobretudo verbais e simbólicas, aquando da construção do poster que retrata e explica as diferentes fases da resolução do problema, como mostra a figura 21.

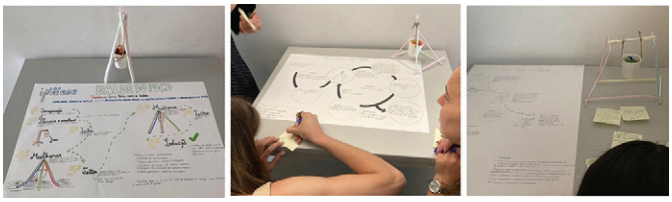


Figura 21. Pósteres sobre o problema do poço

Em jeito de síntese, na figura 22 apresentam-se as representações principais, bem como as representações duais, utilizadas na resolução dos problemas anteriores.

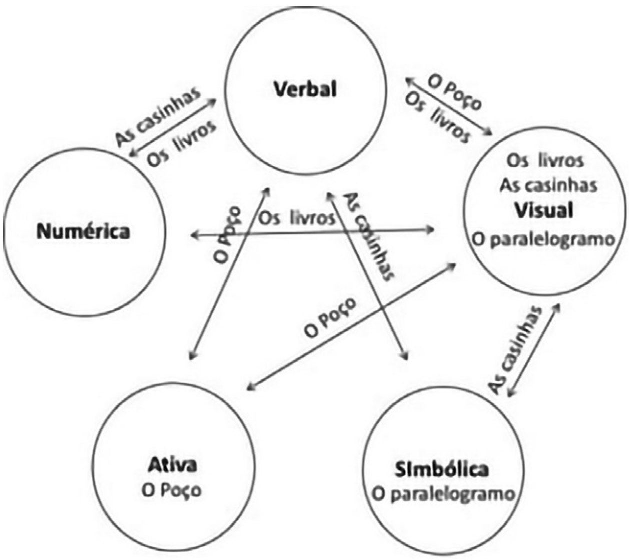


Figura 22. As representações principais e suas duais, identificadas nas quatro tarefas

Este esquema não pretende esgotar todas as interações entre representações ativas, verbais, numéricas, simbólicas e visuais. Salienta antes o facto de nem sempre na resolução de uma tarefa se utilizar apenas uma representação, embora possa haver um tipo que seja dominante ou essencial no ataque ao problema. De modo geral, os alunos recorreram a múltiplas representações, de categorias representacionais diferentes, com o intuito de complementar o seu raciocínio e facilitar a chegada à solução, uma vez que há limitações que se reconhecem nas representações principais que, isoladamente, podem não ser suficientes na resolução de uma tarefa.

A CONCLUIR

As tarefas que apresentámos são problemas que envolvem fórmulas matemáticas e conceitos típicos incluídos nos currículos escolares, que permitem diferentes resoluções, fomentando assim a utilização de múltiplas representações. Estas situações apoiam vários estilos de aprendizagem e de manipular a matemática, indo ao encontro do que defende o NCTM (2014). Além disso, dão aos alunos oportunidades de operar e raciocinar a partir de diferentes representações e ideias de formas únicas: os alunos que resolvem tarefas deste tipo serão motivados a procurar resoluções criativas e a pensar de forma mais flexível na resolução de outros problemas, a tentar métodos e representações alternativas para chegar à solução.

Os professores tradicionalmente utilizam e confiam mais nas representações simbólicas e analíticas. Consequentemente, os alunos tendem a fazer o mesmo. Por essa razão damos uma importância especial às estratégias e representações visuais, pela pouca visibilidade que têm e pelos benefícios que acarretam na aprendizagem, procurando assim abranger diversos estilos de aprendizagem. Pretendemos também salientar a vantagem de utilizar múltiplas representações na resolução de tarefas e, acima de tudo, de as integrar, recorrendo a representações duais e frequentemente a abordagens mistas. Desafiar os alunos a pensar em abordagens diferentes na mesma situação problemática aumenta a probabilidade de terem de utilizar ideias e representações de natureza diversa. Como Pólya refere, é melhor resolver um problema de cinco modos diferentes do que cinco problemas diferentes do mesmo modo.

Referências

Bruner, J. (1966). *The process of education.* Harvard University Press.

Goldin, G. A. (2018). Mathematical representations. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 409–413). Springer.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* University of Chicago Press.

Matteson, S.M. (2006) Mathematical Literacy and Standardized Mathematical Assessments. *Reading Psychology*, 27(2–3), 205-233, https://10.1080/02702710600642491

NCTM (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* NCTM.

Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*, 438–445.

Vale, I., Pimentel, T, & Barbosa, A. (2018). The power of seeing in problem solving and creativity: an issue under discussion. In N. Amado; S. Carreira & K. Jones. (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect* (pp. 243–272). Springer.

Ana Barbosa

Isabel Vale

Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Escola Superior de Educação

Boas representações para uma boa comunicação

Jaime Carvalho e Silva

As novas AE para o Ensino Básico[1] definem vários objetivos e um deles é "Desenvolver a capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática". Tal objetivo mantém-se relevante no Ensino Secundário mas os conceitos matemáticos envolvidos serão necessariamente diferentes e portanto o mesmo objetivo concretiza-se de forma diferente. Na versão das novas AE para o Ensino Secundário que esteve em discussão pública[2] uma das ideias-chave tinha a ver com a ênfase na "comunicação" com o título "Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado" e expresso deste modo:

> A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos.

A interpretação de gráficos, de esquemas, de diagramas ou de dados, assim como a justificação de afirmações pressupõe um entendimento das representações usadas e do seu possível significado.

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

O que deveremos entender por representação matemática? Logo no primeiro ano do estudo internacional PISA[3] (*Programme for International Student Assessment*), no longínquo ano 2000, foi definido explicitamente que a representação inclui:

- a descodificação e a codificação, a tradução, a interpretação e a distinção entre formas diferentes de representação de objetos e de situações matemáticas, e das relações entre as várias representações; e
- a escolha e a mudança de formas distintas de representação, de acordo com a situação e a intenção (p. 6).

Mais adiante, neste mesmo documento, são referidos explicitamente alguns tipos de representações:

> O pensamento funcional, isto é, o pensamento em termos de relações, é um dos objetivos fundamentais do ensino da disciplina de matemática. As relações podem ter uma variedade de representações, incluindo as simbólicas, as algébricas, as gráficas, as tabulares e as geométricas. As diferentes representações podem servir fins distintos e terem propriedades diferentes. Daí que a tradução das várias representações seja muitas vezes de importância chave quando se lida com situações e com tarefas (p. 8).

O que se espera das diferentes representações matemáticas é que elas representem efetivamente o que se pretende representar, ou que a representação não crie ideias erradas sobre o que se pretende representar. São conhecidos muitos casos em que tal não é atingido, por desconhecimento ou por má fé.

BOAS REPRESENTAÇÕES

Um dos problemas com as representações matemáticas é que elas não consigam representar efetivamente o que se pretende representar, ou que a representação possa confundir, ou pior, até criar ideias erradas sobre o que se pretende representar. São conhecidos muitos exemplos, sobretudo em tempos de campanha eleitoral, de gráficos distorcidos para fazer passar uma ideia "enganosa" para fins eleitorais. Um dos casos mais interessantes é o de um exercício criado pelo estudo internacional PISA em que se pede para comentar se uma afirmação jornalística como "o gráfico mostra que, de 1998 para 1999, houve um aumento muito grande do número de assaltos" estaria correta em função da representação gráfica utilizada (figura 1).

Um aluno deve ser capaz de perceber que esta representação não traduz a afirmação avançada e deve ser capaz de propor uma representação alternativa que não induza o mesmo tipo de erro. Para esclarecer a qualidade de cada representação é necessário fazer a análise crítica da mesma, incluindo uma análise do contexto de cada representação. Claramente não será possível atingir as competências de "Informação e comunicação" do PASEO sem trabalhar na sala de aula questões como a referida. Diz o PASEO:

- utilizar e dominar instrumentos diversificados para pesquisar, descrever, avaliar, validar e mobilizar informação, de forma

[1] http://aem.dge.mec.pt/pt/projeto

[2] http://www.dge.mec.pt/noticias/consulta-publica-aprendizagens-essenciais-de-matematica-para-o-ensino-secundario

[3] Ver "PISA 2000 - Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses", Ramalho G. (coord.), Lisboa, GAVE, 2002

crítica e autónoma, verificando diferentes fontes documentais e a sua credibilidade (ME, 2017, p. 22).

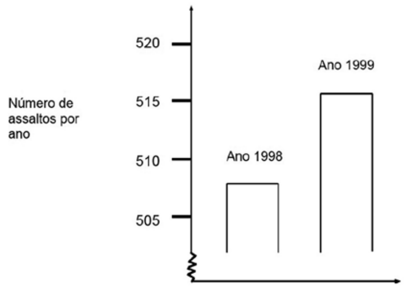


Figura 1. Questão M179 do PISA (*Matemática - Itens Libertos* 2006 / 2003/ 2000)

Por isso, deverão ser criadas condições para que os alunos, na sala de aula e fora dela, consigam analisar informação de forma crítica e autónoma, descrevendo o seu raciocínio e justificando as afirmações produzidas.

CONDIÇÕES PARA OBTER BOAS REPRESENTAÇÕES

Para conseguir representações matemáticas satisfatórias há duas estratégias possíveis: 1) partir de uma representação dada e verificar se as conclusões que se poderão retirar diretamente da representação são consistentes com os dados disponíveis; 2) criar uma representação a partir dos dados fornecidos que cumpra uma série de condições básicas de modo a representar de forma fiável os dados.

Na realidade, as duas estratégias estão relacionadas pois em 1) podemos verificar se, pelo menos, as condições básicas de 2) são satisfeitas. Vejamos então quais poderão ser essas condições.

a) A escala no eixo dos YY está truncada?

Em muitos gráficos em coordenadas cartesianas a escala no eixo dos YY não vai desde o valor zero até um valor máximo, mas é truncada para mostrar melhor as variações; contudo, ao mesmo tempo exagera essas variações e pode deixar no ar uma ideia de variações bruscas que não correspondem à realidade. É este o caso do exemplo da figura 1.

O exemplo mais sugestivo é o que se pode encontrar no clássico livro de Darrel Huff *"Como mentir com a Estatística"*, cuja edição original data de 1954. Os gráficos da figura seguinte falam por si.

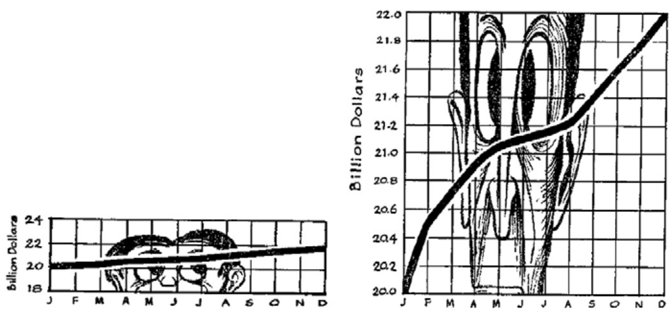


Figura 2. "Há terror nos números" (Huff, 2013)

b) A escala no eixo dos YY é uniforme?

Vários gráficos usam no eixo dos YY uma escala em que cada unidade é representada com um espaçamento igual, mas outros usam, por exemplo, uma escala logarítmica em que o que é representado não é o valor da ordenada mas sim o valor do logaritmo da ordenada.

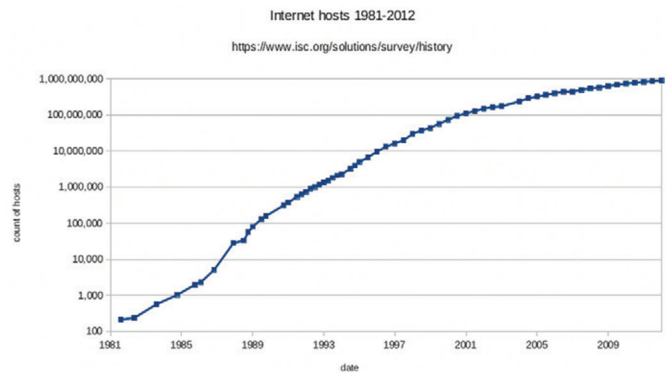


Figura 3. Número de servidores na internet entre 1981 e 2012 (By Ke4roh - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19490495)

Neste gráfico cada intervalo no eixo dos YY representa não um intervalo para y mas sim para $\log y$. Estes gráficos são usados quando o intervalo de variação do y é demasiado grande para se conseguir fazer uma boa representação. Isto é consequência do facto de não haver um desenho decente possível para abarcar um intervalo entre 100 e 1 000 000 000.

Olhando para a figura 3 poderemos ser levados a concluir que o crescimento é relativamente lento quando na realidade é muitíssimo maior do que o gráfico parece representar e poderemos ser enganados se não repararmos que a escala no eixo dos YY não é uniforme. Afinal, graficamente, olhando para lá, não parece um crescimento muito grande. Mas é, e até é um crescimento exponencial!

c) A escala no eixo dos YY está orientada no sentido positivo?

Normalmente o eixo das ordenadas está orientado de baixo para cima e esse é o sentido positivo. Mas nem sempre acontece assim e a impressão deixada pelo gráfico pode ser muito diferente da realidade dos números em que se baseia.

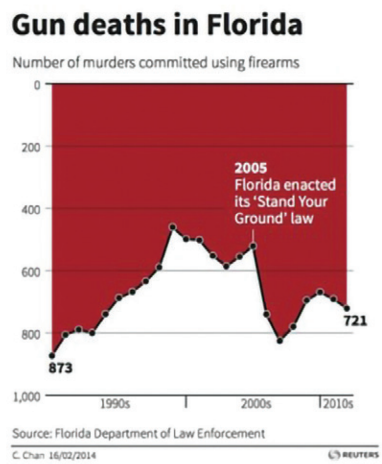


Figura 4. Número de mortes com arma de fogo na Flórida, EUA, entre o início dos anos 90 e 2012 (Parikh, 2014)

Numa análise apressada do gráfico da figura 4 poderíamos concluir que a lei implementada no estado da Florida em 2005 teria tido como consequência uma diminuição do número de assassínios cometidos usando armas de fogo. Ora acontece exatamente o contrário pois o eixo dos YY varia entre 1000 (o maior valor, em baixo) e 0 (o menor valor, em cima). Constatamos que em 2005 houve cerca de 550 assassínios e passados poucos anos o número já era superior a 800, tendo havido uma pequena diminuição até chegar a 721 por volta de 2012.

d) No gráfico estão representadas taxas ou valores absolutos?

Muitos gráficos apresentam apenas taxas de variação e não valores absolutos e podem acabar por dar uma ideia enganosa da situação em causa.

O gráfico da figura 5 pretende provar que a população de falcões no estado americano do Illinois, depois de estar perto do desaparecimento, cresce a uma taxa muito confortável. Ora a taxa máxima representada no gráfico é de apenas 0,06% o que permite perceber que em cada 100 falcões existentes o aumento anual será de uns 5 falcões; mas nem sequer sabemos quantos falcões haverá no estado do Illinois. Serão apenas 20? Então aumenta 1 falcão por ano...

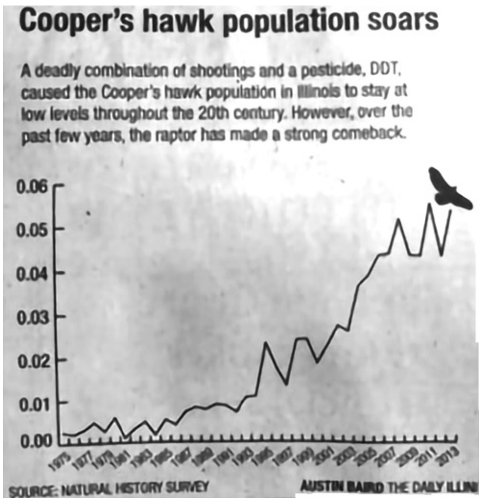


Figura 5. A taxa de variação da população de falcões de Cooper no estado do Illinois entre 1975 e 2013 (Notopoulos, 2014)

e) Os gráficos são cumulativos?

Quando se apresentam valores acumulados ao longo dos anos muitas vezes "esconde-se" o valor real de cada ano. E um gráfico que aparenta um crescimento que parece constante pode na realidade beneficiar de, em cada ano, se ir adicionando o valor do ano ao valor do ano anterior e assim exibir sempre um crescimento global quando anualmente poderá até nem haver qualquer crescimento.

O gráfico da figura 6, analisado com cuidado, mostra uma taxa de variação (declive da tangente ao gráfico) cada vez menor. Isto deve querer significar que o aumento anual será cada vez menor. E o que se pode observar no gráfico da figura 7 é exatamente uma diminuição do rendimento anual. Qual dos gráficos descreve melhor a evolução dos rendimentos da empresa? Qual será o mais atraente?

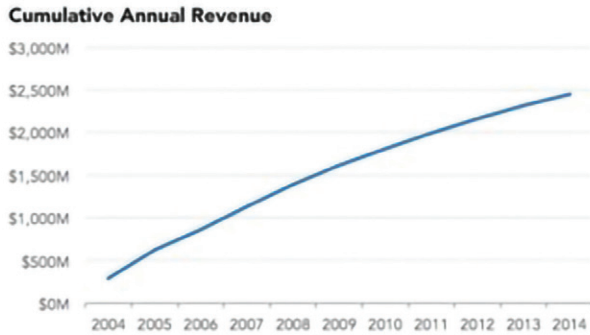


Figura 6. Gráfico do rendimento acumulado por uma empresa entre 2004 e 2014 (Parikh, 2014)

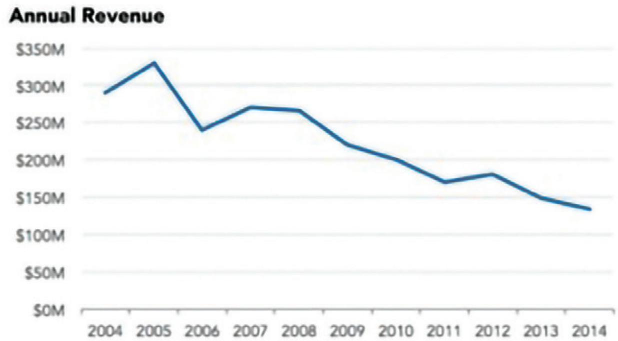


Figura 7. Gráfico do rendimento anual da mesma empresa da figura 6 entre 2004 e 2014 (Parikh, 2014)

f) Os dados disponíveis são coerentes com o gráfico?

Muitas vezes o gráfico é opaco e nem sequer aparece uma escala no eixo dos XX ou dos YY e é impossível verificar diretamente a adequação do gráfico. Outras vezes o texto contém dados que nem sempre são coerentes com o que é representado no gráfico. Mas o pior é quando os gráficos são criativos e acrescentam algo que não está nos dados ou nem sequer tem sentido considerar no caso em consideração.

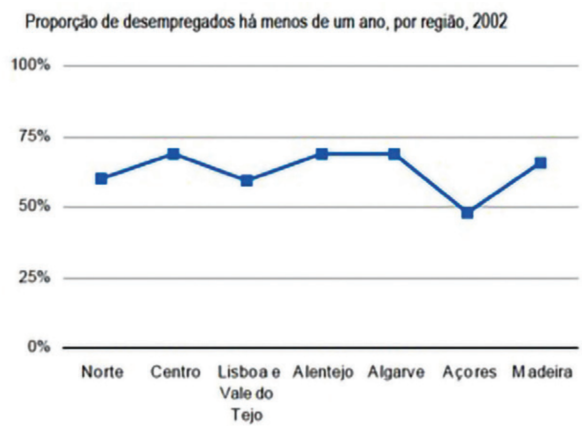


Figura 8. Proporção de desempregados há menos de um ano, por região, 2002 (Alexandrino da Silva, 2003)

Neste gráfico é comunicada uma mensagem de haver uma evolução ao longo do eixo dos XX, quando os dados são totalmente independentes. Não faria qualquer sentido afirmar que a proporção de desempregados aumenta do Norte para o Centro e diminui do Centro para Lisboa e Vale do Tejo; apenas se poderá afirmar que a proporção de desempregados é maior no Centro do que no Norte ou Lisboa e Vale do Tejo. As linhas que unem os valores não devem ser incluídas quando os dados são qualitativos.

RECOMENDAÇÕES

Os problemas levantados neste texto são apenas uma pequena parte das dificuldades que se podem encontrar quando se observam ou tentam construir gráficos. A consequência óbvia é que é preciso trabalhar frequentemente na sala de aula com gráficos de uma forma interpretativa e crítica. Não é possível comunicar corretamente sem uma representação clara, completa e fiel.

A construção de um gráfico não pode ser feita de forma descuidada ou apressada. O Dossiê Didático do Projeto ALEA intitulado "Notas sobre a criação e apresentação de alguns tipos de gráficos" contém indicações detalhadas muito úteis sobre os cuidados a ter com a construção de gráficos e deve pois ser trabalhado na sala de aula em todos os ciclos de escolaridade.

Referências

Alexandrino da Silva, A. (2003). IX – Representações Gráficas. Notas sobre a criação e apresentação de alguns tipos de gráficos. *ALEA-Dossiês Didáticos*. https://alea.ine.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=315&Itemid=1718&lang=pt

Huff, D. (2013). *Como mentir com a Estatística.* Lisboa: Gradiva.

Ministério da Educação {ME} (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Notopoulos, N. (2014). 13 Graphs That Are Clearly Lying. *BuzzFeed News*. October 3, 2014. https://www.buzzfeednews.com/article/katienotopoulos/graphs-that-lied-to-us

Parikh, R. (2014). *Como são feitos os gráficos enganosos – e como não ser enganado por eles.* blog Heap Analytics. https://gizmodo.uol.com.br/mentir-visualizacao-dados/

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática e CMUC - Universidade de Coimbra

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Dobragens numa folha de papel

A seleção de tarefas e recursos para a aula de matemática é algo que exige um grande investimento, por parte do professor, quer na pesquisa de ideias, quer na sua planificação.

Na realidade podemos criar tarefas desafiadoras para a sala de aula recorrendo a materiais simples e acessíveis a todos como, por exemplo, uma folha de papel A4. Foi este o material selecionado para esta proposta que pode ser desenvolvida em sucessivos anos de escolaridade, estabelecendo conexões entre diversos tópicos matemáticos.

Para tal podemos utilizar uma folha de papel como mostra o vídeo seguinte: http://youtu.be/LwjbFll5Udo

Ao efetuar a dobragem obtemos novas figuras planas. Um aspeto que é importante notar é que, embora as figuras obtidas sejam todas do mesmo tipo, não são todas iguais, o que deve contribuir para despertar a curiosidade dos alunos por se obterem triângulos e trapézios com diferentes tamanhos. Excelente oportunidade para falar de medida e comparar áreas e perímetros.

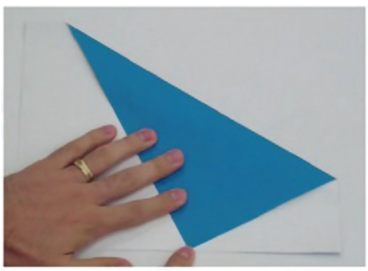


Figura 1. Dobragem inicial

Num nível de escolaridade mais avançado podemos introduzir novos elementos para alimentar a discussão. O professor pode aproveitar para estabelecer uma relação entre o comprimento e a largura da folha trabalhando assim os números. Por exemplo, a folha de papel pode ter as dimensões de 6 unidades de medida de comprimento e 3 de largura.

E a partir da análise de figura 2 os alunos podem ser incentivados a:

– Formular conjeturas sobre as várias figuras planas obtidas.
– Escrever uma expressão algébrica para as áreas dos triângulos.
– Discutir entre que valores pode variar P?

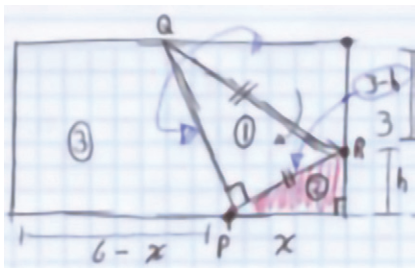


Figura 2. Representação das várias figuras planas após a dobragem

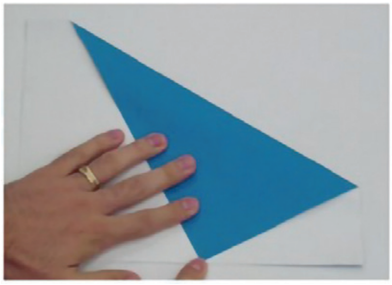
Temos dois triângulos retângulos, vamos determinar a área do triângulo menor. Recorrendo ao teorema de Pitágoras que os alunos estudam no 8º ano é possível estabelecer relações entre os lados do triângulo.

No 9º ano os alunos estudam a função quadrática e mais tarde, no 10º ano aprofundam o estudo desta função. Recorrendo ao GeoGebra obtemos uma representação gráfica que pode ajudar a fazerem conjeturas sobre a altura do triângulo.

Nélia Amado
Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Dobragens numa folha de papel

1. Dobra uma folha de papel de modo que o canto superior direito toque o lado inferior da folha num ponto que designaremos por P, como é exemplificado no vídeo em http://youtu.be/LwjbFll5Udo



– Compara a tua dobragem com a dos teus colegas.

– Indica aspetos comuns e distintos entre a tua dobragem e a dos teus colegas. Procura justificar esses aspetos identificados.

– Considera os triângulos formados pela dobragem: a) Que relações se podem encontrar entre os repetivos lados? b) Se se alterarem as dimensões dos lados do triângulo maior o que acontece ao triângulo menor?

2. Desenvolve agora uma investigação sobre a área do triângulo menor formado no canto inferior direito e elabora um relatório da tua investigação explicando, em pormenor, a estratégia que utilizaste para resolver o problema.

   Nesta investigação, admite, por exemplo, que a medida do comprimento do retângulo é 6 unidades de medida e a altura 3 unidade de medida.

   – Concretiza entre que valores pode variar a altura do triângulo e a respetiva área. Haverá um triângulo de maior área? Qual será?

   – Apresenta os esquemas a que recorreste e as expressões que usaste. Se utilizares ferramentas gráficas como o GeoGebra, apresenta um esboço dos gráficos obtidos.

   – O que acontecerá se alterares as medidas do retângulo inicial?

A derivada da função inversa – uma abordagem gráfica

Carlos Albuquerque
Susana Carreira

A DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARITMO

A função exponencial de base *e* pode ser introduzida no ensino secundário de várias maneiras, sendo uma das possibilidades caracterizá-la como a única função do tipo $f(x)=a^x$ tal que $f'(x)=f(x)$. Esta é a abordagem proposta nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário que estiveram recentemente em discussão pública (RCAEMES, 2022). A função logaritmo natural pode ser caraterizada como a função inversa da exponencial e, para o estudo da sua derivada, no mesmo documento é proposta uma abordagem gráfica.

Desenvolvemos aqui essa abordagem, tendo como suporte tecnológico o GeoGebra. O método proposto permite concluir diretamente que

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

sem enunciar o teorema da derivada da função inversa.

Veremos ainda que esta abordagem gráfica pode ser usada como ilustração da demonstração do teorema da derivada da função inversa em circunstâncias mais gerais, na linha das demonstrações sem palavras (Doyle, et al., 2014).

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NO ESTUDO DE FUNÇÕES

A utilização e exploração de diversas representações matemáticas, em particular no estudo de funções, são processos considerados, desde há várias décadas, como impulsionadores da compreensão de conceitos e da interpretação do seu significado, em particular no âmbito da resolução de problemas (Santos-Trigo, Camacho-Machín, & Olvera-Martínez, 2018). As representações gráficas ganham evidente relevância quando se procura, por exemplo, dar um sentido geométrico à noção de derivada de uma função num ponto. Representações numéricas, nomeadamente tabelas, são igualmente úteis quando se pretende perceber o comportamento de uma função numa vizinhança de um dado ponto. Os diferentes sistemas representacionais envolvidos no estudo de funções, ao serem explorados e utilizados pelos alunos permitirão levá-los a reconhecer o respetivo grau de eficácia para a resolução de determinada questão sobre o comportamento ou as caraterísticas de uma função.

Uma das grandes potencialidades dos sistemas computacionais hoje disponíveis, como o GeoGebra, é o de conectar e relacionar de forma interativa múltiplas representações de conceitos matemáticos. No que se segue, iremos ilustrar como a abordagem geométrica e gráfica revela grande eficácia na compreensão de um teorema bem conhecido do cálculo diferencial.

A LINGUAGEM GEOMÉTRICA NAS FUNÇÕES INVERSAS

Dada uma função *f*, definida num intervalo *I* e injetiva, o gráfico da sua inversa é o conjunto de pontos $\{(f(x),x):x\in I\}$. Em termos geométricos, os pontos do gráfico da função f^{-1} são precisamente os pontos obtidos a partir dos pontos do gráfico de *f* através de uma reflexão na reta bissetriz dos quadrantes ímpares. De um modo geral, o ponto (y,x) é o simétrico do ponto (x,y) em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Quanto às retas tangentes ao gráfico da função inversa, são naturalmente as refletidas das tangentes ao gráfico de *f* nos pontos correspondentes.

Convém notar que, se uma reta tiver um declive finito $m\neq 0$, a reta obtida por reflexão na bissetriz dos quadrantes ímpares tem declive $\frac{1}{m}$. Este fato pode ser deduzido considerando na reta original dois pontos distintos (x_1,y_1) e (x_2,y_2). O declive desta reta é dado por $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Os pontos (y_1,x_1) e (y_2,x_2) estarão então na reta refletida e o declive desta reta é $\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$. As restrições relativas aos declives garantem que $x_1\neq x_2$ e que $y_1\neq y_2$. É agora evidente que o produto dos dois declives é 1.

A DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARITMO

Começamos com os gráficos das funções exponencial (*f*) e logaritmo (*g*), bem como com a bissetriz dos quadrantes ímpares. Os gráficos da exponencial e do logaritmo podem ser obtidos um do outro através da reflexão na reta (figura 1).

Consideramos agora um ponto genérico $X=(x,0)$, com $x>0$. O ponto $A=(x, \log x)$ está no gráfico do logaritmo. Pelo ponto *A* fazemos passar a reta tangente ao gráfico do logaritmo nesse ponto. Aqui admitimos que a função logaritmo é diferenciável e assim a tangente existe e tem declive igual à derivada no ponto x, isto é, $g'(x)$ (figura 2).

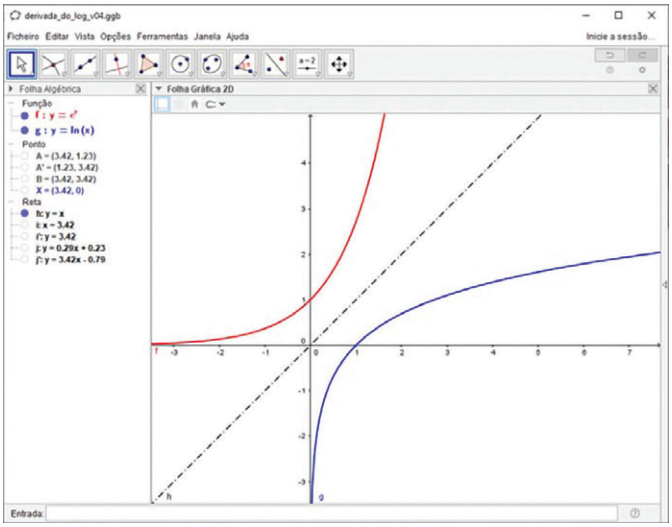


Figura 1. Gráficos das funções exponencial e logaritmo

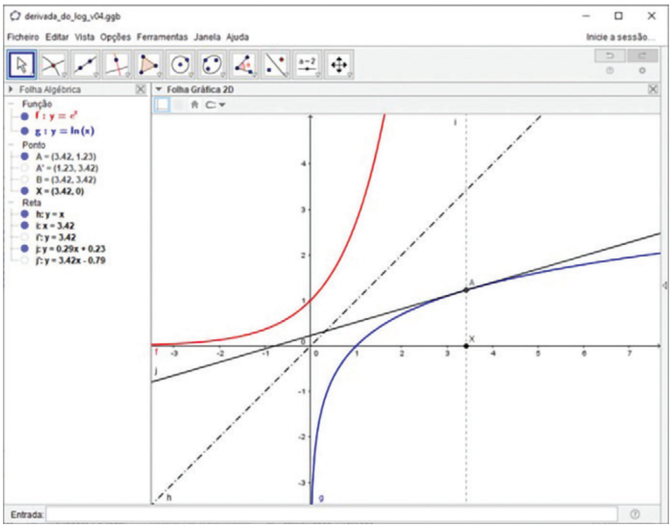


Figura 2. Reta tangente ao gráfico da função logaritmo

Uma vez que conhecemos a derivada da exponencial em qualquer ponto, vamos usar o gráfico da exponencial para obter a derivada do logaritmo em x. Refletimos na bissetriz dos quadrantes ímpares o ponto A e a reta tangente ao gráfico do logaritmo em A (figura 3).

O ponto refletido é $A'=(\log x, x)$. Este ponto está no gráfico da função exponencial. Dado que a exponencial verifica a relação $f'(x)=f(x)$, o declive da reta tangente ao seu gráfico no ponto A' é então x. Como as retas j e j' são obtidas uma da outra por reflexão na bissetriz dos quadrantes ímpares o produto dos seus declives é 1. Assim, o declive da reta j, tangente ao gráfico do logaritmo no ponto $A=(x, \log x)$, é $\frac{1}{x}$.

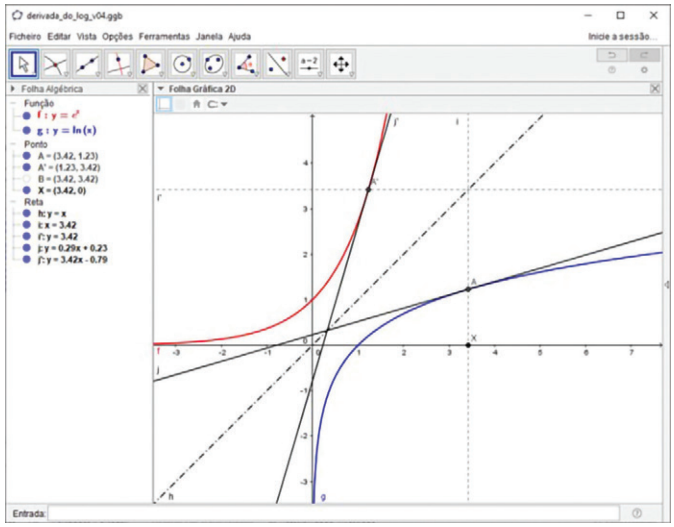


Figura 3. Reflexões na bissetriz dos quadrantes ímpares

A DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

O estudo da derivada da função inversa num ponto é normalmente feito enunciando e demonstrando um teorema (Smirnov, 1969; Ferreira, 1987; Spivak, 1994; Figueira, 1997; Sarrico, 1999). Com alguma frequência este teorema é apresentado e demonstrado apenas sob o ponto de vista analítico: dada uma função f definida num intervalo real I, diferenciável e injetiva nesse intervalo, e dado $y \in I$ tal que $f'(y) \neq 0$ prova-se que f^{-1} é diferenciável em $x=f(y)$ e temos o resultado conhecido:

$$(f^{-1})(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Em alguns textos, como Spivak (1994) e Smirnov (1969), pode encontrar-se uma interpretação geométrica desta fórmula. Ferreira (1987) demonstra que uma função f é diferenciável num ponto se e só se existe uma função afim cujo gráfico é tangente ao gráfico de f nesse ponto.

Podemos generalizar o processo gráfico usado para a função logaritmo ao estudo da derivada da função inversa de uma função diferenciável qualquer, desde que seja conhecida a derivada da função que se inverte no ponto em estudo e se esteja nas condições de existência da derivada da função inversa.

Queremos determinar a derivada de uma função f^{-1}, inversa de uma função f cuja derivada é conhecida. Consideramos o ponto $A=(x, f^{-1}(x))$. Refletindo este ponto na bissetriz dos quadrantes ímpares, obtemos o ponto $A'=(f^{-1}(x), x)$, que pertence ao gráfico de f. A existência de uma reta tangente ao gráfico de f no ponto A' garante, por reflexão, que existe uma tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto A. Como por hipótese $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, a tangente ao gráfico de f^{-1} em A não é vertical. Além disso, o declive da tangente ao gráfico de f em A' é $f'(f^{-1}(x))$, e o declive da tangente ao gráfico de f^{-1} em A é o seu recíproco $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Neste caso geral não assumimos a existência da derivada da inversa e deduzimo-la da existência da tangente ao gráfico de f em A.

A representação gráfica dos resultados do teorema da função inversa não constitui só por si uma demonstração, mas pode permitir uma compreensão mais rápida e profunda quer do enunciado do teorema quer das técnicas envolvidas na sua demonstração.

Escolhendo como exemplo a função raiz quadrada, cuja inversa é a função $f(x)=x^2$, a derivada obtém-se fazendo o recíproco da derivada de x^2 calculada em $\sqrt{x}$:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Não só obtemos uma representação gráfica do processo (figura 4), como podemos, movendo o ponto X, perceber o comportamento da derivada da raiz quadrada quando x se aproxima de zero.

A construção gráfica em GeoGebra e a sua manipulação dinâmica insere-se no conceito de "Demonstrações sem palavras 2.0" ("Proofs without Words 2.0") referido por Doyle, Kutler, Miler e Schueller (2014).

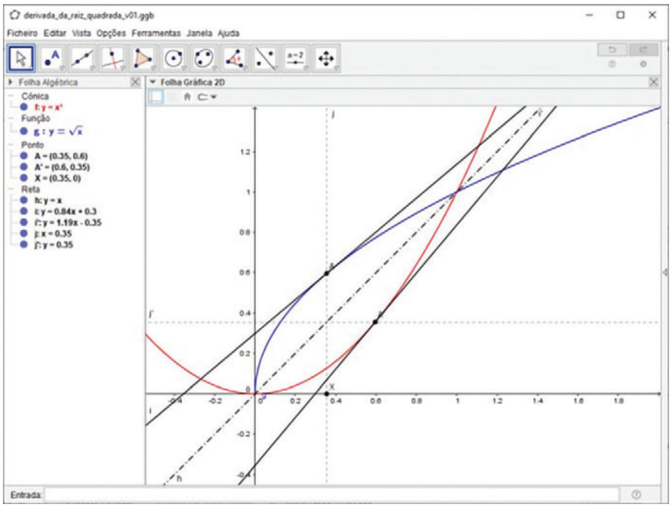


Figura 4. Derivada da função raiz quadrada

A CONCLUIR

Há hoje um consenso alargado sobre o que constitui a essência da prova matemática do ponto de vista educacional (Hanna & de Villiers, 2008). Considera-se que a construção de uma prova é um processo evolutivo na aprendizagem da matemática, que vai progredindo com a maturidade dos alunos e com o grau de sofisticação do seu conhecimento matemático, incluindo linguagem, simbologia e formas de representação. Por outro lado, é defendida a ideia de que a demonstração envolve uma maneira de pensar que aprofunda a compreensão matemática.

As abordagens que pressupõem a utilização e a coordenação de múltiplas representações estão frequentemente associadas à resolução de problemas, mas estendem-se ao raciocínio matemático e à prova. Vale e Pimentel (2013) afirmam que "(…) a necessidade de consistência entre essas representações permite o enriquecimento da compreensão da estrutura matemática subjacente, conduzindo, de modo mais eficaz, à conjetura e generalização, à explicação e argumentação (p. 208)".

A abordagem gráfica ao teorema da derivada da função logaritmo é preconizada nas novas Aprendizagens Essenciais de Matemática A do ensino secundário. Surge como uma ação estratégica para a aula de matemática e reflete a importância da visualização e das múltiplas representações matemáticas no estudo de funções e na sua compreensão, potencializadas pelo recurso a ferramentas tecnológicas.

Referências

Doyle, T., Kutler, L., Miler, R., & Schueller, A. (2014). *Proofs Without Words and Beyond. Convergence*. https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond

Ferreira, J. C. (1987). *Introdução à Análise Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Figueira, M. (1997). *Fundamentos de Análise Infinitesimal* (2ª ed.). Lisboa: DM-FCUL.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 40,* 329–336. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking.* Washington, D.C.: MAA.

Nelsen, R. B. (2000). *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking.* Washington, D.C.: MAA.

Nelsen, R. B. (2015). *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking.* Washington, D.C.: MAA.

RCAEMES - Grupo de Revisão Curricular das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário (2022). Consulta Pública – Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário. https://www.dge.mec.pt/noticias/consulta-publica-aprendizagens-essenciais-de-matematica-para-o-ensino-secundario

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Olvera-Martínez, C. (2018). High school teachers' use of a dynamic geometry system to formulate conjectures and to transit from empirical to geometric and algebraic arguments in problem-solving approaches. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving – A focus on technology, creativity and affect,* (pp. 81—100). Cham, Switzerland: Springer.

Sarrico, C. (1999). *Análise Matemática: Leituras e exercícios* (3ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Smirnov, V. (1969). *Cours de Mathématiques Supérieures*, tome I. Moscu: Éditions Mir.

Spivak, M. (1994). *Cálculo Infinitesimal* (2ª ed.). Barcelona: Editorial Reverté.

Vale, I., & Pimentel, T. (2013). Raciocinar com padrões figurativos. In A. Domingos, I. Vale, M. Saraiva, et al. (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013 - Raciocínio Matemático* (pp. 205—222). Lisboa: SPIEM. https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2013.pdf

Carlos Albuquerque
Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

Susana Carreira
Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Novas aprendizagens essenciais no 1.º ano de escolaridade: representações múltiplas, números e pensamento computacional

Célia Mestre, Cristina Martins, Cândida Tourais e Isabel Guerra

INTRODUÇÃO

Com a entrada em vigor das *Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (AE) (Canavarro, et al., 2021), umas das preocupações dos professores poderá ser a articulação entre os conhecimentos matemáticos, as capacidades matemáticas transversais e as capacidades e atitudes gerais transversais. Neste artigo centrar-nos-emos na antecipação da operacionalização das novas AE, que decorreu no ano letivo de 2021/22, em duas turmas do 1.º ano de escolaridade e apresentaremos uma sequência de tarefas que evidencia a articulação entre os temas Números, capacidades matemáticas Representações e Pensamento Computacional e as capacidades e atitudes gerais de colaboração, autorregulação e criatividade.

A antecipação da operacionalização destas novas AE realizou-se em duas turmas do 1.º ano de escolaridade, bastante distanciadas geograficamente e apresentando alguma heterogeneidade natural nos desempenhos dos seus alunos, sendo uma constituída por 22 e outra por 24 alunos. Tratando-se de um ano de escolaridade onde assume particular relevância a pouca autonomia dos alunos, é importante referir que estas turmas vivenciaram os seus anos de educação pré-escolar em contexto de pandemia e, mesmo no decurso do 1.º ano, esse contexto trouxe perturbações várias que dificultaram um desenvolvimento mais estável do processo de ensino e aprendizagem. As professoras titulares das duas turmas são professoras bastante experientes e aceitaram de forma imediata o desafio que lhes foi proposto de anteciparem um Programa que não conheciam e que tinham, naturalmente, de se apropriar.

As quatro autoras deste artigo formaram uma equipa de trabalho colaborativo, onde as duas primeiras tinham como principal função o acompanhamento da operacionalização das AE nas turmas das professoras titulares, participando também em algumas das aulas implementadas. A equipa reunia sistematicamente para planificar diferentes propostas de tarefas e refletir após a sua aplicação em sala de aula. Em algumas tarefas, como é o caso daquelas que aqui apresentamos, da reflexão sobre a concretização em sala de aula de uma tarefa emergiu a necessidade de continuar a aprofundar os conteúdos de aprendizagem, conduzindo à construção de uma sequência de tarefas interrelacionadas.

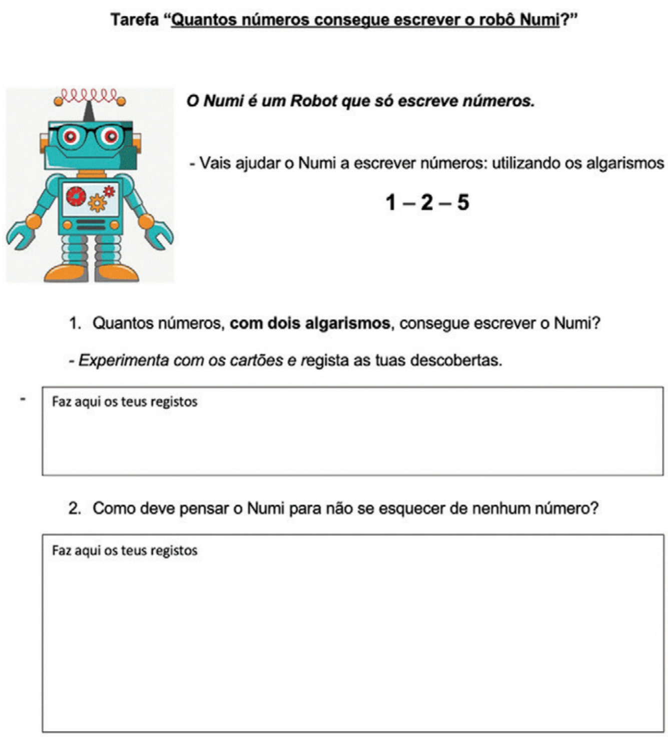
Em seguida apresenta-se, sumariamente, essa sequência de tarefas, cujos principais objetivos de aprendizagem são apresentados na tabela 1.

Tabela 1. Objetivos de aprendizagem da sequência de tarefas

Temas Tópicos Subtópicos	Objetivos de aprendizagem	Capacidades e atitudes gerais transversais
Números		
Sistema de numeração decimal - Valor posicional	Reconhecer o valor posicional de um algarismo no sistema de numeração decimal para descrever e representar números, nomeadamente com recurso a materiais manipuláveis de base 10.	
Pensamento computacional		
Abstração	Extrair a informação essencial de um problema.	Colaboração
Decomposição	Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.	
Reconhecimento de padrões	Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de um problema e aplicar os que se revelam eficazes na resolução de outros problemas semelhantes.	Autorregulação
Algoritmia	Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser.	Criatividade
Depuração	Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.	
Representações matemáticas		
Representações múltiplas	Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.	

DE UMA TAREFA A UMA SEQUÊNCIA DE TAREFAS

Ao longo das sessões de trabalho colaborativo, no 3.º período do ano letivo, a equipa constatou que seria necessário dar mais atenção ao pensamento computacional e considerou que o subtópico do valor posicional dos algarismos poderia ser um contexto apropriado para trabalhar também as práticas dessa capacidade matemática. Desta forma, surgiu a tarefa “Quantos números consegue escrever o robô Numi?” (figura 1), onde se pretendia que os alunos escrevessem todos os números possíveis de dois algarismos, dados três algarismos. A personagem Numi começou por ser apresentada aos alunos como um robô que apenas fazia aquilo que lhe mandavam fazer, ou seja, só obedecia às ordens que lhe eram dadas, as quais tinham de ser muito precisas. A determinada altura, um dos alunos de uma das turmas sintetizou a ideia como “O Numi tem cérebro de galinha, temos de lhe ensinar tudo!”. Apesar de ser apenas uma imagem na folha do enunciado, o robô Numi, considerando a faixa etária dos alunos, contribuiu para uma apropriação e crescente interesse pela tarefa.



Tarefa "Quantos números consegue escrever o robô Numi?"

O Numi é um Robot que só escreve números.

- Vais ajudar o Numi a escrever números: utilizando os algarismos

1 – 2 – 5

1. Quantos números, **com dois algarismos**, consegue escrever o Numi?

- Experimenta com os cartões e regista as tuas descobertas.

Faz aqui os teus registos

2. Como deve pensar o Numi para não se esquecer de nenhum número?

Faz aqui os teus registos

Figura 1. Enunciado da tarefa "Quantos números consegue escrever o robô Numi?"

Depois da apresentação da tarefa, seguiu-se o momento de trabalho autónomo, com os alunos organizados a pares. A cada par foi entregue um conjunto de cartões com os algarismos 1, 2 e 5 (figura 2). Estes cartões foram importantes para os alunos os poderem manipular e descobrir os seis números possíveis, embora alguns pares tenham prescindido da sua utilização aquando da descoberta dos primeiros números. Com ou sem cartões, todos os pares de alunos, nas duas turmas, conseguiram de forma muito fácil descobrir os seis números possíveis.

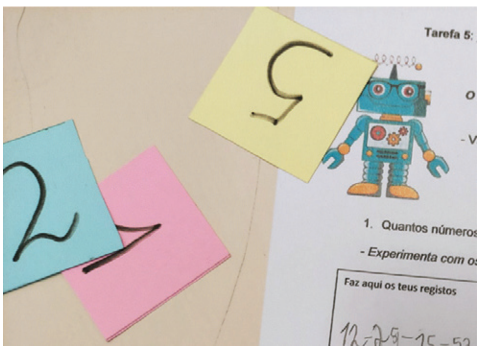


Figura 2. Cartões de apoio à realização da tarefa

A segunda questão da tarefa trouxe um desafio maior e permitiu criar novas tarefas, como em seguida referimos. Quando se pedia aos alunos que ensinassem o Numi a escrever os seis números que eles já tinham descoberto, houve respostas imediatas e variadas, tais como "Numi, deves estudar para memorizar" ou que se devia instalar uma "aplicação na cabeça do Numi", mas que revelavam que a questão não conduzia naturalmente à necessidade de dar instruções precisas que permitissem a escrita dos seis números. Nessa altura, foi necessário que as professoras focassem a atenção dos alunos no que significava dar instruções e na importância da sua precisão. De forma muito intuitiva, ambas as professoras sentiram necessidade de incorporar o Numi, fazendo de robô e seguindo restritivamente as ordens que os alunos davam. Esse facto permitiu aos alunos identificarem os seus erros ou a falta de informação nas instruções, conduzindo-os a depurar essas mesmas instruções. A manipulação dos cartões foi também essencial porque tornou tangível a reprodução fiel por parte das professoras das instruções que os alunos davam, conduzindo-os a identificar as falhas e os erros. Na figura 3 é possível ver a manipulação dos cartões realizada por um par de alunos à medida que ia dando instruções à professora.

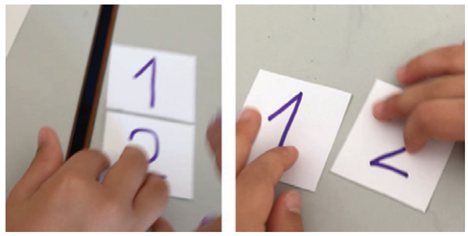


Figura 3. Manipulação dos cartões à medida que o par de alunos ia dando as instruções

No excerto seguinte percebe-se que, inicialmente, a professora sentiu necessidade de conduzir diretamente os alunos para o que seria dar as instruções ao Numi. A resposta inicial do aluno "Tem de pegar nos números", revela que essa ação de dar instruções precisas ao Numi não foi, de facto, imediata e as intervenções seguintes evidenciam ainda essa dificuldade e conduziram à necessidade de indicar exatamente as posições em que teria de ser colocado cada cartão.

Aluno: Tem de pegar nos números.
Professora: Mas pega em todos?
Aluno: Não.
Professora: Então pega em quê? Diz ao Numi... Numi primeiro pega no cartão que tem o número...
Aluno: Um. E depois pegas no cartão que tem o número 2.
Professora: E ele faz o quê?
Aluno: E faz o número 12.
Professora: Mas ele pode pegar como ela fez [colocou o cartão do 2 por baixo do cartão do 1]. Então o que é que ele tem de fazer a esse cartão do 2?
Aluno: Por ao lado do 1.
Professora: De que lado?
Aluno: Do lado direito.

No entanto, facilmente os alunos perceberam que depois de dar uma instrução de colocar um cartão à direita do outro, para que obtivessem um número diferente, apenas precisariam de mudar a posição desse cartão, como mostra o excerto seguinte:

Aluno: Está aqui o 12, agora trocamos os números, o 2 vem para aqui e o 1 vem para aqui e fazemos o 21.
Professora: E quantos números consegues construir com essa estratégia?

Aluno: Dois.
Professora: E depois consegues construir outros ou não?
Aluna: Sim, depois o 25, o 52.

Esse aspeto foi particularmente importante, pois permitiu discutir o valor posicional dos algarismos nos números. Para mostrarem os seus processos de raciocínio, os alunos recorreram a movimentos que faziam com os dedos, manipularam diretamente os cartões ou usaram esquemas de setas na escrita dos números, usando diferentes representações, desde as verbais, às visuais, às físicas, às contextuais e simbólicas (figura 4).

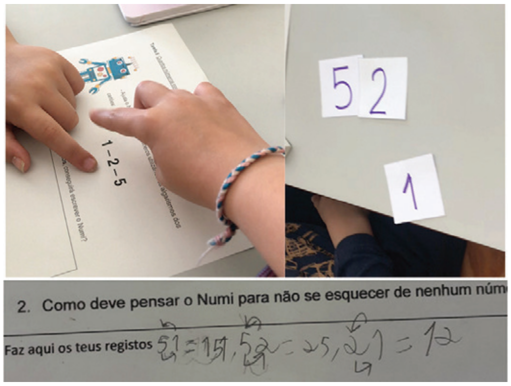


Figura 4. Diferentes representações usadas pelos alunos para indicarem a mudança de posição dos algarismos nos números

Para além deste processo de troca da posição dos algarismos para obter diferentes números surgiram ainda outros processos, como a escrita por ordem crescente ou decrescente dos números possíveis ou ainda a escrita de todos os números que "começavam" com o mesmo algarismo (figura 5). Estas resoluções permitiram discutir e aprofundar o valor posicional de cada algarismo no número, tornando claro que os alunos não se limitavam a criar diferentes números apenas pela troca de posições dos algarismos, mas que reconheciam que, nos números criados, de acordo com a posição dos seus algarismos o valor dos mesmos se alterava.

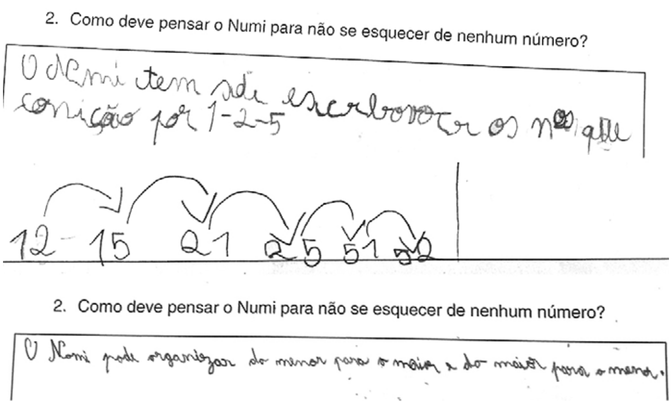


Figura 5. Outras representações usadas pelos alunos para a descoberta dos seis números possíveis

Na discussão coletiva desta tarefa foi possível constatar, em ambas as turmas, que os alunos conseguiam muito facilmente escrever todos os números possíveis e que já conseguiam criar instruções, embora ainda incompletas ou pouco precisas. Assim, na reunião da equipa, decidiu-se que se poderiam criar outras tarefas na continuidade daquela. Numa das turmas, a tarefa seguinte realizou-se a partir da criação de cartões com instruções incompletas que os alunos tinham de completar. No entanto, a manipulação destes cartões não se revelou particularmente eficaz, pois os alunos criavam outras instruções igualmente válidas e depressa abandonavam os cartões que lhes eram fornecidos. A tarefa seguinte, agora aplicada nas duas turmas, revelou-se mais eficaz. Nessa tarefa era pedido que os alunos corrigissem instruções erradas ou incompletas, não os restringindo a uma formulação prévia e permitindo-lhes maior liberdade na reelaboração das instruções (figura 6).

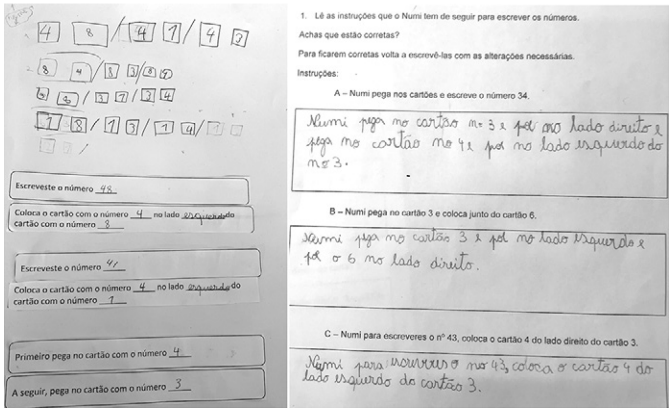


Figura 6. Tarefa de completar instruções e tarefa de corrigir ou completar instruções dadas.

Importa ainda referir que, em ambas as turmas, as tarefas à volta do robô Numi criaram um grande entusiasmo nos alunos. Numa das turmas, criaram mesmo uma namorada para o Numi e, ao realizarem um protocolo experimental onde tinham de descrever os procedimentos passo a passo para a realização de uma experiência enquadrada na disciplina de Estudo do Meio, os alunos relacionaram imediatamente esse processo com o "dar instruções ao Numi".

Na reunião seguinte, a equipa considerou que a tarefa ainda tinha potencialidades para ser aprofundada e foi sugerida a iniciação ao Scratch como forma de explorar as práticas do Pensamento Computacional em desenvolvimento, nomeadamente e de forma muito explícita, a algoritmia, capacidade que aprofundaria a compreensão do sistema de numeração decimal. Desta forma foi criada uma programação com um jogo numérico em que era pedido aos alunos que indicassem um número e, em seguida, o Numi (no Scratch) apresentava outro número. Os alunos tinham, então, de descobrir quais as instruções que tinham sido dadas ao Numi para que ele produzisse aquele novo número. Na programação em Scratch foi atribuída uma voz ao Numi que, para além de cumprimentar os alunos e referir que tinha aprendido muito com eles, os desafiava para o jogo. Como expectável, o entusiasmo foi total! Na realização do jogo, nas duas turmas, os alunos conseguiram de forma imediata, descobrir as instruções que tinham sido dadas ao Numi e que consistiam em comandos como adicionar ou subtrair 1 ou 10 aos números que estes indicavam. Após esse momento, as professoras referiram que íamos agora *entrar dentro da cabeça do Numi*, ou seja, perceber como o Numi tinha pensado. Naturalmente que, nesta fase, foi apresentada a programação em Scratch (figura 7).

Figura 7. Tarefa "Entrar na cabeça do Numi"

Após esse momento, os alunos, nos seus tablets, tiveram acesso às programações em Scratch e foram desafiados a criarem, eles próprios, novas instruções, obtendo novos jogos numéricos que jogariam a pares. Esse momento foi também de grande entusiasmo, levando os alunos a esquecerem-se até da hora do lanche.

Ainda como extensão da tarefa inicial, em uma das turmas, foi criada outra tarefa onde se usava a tabela do 100 para adicionar e subtrair, usando um robô real, o Bee. As instruções foram primeiramente escritas pelos alunos e, em seguida, testadas usando a programação por setas do robô Bee e um cartaz em formato grande com a tabela do 100 (figura 8).

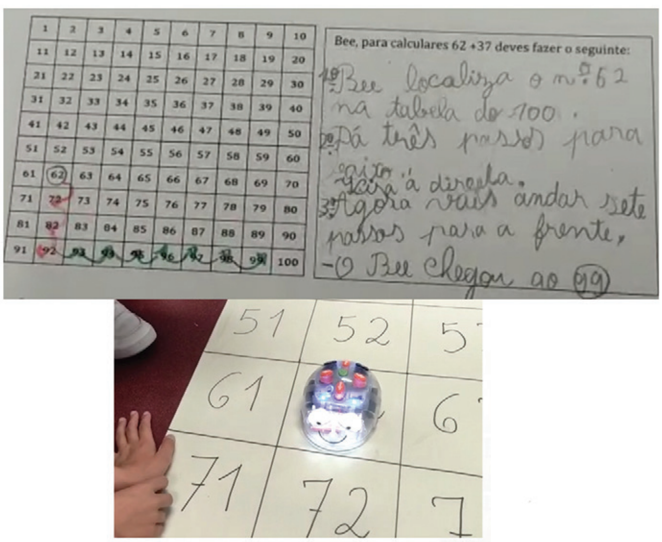


Figura 8. Tarefa "Adicionar e subtrair na tabela do 100 com o Bee"

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A integração de conhecimentos, capacidades matemáticas e capacidades e atitudes gerais, destacada nas AE, foi considerada desde o nascimento do Numi, na primeira tarefa, até à construção da sequência de tarefas apresentada neste artigo. A este respeito destacamos as palavras de uma das professoras da equipa: "Como começou a tarefa do Numi e como cresceu… surpreendente!".

Considerando os objetivos de aprendizagem apresentados na tabela 1, importa evidenciar o desenvolvimento destes objetivos na atividade dos alunos, ao longo das sequências de tarefas.

Assim, e considerando ainda que a capacidade de Pensamento Computacional, tal como foi referido pelas professoras titulares de turma da equipa, poderá ser aquela onde os professores se sentirão "menos à vontade", começaremos por identificar as práticas do Pensamento Computacional na atividade dos alunos. Começamos pela prática da abstração que permite extrair a informação essencial de um problema. Os alunos recorreram a esta prática quando perceberam que o que tinham que fazer era construir números de dois algarismos dados aqueles três, não importando muito de que números se tratava, mas concentrando a sua atenção em usar todos, sem repetir as posições, de modo a formar os números possíveis com dois algarismos. Também usaram a prática da decomposição quando começaram a pensar em números possíveis usando apenas dois dos três algarismos dados, recorrendo ao terceiro algarismo só quando haviam esgotado todas as possibilidades com os primeiros dois. No que respeita ao reconhecimento de padrões, podemos referir que os alunos reconheceram com muita facilidade que trocando a ordem de qualquer algarismo no número surgia um novo número e que isso surgia em todos os números que formavam. Reconheceram ainda padrões quando apreenderam que, se com dois algarismos formavam dois números, com três algarismos formariam dois mais dois mais dois, ou três vezes dois, seis números. A prática da depuração surgiu sempre que os alunos reconheciam números repetidos e os retiravam da "contagem" dos números possíveis. Também surgiu nas estratégias mais elaboradas de ordenar os números pelo algarismo das dezenas ou de esgotar todos os números possíveis com um determinado algarismo. E, naturalmente, todo o trabalho em torno da elaboração de instruções cada vez mais precisas e completas desenvolveu a prática da algoritmia. Também usaram essa prática quando "entraram na cabeça do Numi" pelo Scratch, quando alteraram a programação que lhes foi apresentada, colocando novas regras e quando programaram o Bee para adicionar e subtrair usando a tabela do 100. Embora todas estas práticas tenham sido trabalhadas no decurso desta sequência de tarefas, naturalmente, e tal como preconizam as AE, numa abordagem em espiral os alunos deverão ter múltiplas oportunidades para retomar estes conhecimentos, permitindo-lhes sucessivos graus de aprofundamento e completamento e uma natural apropriação do formalismo, de acordo com o próprio desenvolvimento e maturidade dos alunos.

Centrando-nos agora na capacidade das Representações Matemáticas, tornou-se evidente a importância das representações múltiplas que os alunos usaram não só para estruturar a sua aprendizagem, demonstrando os seus processos de raciocínio; como para mostrar aos outros a forma como pensavam, exprimindo as suas ideias. É visível a multiplicidade de representações utilizadas, quer no recurso a cartões com números, à "corporificação" do Numi feita pelas professoras e alguns dos alunos, quer no recurso às ferramentas tecnológicas como a linguagem de programação visual Scratch e o robô Bee. Outras representações também foram usadas pelos alunos, nomeadamente os esquemas de setas ou a linguagem escrita e oral.

No que concerne ao objetivo relativo à compreensão do valor posicional, foi notório como as capacidades matemáticas transversais do Pensamento Computacional e das Representações Matemáticas permitiram aprofundar o conhecimento dos alunos naquilo que respeita ao reconhecimento do valor posicional dos algarismos, e, naturalmente, aprofundar a sua compreensão do sistema de numeração decimal.

Naturalmente que no desenvolvimento da sequência das tarefas, as dinâmicas de sala de aula de natureza essencialmente exploratória, permitiram aos alunos exercer a sua agência, tendo-lhes sido disponibilizado tempo para pensar, partilhar, interagir com os colegas e com a professora, discutir e sistematizar coletivamente as aprendizagens matemáticas emergentes. Esta dinâmica permitiu ainda desenvolver capacidades e atitudes gerais transversais tais como a colaboração, a autorregulação e a criatividade. A colaboração foi valorizada nos modos de trabalho promovidos, os alunos interagiram nos trabalhos em duplas, em grupo e nas discussões coletivas. O exercício da sua agência na realização das tarefas foi essencial para a autorregulação da sua capacidade de aprender. As questões colocadas pelas professoras permitiram apoiar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, favorecendo igualmente a sua autorregulação. O desenvolvimento da criatividade dos alunos foi evidente na forma como criaram e registaram as instruções a dar ao Numi, mas também na forma como as dramatizaram e efabularam, levando a que as tarefas evoluíssem naturalmente com o seu contributo.

Considerando o trabalho colaborativo desenvolvido na equipa, é importante dar voz às professoras titulares de turma que, neste processo, mobilizaram a sua ação, enfrentando receios e incertezas e integrando este processo no seu desenvolvimento profissional. Sobre as práticas de ensino de natureza exploratória é interessante a constatação de que "parece que o professor se demite, mas o papel do professor é mais exigente", ou quando se referem ao papel do professor e ao papel do aluno dizem "fiquei ali a olhar para os alunos a trabalhar com o computador, a aula era deles". Sempre tendo como foco as aprendizagens realizadas pelos alunos, a seguinte afirmação de uma das professoras, que voltamos a realçar como muito experiente, "Nunca tive nenhum grupo no 1.º ano que lidasse com os números como este", merece-nos consideração e reflexão. Porém, porque todos os processos desta natureza não são naturalmente fáceis, concluímos com a constatação de que é preciso "ter consciência de que as novas aprendizagens [AE] trazem mudanças" e implicam "a desconstrução de práticas enraizadas", sendo que tudo isto "levou/leva tempo".

Referências

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia; Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal (professora requisitada)

Cristina Martins
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança

Cândida Tourais
Professora titular de turma do 1.0 ano no Agrupamento de Escolas de Azeitão

Isabel Guerra
Professora titular de turma do 1.0 ano no Agrupamento de Escolas Miguel Torga, Bragança

Lances livres

O Pedro, um ótimo jogador de basquetebol, ontem estava a treinar os lançamentos livres quando o encontrei. Perguntei-lhe como estava a correr, ao que ele respondeu:

– Acertei 84% deles.

– Exatamente?

– Não, arredondei para o inteiro mais próximo.

No mínimo, quantos lances efetuou e quantas vezes teve êxito?

(Respostas até 26 de março, para zepaulo46@gmail.com)

PASTAS E MOCHILAS

O problema proposto no número 164 da *Educação e Matemática* foi o seguinte:

> *Os oito alunos que fazem parte do Clube de Matemática transportam os seus materiais numa pasta ou numa mochila, que arrumam no respetivo cacifo, conforme se vê na figura.*
>
> *1. O cacifo da Eva está encostado aos da Inês e da Laura.*
>
> *2. Os cacifos ao lado do cacifo do David pertencem à Petra e ao Zé.*
>
> *3. O tipo de objeto (pasta ou mochila) que o António tem é diferente quer do da Eva quer do do Mateus.*
>
> *O António usa pasta ou mochila? E qual é o cacifo dele?*

Recebemos 16 respostas: *Alberto Canelas (Queluz), Alice Marques (Bruxelas), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias (Silveira), Catarina Ferreira (Viseu), Daniel Ferreira (Espinho), Delfim Guedes (V. N. Gaia), Inês Campos (Odivelas), Joana Russo (Loures), Letícia Martins (Guimarães), Liliana Martins (Vila Nova de Gaia), Luís Bernardino (Amora), Margarida Veríssimo (Bruxelas), Manuel Saraiva & Rogério Berrincha (Covilhã), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).*

Todos chegaram à solução. Houve, essencialmente, abordagens de dois tipos. Para facilitar, vamos usar as iniciais dos nomes dos 8 alunos.

1.ª Listar as várias possibilidades e ir eliminando

Vamos apresentar apenas as ideias principais desta estratégia.

Daniel Ferreira: *"Caso não houvesse as restrições do enunciado, haveria 8! = 40 320 possibilidades de atribuição dos cacifos aos 8 alunos".*

Mas as duas primeiras condições do enunciado impõem a existência de um bloco (LEI ou IEL) e de outro bloco (PDZ ou ZDP). Estes dois blocos, mais A e M, podem permutar entre si (24 casos), dando origem a 96 possibilidades (24x2x2). Contudo, *"uma vez que I e L podem trocar entre si, bem como P e Z, e nenhum destes é considerado na terceira restrição, não há necessidade de ter isso em conta".* Ficam só 24 possibilidades. Uma análise cuidada, entrando em linha de conta com a terceira condição do enunciado, levaria à solução.

Luís Bernardino analisa apenas as seis possibilidades de colocar os dois blocos, vendo depois se A e M (que ficam nos dois lugares livres) mais E e D (nas posições centrais dos blocos) cumprem todas as condições.

Pedrosa Santos: *Uma apresentação sistemática de todas as situações (excluindo as possíveis permutações dentro de cada conjunto) possibilita, a quem lê, entender mais facilmente o raciocínio.*

2.ª Dedução pura

É, talvez, a estratégia mais interessante. Vejamos dois exemplos.

Mário Roque:

A primeira e a segunda condições implicam que terão que existir dois "blocos" de três cacifos consecutivos: um para o trio Inês, Eva, Laura, com o da Eva no meio; outro para o trio Petra, David e Zé, com o do David no meio.

Os dois cacifos "que sobram" (7-8, 1-2, 1-5, 1-8, 4-5 ou 4-8) serão os do António e do Mateus.

Ora a terceira condição do problema implica que, nestes dois cacifos, estejam objetos de tipos diferentes (uma mochila e uma pasta). Como podemos verificar, isto apenas se passa se esses cacifos forem o 7 e o 8 – nos outros cinco casos "sobrariam" sempre duas mochilas…

Nesta situação, dependendo da distribuição dos "trios consecutivos", o cacifo da Eva será o 2 ou o 5 – em ambos os casos, correspondendo a uma mochila.

Assim sendo e utilizando uma vez mais o que impõe a terceira condição, o António usará necessariamente uma pasta e, consequentemente, o seu cacifo será o 7.

Catarina Ferreira:

1) "O cacifo da Eva está encostado aos da Inês e da Laura" – logo o cacifo da Eva não pode ser o 1 nem o 8.

2) "Os cacifos ao lado do cacifo do David pertencem à Petra e ao Zé" – logo o cacifo do David também não pode ser o 1 nem o 8.

3) "O tipo de objeto (pasta ou mochila) que o António tem é diferente quer do da Ema quer do do Mateus" – vamos analisar as duas possibilidades:

Suponhamos que a Ema e o Mateus têm pasta, logo o António tem mochila.

Se a pasta da Ema fosse a 3, a do Mateus era a 6 ou 7 e, neste caso, não havia três cacifos juntos para o David, a Petra e o Zé.

Se a pasta da Ema fosse a 6 ou a 7, a do Mateus era a 3 e neste caso também não havia três lugares seguidos para o David, a Petra e o Zé.

Logo a nossa suposição é um absurdo.

Assim sendo a Ema e o Mateus têm mochila e o António tem pasta.

A pasta do António não pode ser a do cacifo 3 nem a do cacifo 6, pois nesses casos não há dois grupos de três lugares consecutivos. Assim sendo a pasta do António é a do cacifo 7.

R: Analisando cada uma das afirmações concluímos que o António usa pasta e o seu cacifo é o 7.

Carlos Dias acrescenta ainda outras conclusões:

- A Eva, o David e o Mateus usam mochila.
- O Mateus ocupa o cacifo 8.
- A Eva e o David ocupam os cacifos 2 e 5 (não sabemos qual deles ocupa qual cacifo).
- A Inês, a Petra, o Zé e a Laura ocupam os cacifos 1, 3, 4 e 6 (não sabemos qual deles ocupa qual cacifo).

Representações e raciocínio na aula de matemática

João Pedro da Ponte
Marisa Quaresma
Paula Gomes

INTRODUÇÃO

Representações e raciocínio são duas importantes capacidades transversais em matemática. Os objetos matemáticos, ao contrário dos objetos das ciências naturais como física, química e biologia, são objetos abstratos. Não existem na natureza, nem naquilo que se costuma designar por "mundo real". Para pensarmos sobre eles, temos de os representar.

As *representações matemáticas* podem ser as mais diversas, sendo de destacar as representações ativas (objetos como a fita métrica ou o material multibásico), as representações icónicas (imagens, figuras, diagramas) e as representações simbólicas (onde se inclui a linguagem natural e as notações matemáticas, com destaque para a linguagem algébrica)[1]. Muitas vezes, usam-se representações mistas, que combinam, por exemplo, elementos icónicos e simbólicos.

É com as representações matemáticas que fazemos raciocínios, ou seja, inferências sobre a validade ou não de afirmações matemáticas[2]. Um dos processos de raciocínio centrais é *generalizar*, ou seja, fazer uma afirmação sobre todos os elementos de uma classe de objetos que se pretende que seja verdadeira. Outro processo de raciocínio fundamental é *justificar*, que consiste em dar razões para comprovar a validade de uma dada generalização. Todo o teorema é uma generalização. Mas existem muitas generalizações a que habitualmente não damos o nome de teorema, como é o caso dos procedimentos matemáticos.

No ensino da matemática existe a tradição de apresentar os conceitos e procedimentos matemáticos, o mais rapidamente possível, em linguagem simbólica. No entanto, os alunos podem beneficiar de poder trabalhar igualmente com outras representações. Existe também uma tradição de dar as generalizações "já prontas" aos alunos, em vez de os incentivar a que participem no processo de elaboração das generalizações. Contudo, ter oportunidade de trabalhar na procura de generalizações é uma atividade com grande potencial para a aprendizagem.

Neste artigo, mostramos situações de sala de aula, conduzidas numa perspetiva exploratória[3] , onde os alunos participam ativamente nos processos de generalizar e justificar, usando representações com as quais se sentem mais confortáveis. Mostramos também momentos de trabalho de professores, em que estes preparam o trabalho a realizar na aula e refletem sobre as aprendizagens realizadas pelos alunos. Tanto as situações relativas ao trabalho dos alunos como ao dos professores tiveram lugar no âmbito de estudos de aula, um processo de desenvolvimento profissional centrado na prática letiva e nas aprendizagens dos alunos[4].

REPRESENTAR E GENERALIZAR NO 7.º ANO

O primeiro exemplo diz respeito a uma tarefa bem conhecida, o "voo em v" (figura 1). Trata-se de uma tarefa envolvendo uma sequência, que é apresentada em termos icónicos, sendo dados 4 termos. A tarefa foi apresentada a alunos do 7.º ano.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os quatro primeiros termos:

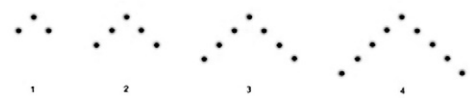


Figura 1. Tarefa "voo em v"

Em trabalho autónomo, os alunos procuraram responder às questões colocadas. A primeira perguntava qual o número de pontos da figura seguinte e não criou dificuldades aos alunos. Já a segunda questão perguntava quantos pontos tem o termo de ordem 100 e requereu bastante trabalho aos alunos. A professora convida Martim a explicar a sua resolução (figura 2):

Professora: Então, Martim, explica lá porque é que para determinar a 100.ª figura tu fizeste 99×2+3.

Martim: Comecei a retirar o número 3, porque é o número de pontinhos que tem a 1.ª figura… Para dar as duas bolinhas… Vamos acrescentando 2 em dois, eu fiz, por exemplo, 1x2 que me foi dar as 2 bolinhas que tinha que acrescentar, 2x2 que me deu

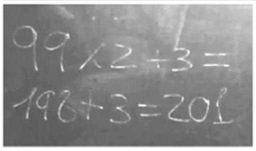
[1] Esta distinção entre representações ativas, icónicas e simbólicas é de Jerome Bruner (1999).

[2] Uma discussão mais aprofundada sobre processos de raciocínio pode ser vista, p.e., em Ponte et al. (2020).

[3] Sobre a aula de natureza exploratória, que tem sido objeto de numerosas investigações no nosso país, ver, p.e., Ponte (2005) e Canavarro (2011), é em tudo semelhante ao que os japoneses chamam "*stuctured problem solving*" (Fujii, 2018) e os americanos "*ambitious teaching*" (Lampert et al, 2013).

[4] Sobre estudos de aula, existem vários artigos na Educação e Matemática, p.e., Quaresma e Morais (2016).

os 4 pontinhos que eu acrescentei aqui. E aqui, por exemplo, fiz 3×2 que me deu os 6 que acrescentei aqui. Percebi que, para dar o número de pontinhos que acrescentamos na figura a seguir, temos de fazer o número da figura anterior vezes 2. Como era a 100.ª figura, fui à figura anterior, que é o 99, fiz 99×2 e depois, no final, acrescentei os 3 que eu tirei da primeira figura. Fica 99×2 que é 108, mais os 3 que tinha retirado no início e deu-me 201.

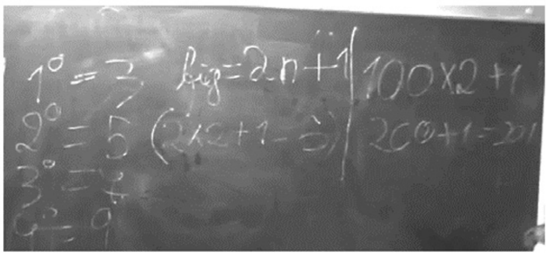


$$99 \times 2 + 3$$
$$= 198 + 3 = 201$$

Figura 2. Resolução de Martim no quadro

Martim apoiou-se numa representação icónica (bolinhas) para estabelecer uma generalização acerca da regularidade presente na sequência. Exprimiu essa regularidade em termos verbais e simbólicos, usando os dígitos e os sinais das operações aritméticas.

De seguida, a professora convida outro aluno, Luís, que tinha indicado ter resolvido de outra forma (figura 3), a apresentar a sua resolução:



$$\text{fig} = 2n + 1(2 \times 2 + 1 = 5)$$
$$100 \times 2 + 1200 + 1 = 201$$

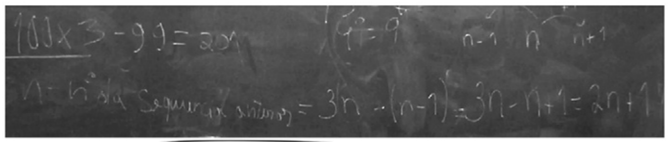
Figura 3. Resolução de Luís no quadro (1.ª parte)

Luís: Se multiplicarmos o 2 por 2, vai dar 4 e não é 5. Então temos que adicionar 1. Vendo pelos outros [casos], vai ser a mesma coisa: para o 4 é 8 e depois sobra 1, 6 e sobra 1... E eu vou pôr só aqui entre parêntesis para se perceber [escreve (2×2+1=5)]. Depois, eu cheguei a uma expressão algébrica, porque é assim que eu resolvo estes exercícios… [escreve fig=2n+1] 2 vezes o número mais 1. Como é o centésimo número… temos de fazer 100×2+1, que vai dar 200+1 que é 201. Ou seja, dá o mesmo número que a resolução do Martim.

Verificamos que Luís estabeleceu a mesma generalização, recorrendo a representações simbólicas. Nota-se que, para além dos dígitos e sinais das operações, o aluno usa a letra *n* para designar a ordem dos termos, conseguindo escrever uma expressão para o termo geral da sequência.

Finalmente, foi a vez de Miguel apresentar a sua resposta (figura 4), que foi sendo esclarecida em diálogo com a professora.

Miguel: Eu fiz o número da sequência × 3 menos o número da sequência anterior. Fiz 100×3-99=201.
Professora: Alguém tinha pensado assim? Se eu quiser pensar num termo geral, como é que fazes? Para uma figura qualquer…
Miguel: Eu não consigo fazer em expressão algébrica… Mas escrevi 3*n*-*n*.º da sequência anterior [a professora apoiou o aluno…].
Professora: Mas é isso mesmo. Escreve lá aqui por baixo [de 100×3-99=201] o termo geral. Escreve exatamente o que me disseste. 3*n*…
[o aluno escreve no quadro 3*n*-*n*º da sequência anterior]
Professora: OK. Eu agora vou dar uma ajudinha para escreveres isto, pode ser? Então tens 3*n* e este [*n*] é o número da tua sequência, não é? Tenho aqui o *n*. se eu quiser o que vem à frente, o que é que eu faço? Somo 1, não é? [escreve *n*+1].
Miguel: Sim.
Professora: OK. E se eu quiser o [termo] que vem antes, o que é que eu faço?
Miguel: -1.
Professora: -1. Então, o que nós podemos fazer aqui [3*n*-*n*º da sequência anterior = 3*n*] é exatamente isso: 3*n* – o número que vem antes [escreve 3*n*–(*n*-1)]. E reparem que, se nós simplificarmos a expressão do Miguel, ela vai dar exatamente igual à expressão do Martim, está bem? Boa forma de pensar.



$$100 \times 3 - 99 = 201$$

$$3n - \text{nº } \textit{da sequência anterior} = \mathbf{3n - (n - 1)} = \mathbf{3n - n + 1 = 2n + 1}$$

Figura 4. Resolução de Miguel no quadro (2ª parte)

Este aluno não usou quaisquer representações icónicas. Chegou à sua resposta usando apenas representações simbólicas (dígitos, sinais das operações, letra *n*), chegando a uma outra expressão para o termo geral. A professora, naturalmente, aproveitou a oportunidade para notar que as duas expressões para o termo geral são equivalentes.

Estes três alunos usam diferentes representações para responder à questão colocada: representações verbais, icónicas e simbólicas. Entre as representações simbólicas registamos diferentes níveis de sofisticação, desde as representações com as quais os alunos estão bem familiarizados (dígitos, sinais das operações) até representações mais sofisticadas (letras para designar variáveis e expressões algébricas para designar um termo geral). O momento de discussão coletiva, em que os alunos apresentam as suas resoluções, é uma boa oportunidade para que estas resoluções sejam apresentadas e discutidas. A representação icónica (já dada no enunciado da tarefa) é um apoio para a compreensão da situação. A representação simbólica $2n+1$ permite uma formulação sintética e poderosa do termo geral.

A obtenção de uma expressão geral para qualquer termo da sequência é uma generalização, um importante processo de raciocínio. Os modos como os alunos explicaram que chegaram a esta generalização, constituem justificações, outro processo de raciocínio fundamental.

REPRESENTAR E GENERALIZAR NO 11.º ANO

Vejamos uma situação ocorrida numa turma de 11.º ano de matemática A. Trata-se de uma tarefa relativa à resolução de uma inequação fracionária (figura 5), ou, se se preferir, o estudo do sinal de uma função racional. Os alunos nunca tinham estudado este assunto, pelo que se trata de uma tarefa de cunho exploratório, onde eles são chamados a encontrar estratégias próprias para a resolução da tarefa.

Tarefa: Resolve, em R, a condição $\frac{x+3}{x-2} > 0$

Figura 5. Tarefa Inequação fracionária

Na introdução da tarefa, em diálogo com os alunos, a professora começa por promover a reinterpretação da tarefa em termos do estudo do sinal de uma função e ajuda os alunos a perceber o que é preciso considerar para responder à questão colocada.

Professora: O enunciado desta questão também podia ser qual? Estudo do sinal de que função?

Vários alunos: $\frac{x+3}{x-2}$

Professora: Portanto, podia ser "verifique onde é que a função $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ é maior do que zero". Queremos ver que condição é que eu tenho que impor para que aquela fração seja positiva. Está bem? […] É isto que vocês vão tentar perceber. Quais são as condições que eu tenho que impor para que esta fração seja positiva?

Fernando: Então, é quando o de cima é maior do que zero e o outro [denominador] também é maior que zero.

Professora: Vamos lá pensar... Será que há outras possibilidades? Vejam lá.

A seguir ao trabalho autónomo dos alunos, é chegado o momento da discussão coletiva. A professora começa por convidar David a apresentar a sua resolução (figura 6):

Professora: Vamos ouvir com atenção... Vamos ouvir então a explicação do David. É uma primeira possibilidade de resolução daquela condição. David...

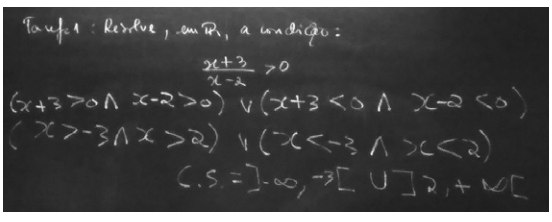


Figura 6. Resolução de David no quadro

Na sua apresentação, o aluno vai apontando para o quadro, para o sítio onde escreveu o que está a explicar:

David: A maneira como nós pensámos é que para ser maior que zero a condição, o numerador e o denominador tinham que ter o mesmo sinal. Ou seja, se o numerador tinha que ser maior que zero, o denominador também tinha que ser maior que zero. Ou, se o numerador fosse menor que zero, o denominador também tinha que ser menor que zero. Se fossemos resolver, víamos que quando o x é maior que -3, em baixo o x tinha que ser maior que 2. Para dar mais aqui [aponta para o numerador] e mais aqui também [aponta para o denominador]. Dava mais-mais, era maior que zero. E aqui ficava menos [aponta para o numerador] e menos aqui [aponta para o denominador]. Menos com menos, dá mais, dá maior que zero.

Professora: Pronto. E depois, passando... Como é que passou da condição $x>-3$ e $x>2$ para o intervalo de 2 a $+\infty$?

David: Então, se o x tem de ser menor que -3, tem que ser -infinito a -3 e se for x menor que... Ah! É a união.

Professora: O que eu estou a perguntar é: a primeira condição, aquela que tem a conjunção, $x>-3$ e $x>2$, dá o quê?

David: Interseção de -3 a $+\infty$ e de 2 a $+\infty$.

Professora: Exato. E isso vai dar o quê, essa interseção?

David: Vai dar 2 a $+\infty$.

Professora: Vai dar o segundo intervalo, não é?

David: E tem que ser a união com este.

Professora: Exatamente. A segunda condição dá o primeiro intervalo, certo? Muito bem! Trata-se de uma resolução algébrica. Porquê? Porque estivemos a resolver as condições de forma analítica.

A resolução apresentada por este aluno é formulada usando apenas expressões algébricas, inequações, intervalos e operações com conjuntos, formulada num misto de linguagem simbólica e linguagem natural.

Na sequência, a professora indica que existe uma outra resolução, que tira partido do gráfico e pergunta quem é o aluno que se disponibiliza para vir resolver no quadro. Uma aluna, Mara, avança e faz um esboço do gráfico da função, no quadro (figura 7).

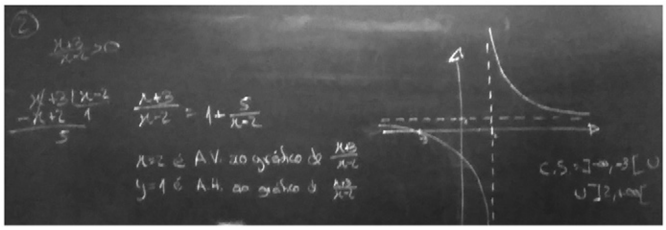


Figura 7. Resolução de Mara no quadro

Professora: Então, Mara, diga lá como é que pensou.

Mara: Primeiro determinei os zeros. Para descobrir os zeros, sabemos que este [aponta para $x+3$] tem de ser zero… e deu-me -3. E depois, aqui [aponta para a representação gráfica] também sabemos que há uma assintota vertical em 2, e sabemos que a função não está definida em [x=]2. Fiz as assintotas, horizontal e vertical, e fiz o gráfico e…

Professora: E agora queremos saber onde é que a função…

Mara: É positiva. De $-\infty$ a -3 e de 2 a $+\infty$.

Esta aluna tirou partido dos seus conhecimentos sobre funções (zeros, assintotas verticais, assintotas horizontais) para representar graficamente a função que corresponde à expressão dada. Dessa representação, resulta o conjunto de dois intervalos onde a função é positiva.

Concluída esta explicação, e não havendo questões colocadas por outros alunos, a professora indica que existe mais um processo a considerar e dá a palavra a Guilherme, que tinha usado uma tabela (figura 8):

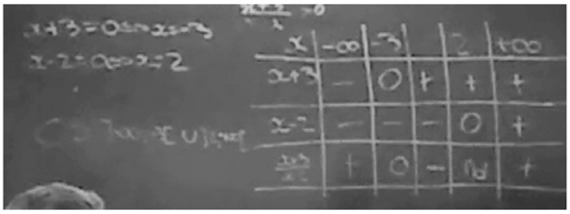


Figura 8. Resolução de Guilherme no quadro

Guilherme: Nós temos esta condição, e vamos querer saber quando é que esta condição é maior do que zero. Então, para isso, vamos calcular o zero de x+3 e o zero de x-2. Temos que o zero de x+3... O zero é x=-3. E na condição x-2, temos que o zero é x=2. Logo, para isso, nós fomos fazer uma tabela de sinal, para nós sabermos quando é que a função era positiva e quando é que ela era negativa. E os zeros serviam-nos para nós sabermos quando é que havia mudança de sinal na função. Então temos, o x+3 no numerador e x-2 no denominador. Portanto, nós sabíamos... Depois metemos no -3, o zero, e no 2, o zero [o aluno aponta para cada uma das linhas do quadro de sinais, quando se refere aos zeros de x+3 e de x-2] eram as coisas que nós sabíamos [aponta para os cálculos auxiliares onde determinou os zeros]. Então, no -∞, era menos [fala de x+3] e no x-2 no -∞ era menos. E menos com menos dava mais. Depois o zero no numerador [aponta para o numerador da fração] com um número negativo ia dar um zero [aponta para a coluna respetiva da tabela]. Depois, mais com menos, dava menos [aponta para a coluna respetiva da tabela] e qualquer número a dividir por 0 não existe [aponta para o denominador da fração e para a coluna da tabela que correspondente]. Logo, é não definido. E em +∞, mais com mais dava mais. Portanto, nós sabíamos que, de -∞ até -3 união com 2 +∞ era o conjunto-solução.

Professora: Exatamente. Na última linha, estamos à procura de que sinais?

Guilherme: Dos sinais da função.

Professora: Sim. Dos sinais mais ou menos?

Guilherme: Do mais. Porque a função pedia-nos os números superiores a zero.

Professora: Muito bem. Só falta aqui explicar uma coisinha que alguns grupos fizeram, que é... No fundo, é porque é que esta distribuição de sinais, menos-mais [aponta para a linha da tabela correspondente ao sinal de x+3], e não mais-menos.

Guilherme: Porque aqui é quando a função está abaixo do zero [aponta para a linha de x+3 e para a coluna de -infinito], portanto é negativo. E depois, a partir do zero para cima, é sempre positivo. E aqui a mesma coisa [aponta para a linha de x-2].

Professora: E se tivéssemos aqui -x-3?

Guilherme: Era ao contrário.

Professora: Já os sinais eram ao contrário. Como é que nós podemos... Normalmente, à frente desta linha nós representamos graficamente.

Este aluno, que provavelmente já teria ouvido falar em "tabela de sinal", usou esta representação e mostrou aos seus colegas da turma como poderia ser usada para resolver a tarefa proposta.

Encontrar um procedimento geral para resolver um certo tipo de tarefa constitui igualmente uma generalização. Os alunos, no seu trabalho autónomo chegaram a diferentes generalizações, que puderam ser comparadas no momento de discussão coletiva. Também neste caso, as explicações que os alunos foram dando sobre o modo como pensaram para responder à tarefa, constituem generalizações.

PREPARANDO E REFLETINDO SOBRE O TRABALHO DOS ALUNOS

Num estudo de aula realizado no 2.º ciclo, um grupo de 8 professores decidiu explorar o ensino-aprendizagem da Geometria, centrando a aula de investigação na exploração da soma da amplitude dos ângulos internos do triângulo. Este estudo de aula teve subjacente a abordagem exploratória usando tarefas que promovessem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e dinamizando discussões coletivas. Os professores selecionaram uma tarefa simples e conhecida, o recorte dos ângulos internos de um triângulo e a colagem desses ângulos de modo a formar um ângulo raso para que os alunos chegassem à generalização pretendida.

Na discussão do enunciado, foi considerado o material a usar, tendo o grupo optado por triângulos em papel que os alunos iriam manipular (uso de representações ativas). Uma das professoras, Cármen, sugeriu incluir uma imagem no enunciado para os alunos perceberem como colar os 3 ângulos dos triângulos. Duas das professoras, Sara e Catarina, discordaram, mostrando grande preocupação em deixar espaço para que os alunos pudessem explorar as relações entre os ângulos internos do triângulo, incentivando a perspetiva de descoberta e exploração por parte dos alunos:

Sara: Já têm ali a resolução.

Marisa: E aqui também. O facto de lhe mostrar isto...

Catarina: Não se devia mostrar.

Cármen: Ah. Mas aqui também se mostra, não é?

Marisa: Não estão, não estão ainda juntos...

Catarina: Não, eu acho que não se deve mostrar. Eles é que vão descobrir.

Na preparação da discussão coletiva, considerando o foco no desenvolvimento do raciocínio dos alunos, os professores tiveram em atenção como se poderia preparar o aparecimento da generalização pretendida. Assim, discutiram de modo aprofundado o número de triângulos que cada grupo de alunos iria explorar e como seria feita a discussão de forma a que estes pudessem fazer conjeturas de modo indutivo com base na análise de vários triângulos diferentes:

Sara: Mas era para também ter mais diversidade, acho eu.

Catarina: É para eles perceberem que aquilo é sempre, acontece sempre, seja triângulo grande ou pequeno, que eles não têm muita noção de ângulo. O ângulo é uma coisa que, enfim...

Rosa: E até podem dizer: nós trabalhámos com o triângulo e classificar o triângulo, não podem? Sabem classificar o triângulo. Nós trabalhámos com o triângulo X, não é?, e obtivemos um ângulo raso. O outro diz: o acutângulo e tivemos um ângulo raso. E depois a conclusão geral é que para qualquer triângulo... não é?

Todos os professores compreenderam a necessidade de os alunos explorarem diferentes triângulos, mas demorou a decidir se deviam existir triângulos diferentes dentro de cada grupo de alunos ou se bastava que cada grupo tivesse um só triângulo. Após alguma discussão, Catarina, sistematizou as várias opções e deu uma sugestão final, acolhida por todos. Assim, cada grupo de alunos teve um triângulo diferente que foi apresentado durante a discussão coletiva esperando-se que os alunos chegassem à generalização.

Na reflexão pós-aula, os professores destacaram a facilidade com que os alunos chegaram à generalização sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo:

Afonso: Pronto. Eles na terceira apresentação já tinham... Dentro do grupo, já estava lá a conclusão tirada, principalmente, pelo Tomás. Na terceira apresentação, houve logo quem fizesse uma generalização quando disse que cada triângulo diferente do… que dá os 180.

Marisa: Dá sempre os 180, exatamente.

Sara: São diferentes, mas dá sempre. Pois, eles disseram logo que sim. Nem vale a pena.

Afonso valorizou muito o facto de um aluno não ter aceitado de imediato esta generalização, no que foi seguido por outros professores:

Afonso: Nessa altura estava o Fábio a tentar descobrir se havia... Ou seja, eu uma coisa notei nesses dois miúdos: eles não se ficam por aquilo que a gente lhe diz, nem por aquilo que os outros disseram. Ele teve necessidade, ele começou a desenhar triângulos e a medi-los e a medir os ângulos. Vamos lá ver se não me estão a enganar.

Gonçalo: Ele disse que tu só levavas triângulos que davam 180 graus.

Rosa: Ah.

Gonçalo: "A professora é que traz só triângulos destes."

Afonso: E depois andou lá, por isso é que...

Gonçalo: E nós dissemos-lhe "Então faz. Faz tu um, faz tu o teu e vê se dá os 180."

Afonso: Mas depois ele ficou convencido. (...) Ao fim do terceiro, disse assim "Isto dá sempre 180."

César: Ah, eles não acreditavam que dava sempre 180.

Afonso: Não. Eles achavam que o jogo estava viciado.

César: Ah, curioso.

Afonso: Mas só aí é que a generalização tem sentido. É quando não se encontra um contraexemplo, não é?

Como referiu Afonso, o aluno Fábio considerou que não havia uma justificação que o levasse a aceitar a conclusão dos seus colegas e procurou encontrar um contraexemplo. Esta perceção do aluno sobre o poder de um contraexemplo surpreendeu os professores e mostra como é preciso procurar que as generalizações realizadas de forma indutiva sejam justificadas dedutivamente.

CONCLUSÃO

Neste artigo, os alunos tiveram oportunidade de participar ativamente nos processos de generalizar e justificar, usando para isso diversas representações. Depois de introduzida a tarefa pelo professor, por vezes com uma pequena discussão tendo em vista clarificar aspetos fundamentais sobre o que é dado e o que se pretende, e depois de terem feito o seu trabalho autónomo, os alunos apresentaram aos colegas as suas resoluções. Estas foram analisadas, de modo a serem justificados os diversos passos e a que pudessem ser confrontadas diferentes resoluções. Frequentemente, distinguem-se umas das outras pelas representações utilizadas. O trabalho dos alunos conduzido nesta perspetiva, que vimos ser planeado e refletido por um grupo de professores participantes num estudo de aula, permite que os alunos possam efetivamente ter um papel ativo na sua aprendizagem. Trata-se de um tipo de aula que precisa de ser cuidadosamente preparada, prevendo-se as estratégias e dificuldades dos alunos em cada tarefa, bem como as condições para que os alunos desenvolvam o seu raciocínio e as necessárias ações a realizar pelo professor. A seleção de tarefas apropriadas e uma preparação que permita tirar o melhor partido dessas tarefas é um aspeto fundamental do trabalho do professor que requer o seu envolvimento contínuo em processos de desenvolvimento profissional.

Referências

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio d'Água.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11—17.

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, N. Shuilleabhain & A. Takahashi (Eds.), *Lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 1—21). Springer.

Lampert, M., Franke, M.G., Kazemi, E., Ghousseini, H., Turrou, A.C., Beasley, H., Cunard, A., Crowe, K. (2013). Keeping it complex: Using rehearsals to support novice teacher learning of ambitious teaching. *Journal of Teacher Education, 64*(3), 226—243. DOI: 10.1177/0022487112473837

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11—34). APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? E*ducação e Matemática, 156*, 7—17.

Quaresma, M., & Morais, C. (2016). Uma surpreendente viagem ao Japão. *Educação e Matemática, 138*, 17—21.

João Pedro da Ponte
Marisa Quaresma
Paula Gomes
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Representações dinâmicas e interativas com o GeoGebra — construir, ver, transformar, pensar e discutir

> A geometria lida com objetos que podem ter uma existência física com os quais podemos interagir, e estuda também os processos de interação com esses objetos. É decisivo ter presente que os objetos físicos, com existência palpável ou desenhos, são sempre representações dos objetos geométricos. Esta caraterística específica do conhecimento matemático distingue-o de todas as outras formas de conhecimento, conferindo à visualização e à representação um papel essencial na compreensão matemática.
>
> (Caderno de Apontamentos de Geometria, EeM n.º 144, p. 16)

Recordamos este excerto de um artigo desta secção para destacar a importância de encararmos as representações dos objetos geométricos precisamente como representações que nos permitem aceder a esses objetos. Porém, são bem diversos tanto o modo como cada um de nós acede, como as imagens que vai criando dos objetos geométricos. Por isso é tão importante discutir tarefas e ferramentas de representação desses objetos na aprendizagem. Para esta discussão trazemos um episódio ocorrido no 2.º ano de escolaridade, num percurso de aprendizagem em que os alunos usaram o GeoGebra.

Os programas de geometria dinâmica permitem fazer construções geométricas ou explorar objetos geométricos já construídos numa grande diversidade de situações que possibilitam interações de natureza diversa. Para analisar as interações que eles proporcionam destacamos quatro das suas componentes que usaremos como referencial de análise do episódio (figura 1).

Figura 1

Estes quatro tipos de interações que agora destacamos ganham grande impacto quando as encaramos através da sua apresentação neste diagrama. Não há qualquer ordem ou hierarquia entre elas e o facto de estarem ligadas reforça as suas possibilidades. Mas antes de passar ao episódio, caracterizamos um pouco mais estas interações.

Focamos primeiro a representação de objetos tridimensionais num plano, o ecrã do computador. No GeoGebra, estas representações podem ser obtidas a partir de ferramentas de construção muito simples e intuitivas e situam-se na folha 3D. Esta folha 3D pode conviver no mesmo ecrã com uma folha 2D, permitindo assim o acesso, em simultâneo, a mais do que uma representação do mesmo objeto matemático dinâmico, uma representação tridimensional e representações bidimensionais. Todas as representações, 3D e 2D, estão associadas entre si de forma articulada, de maneira que a sua visualização dinâmica pode ser gerida pelo utilizador, como se o objeto tridimensional fosse rodado à nossa frente para que o possamos ver de frente, de lado ou de cima. Além das movimentações que permitem alterar a orientação da visualização, há funcionalidades associadas à manipulação que permitem agir sobre o objeto dinâmico e tornar visíveis, destacar ou esconder elementos do objeto, ou até transformar esse objeto, esticando ou encolhendo alguns dos seus elementos, por exemplo.

O episódio de sala de aula que escolhemos decorreu em momentos de trabalho, com recurso ao GeoGebra, realizados em coadjuvação, professora titular de turma e professora de apoio. As tarefas envolvidas foram planeadas pelas duas professoras e ambas iniciaram a utilização do GeoGebra com os seus alunos no início do ano letivo 2020/21. Este episódio tem uma caraterística notável, pois os alunos chegaram a conclusões relevantes do ponto de vista matemático e que não eram esperadas pelas professoras. Essa é a razão principal porque decidimos apresentá-lo e discuti-lo. A descrição do episódio tem por base uma estrutura narrativa que contempla os seguintes pontos: o contexto e a tarefa, as conclusões das crianças e algumas considerações das professoras. No final apresentamos as nossas reflexões sob a forma de discussão.

O CONTEXTO E A TAREFA

Este trabalho enquadra-se no desenvolvimento dos tópicos *Sólidos*: Características dos Sólidos e *Figuras Planas*: Polígonos, referentes às Novas Aprendizagens Essenciais de 2.º ano de Escolaridade.

Faz parte de um percurso em coconstrução que iniciou no ano letivo transato, onde os alunos tiveram a oportunidade de 1) agrupar caixas que trouxeram, muito próximas dos sólidos geométricos, definindo diferentes critérios de agrupamento; 2) descobrir características dos poliedros e dos sólidos que não são poliedros; 3) através da estratégia de "entrar dentro da caixa", descrever o que observavam, definindo as figuras que constituem os poliedros; e 4) construir planificações de poliedros.

As aprendizagens promovidas anteriormente decorreram da manipulação de materiais físicos não estruturados, em atividades de natureza exploratória, onde os alunos, em grupo: i) foram desafiados a desenvolver uma tarefa; ii) a comunicar ao grupo turma como pensaram; iii) a questionar e a serem questionados, justificando as suas ideias; iv) a sistematizar o que aprenderam; e v) a definir o trabalho a ser desenvolvido, de acordo com dificuldades sentidas ou com inquietações que surgiram.

Este ano letivo retomamos o percurso, mas desta vez com recurso ao GeoGebra para realizar atividades de natureza exploratória. Num primeiro momento, os alunos foram convidados, a pares, a descobrir este ambiente de geometria dinâmica. Nesta exploração construíram diferentes figuras 3D que partilharam e, após discussão coletiva, foram convidados a agrupá-las, segundo critérios que criaram. Um dos agrupamentos encontrados foi o dos poliedros e dentro deste, os subagrupamentos de prismas e de pirâmides. De seguida, acordou-se em estudar as propriedades dos prismas, a partir do preenchimento a pares de uma tabela como a da figura 2, ainda não preenchida, mas que continha as representações de alguns prismas.

No momento de interlocução coletiva referente à análise das respostas dos alunos (figura 2), aquando da descoberta das propriedades dos prismas, surgiu a questão "Por que razão o quadrado é retângulo?".

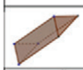
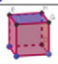
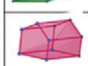
Poliedro	N.º de faces	N.º de arestas	N.º de Vértices	Nome da face em menor número	Nome do Poliedro	Nome da face em maior número
	5	9	6	triângulo	Prisma triângular	retângulo
	6	12	8	quadrado	Prisma quadrangular - cubo -	quadrado
	6	12	8	retângulo	Prisma retângular - paralelepípedo -	retângulo
	7	15	10	pentágono	Prisma pentagonal	retângulo

Figura 2

Desta forma, quando lhes foi pedido para assinalarem o que os prismas da tabela têm em comum, um dos alunos referiu que "*em todos a face que existe em maior número é o retângulo*". Perante esta afirmação, outro aluno disse que não concordava, porque no cubo só existiam quadrados. Nessa altura, o primeiro mencionou que "*o quadrado era retângulo, porque se esticássemos conseguíamos obter o retângulo*".

Estas ideias e a controvérsia inesperada exigiram uma intervenção da professora. Para que o aluno pudesse demonstrar essa transformação (o esticar), a professora deu-lhe um geoplano e pediu-lhe para fazer o quadrado e posteriormente mostrar como conseguia transformá-lo em retângulo. Destacamos a tentativa do aluno para fazer a transformação que a professora pediu (figuras 3 e 4).

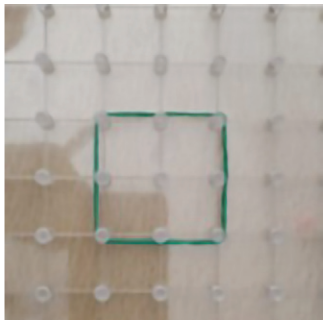


Figura 3

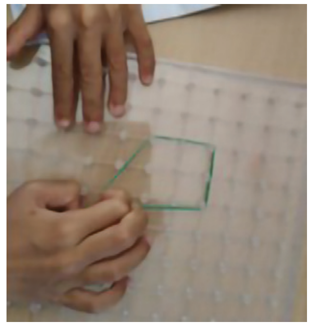


Figura 4

Dadas as dificuldades sentidas para fazer a transformação do quadrado em retângulo, o mesmo aluno sugeriu fazê-la nos prismas construídos no GeoGebra (figuras 5, 6 e 7). Na figura 5 estão representados os prismas iniciais e nas figuras 6 e 7 os prismas sobre os quais, primeiro este aluno e depois também os outros, fizeram as tentativas de transformação.

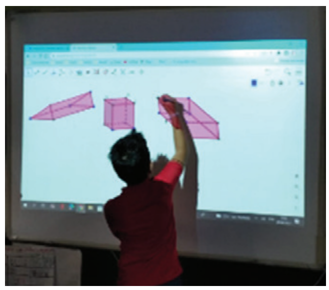


Figura 5

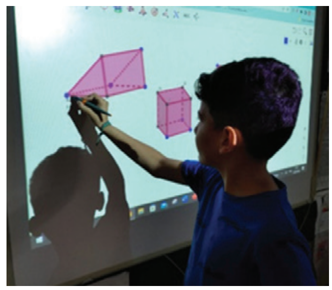


Figura 6

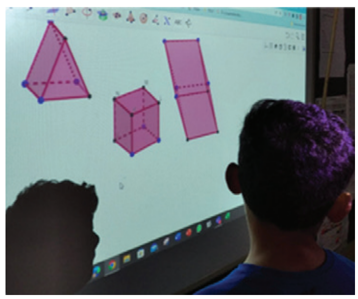


Figura 7

No GeoGebra, ao mexerem em apenas um vértice, os alunos conseguiram mostrar a transformação dos retângulos. Nessa altura, voltou-se a questionar sobre as razões que justificam considerar-se o quadrado como um retângulo. Depois desta discussão foi iniciada uma nova tarefa de exploração, que não apresentamos porque nos focamos apenas na análise deste episódio.

AS CONCLUSÕES DAS CRIANÇAS E ALGUMAS CONSIDERAÇÕES DAS PROFESSORAS

Durante esta exploração as crianças tiraram algumas conclusões que destacamos:

- O quadrado é retângulo, porque se "esticarmos" o quadrado ele transforma-se em retângulo.
- Só conseguimos fazer esta transformação no GeoGebra, quando recorremos aos prismas.
- Os polígonos são as faces dos poliedros.

Estas conclusões foram inesperadas para nós, quer porque foi a primeira experiência que realizamos sobre este assunto num ambiente de geometria dinâmica, quer pelas relações geométricas envolvidas. Do nosso ponto de vista é importante evidenciar que ao longo deste percurso de aprendizagem fomos confrontadas com situações que não tínhamos antecipado, destacando-se:

- A perceção de que o quadrado é um retângulo, recorrendo às propriedades dos retângulos para o justificar "se esticarmos o quadrado ele transforma-se em retângulo".
- A representação dos retângulos nos prismas, mesmo quando estes foram isolados pela professora, quando sugeriu ao aluno mostrar a transformação no geoplano.
- A evolução do pensamento dos alunos, ao percecionarem propriedades geométricas, através da experiência de manipulação das representações no GeoGebra.
- A importância da interlocução na coconstrução das aprendizagens.

DISCUSSÃO

Este episódio constituiu um momento marcante nas experiências que temos realizado com recurso ao GeoGebra. Refletimos bastante em conjunto sobre ele e analisamo-lo sob vários pontos de vista que apresentamos.

Ao longo deste percurso destaca-se o papel do professor em lidar com as situações inesperadas, questionando e devolvendo, permitindo a coconstrução das aprendizagens – "*… se esticássemos conseguíamos obter o retângulo*". Por outro lado, neste papel evidencia-se ainda a aceitação de novas formas de resolução propostas pelos alunos, mesmo quando a sugestão da professora não correspondia ao pensamento do aluno – a professora isolou um quadrado do cubo, oferecendo ao aluno um geoplano para demonstrar a sua ideia. Por outro lado, o aluno, percecionando o objeto como um todo, solicitou o GeoGebra para demonstrar a transformação.

A compreensão do que se passou foi ficando para nós mais clara quando encaramos com mais atenção as representações que as crianças passaram a ter acesso. Retomando o esquema inicial, que evidencia as potencialidades da interação num ambiente de geometria dinâmica, ao longo deste percurso, destacam-se:

- a representação 3D, em ambientes dinâmicos (prismas idealizados e representados pelos alunos);
- a visualização de objetos dinâmicos (prismas representados pelos alunos e observados por eles de vários pontos de vista);
- a manipulação, que permitiu mexer e transformar os objetos (neste caso o esticar da representação);
- o desenvolvimento de diferentes representações, que permitiu a perceção do objeto como um todo e a associação aos seus elementos (o retângulo como elemento do prisma, o quadrado como um tipo particular de face retangular).

Esta última ideia é especialmente significativa pois evidencia o conceito de prisma como objeto composto e a íntima relação entre polígonos e poliedros, neste caso apenas prismas. Evidencia também a compreensão inclusiva da classe dos prismas, de que fazem parte os paralelepípedos e entre os quais o cubo é um caso particular. Do ponto de vista geométrico, esta classificação inclusiva é muitas vezes desconhecida ou mal compreendida por alunos de níveis muito mais avançados.

Este percurso de aprendizagem permitiu a vivência de situações que constituem desafios para a prática pedagógica, como i) o acesso a representações de prismas não comuns e em posições pouco habituais; ii) a abordagem inclusiva da classificação de retângulos e da classificação de prismas; iii) a manipulação de representações dinâmicas (esticar, aumentar os elementos, associar novos elementos); e iv) a oportunidade de agir sobre os objetos geométricos, criar novos objetos e desenvolver o conhecimento sobre esses objetos.

Como já ficou apontado atrás, este percurso não terminou com esta tarefa e este episódio. As conclusões inesperadas que resultaram desta exploração não podiam deixar de nos desafiar para continuar. Agora, até com maior confiança, pelas possibilidades que o GeoGebra nos estava a abrir e pela curiosidade de descobrir até onde nos podem levar as crianças quando deixamos a sua imaginação a trabalhar.

Cristina Loureiro,
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

Helena Moreira
Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Pontinha

Sónia Fernandes
Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Pontinha

Descodificar e produzir diferentes representações

Leonor Santos, Sandra Raposo, António Cardoso, Paulo Correia e Rui Gonçalo Espadeiro

INTRODUÇÃO

Em agosto de 2021, através do Despacho n.º 8209/2021, de 19 de agosto, foram homologadas as novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para os nove anos do Ensino Básico. Ficou, desde logo, decidido que a generalização destes novos programas se faria de forma faseada, iniciando-se no ano letivo de 2022/23 nos 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade, prosseguindo a partir daí para os anos de escolaridade seguintes. Deste modo, para o 3.º ciclo do ensino básico, o primeiro ciclo completo de generalização terminará em 2024/25.

Contudo, foi iniciada uma antecipação desta generalização, logo em 2021/22, num número reduzido de turmas. Mais concretamente, ocorreu em duas turmas dos 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade, pertencentes a diferentes regiões de Portugal Continental. Para tal, foram contactados oito professores que prontamente aceitaram este desafio. A constituição das turmas onde esta antecipação ocorreu seguiu os critérios habitualmente usados no estabelecimento de ensino a que pertenciam, não tendo sido incluído qualquer procedimento particular devido a esta situação de exceção.

O trabalho desenvolvido, por ano de escolaridade, neste contexto, ao longo de todo o ano letivo de 2021/22, foi da responsabilidade partilhada entre os dois professores titulares das respetivas turmas e de alguns membros da equipa do Grupo de Trabalho do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática constituído para, em particular, apoiar esta antecipação.

O presente artigo tem por base a antecipação do programa de Matemática para o 7.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021). No início do ano letivo, as turmas envolvidas, nas palavras dos seus professores titulares, eram muito heterogéneas. "São turmas constituídas por alunos, na sua maioria, que não reconhecem a disciplina como uma das suas favoritas e referem ser aquela onde apresentam mais dificuldades e pouca motivação" (Cardoso & Raposo, 2022, p. 17).

Sendo esta revista dedicada ao tema das representações matemáticas, optámos por escolher uma tarefa enquadrada no tema matemático "Álgebra", no subtópico "Regularidades, sequências e sucessões". O leitor poder-se-á interrogar-se qual a razão para a escolha desta tarefa, não parecendo trazer nada de novo. Esperamos que a leitura de todo o artigo possa ajudar a compreender a razão desta opção.

UM OLHAR SOBRE A TAREFA

A propósito do estudo da "Álgebra", no subtópico "Regularidades, sequências e sucessões", foi proposta a tarefa "Como embelezar um jardim". Esta tarefa foi explorada com os alunos na fase final deste subtópico.

O desenvolvimento desta tarefa, nas duas turmas, foi feito com recurso à folha de cálculo do *Google*, tendo sido, numa turma (Turma 1), utilizados os *smartphones* dos alunos e na outra (Turma 2) computadores. Na Turma 1, a utilização da folha de cálculo não mostrou ser uma barreira ao desenvolvimento da tarefa, pois os alunos mostraram-se familiarizados com este recurso. Já o tinham usado no tema "Números", manipulando expressões algébricas, que tinham sido trabalhadas anteriormente. Uma vantagem a destacar, prende-se com o facto de ser possível trabalhar na sala da turma sem depender da disponibilidade horária de salas com computadores e sem ser necessário recorrer à Internet, desde que os alunos já tenham a aplicação instalada no seu telemóvel. A realização da tarefa foi feita a pares, situação à qual os alunos também estavam bastante familiarizados, permitindo uma rápida organização do ambiente da sala de aula e desta forma ter sido possível assegurar que cada par de alunos tinha um *smartphone*.

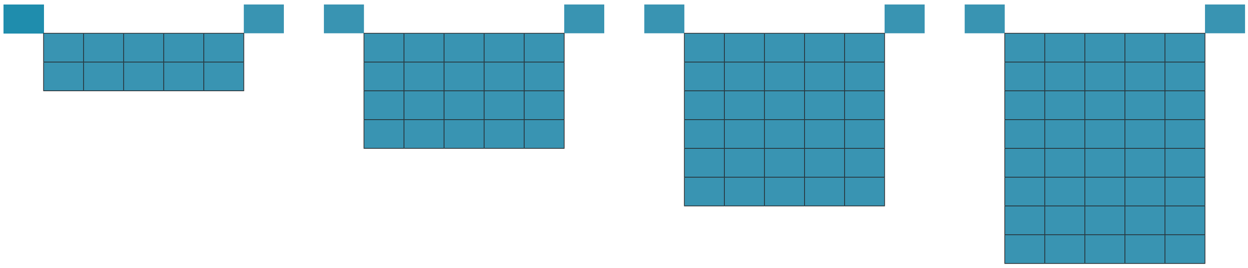
Na Turma 2, houve um par de alunos por computador, e, apesar de ser a primeira vez que utilizavam a folha de cálculo numa aula de Matemática, foi benéfico poder ser usada na sala onde habitualmente tinham as suas aulas de TIC, permitindo que os alunos pudessem manipular a folha de cálculo no ambiente para eles mais habitual, ou seja, num computador.

A aula foi desenvolvida em três fases. Numa primeira fase, foi feita a apresentação da tarefa aos alunos, tendo-lhes sido fornecido o enunciado. Sem avançar demais, o professor assegurou uma leitura atenta e o esclarecimento de dúvidas decorrentes da leitura do enunciado. Uma das questões colocadas pelos alunos, de forma imediata, foi como deveriam proceder para determinar os três primeiros termos no jardim B, uma vez que estes dados não eram fornecidos. Como forma de responder à questão, o professor apontou para a vantagem da utilização da folha de cálculo. Se identificassem a regularidade que estava presente nos termos conhecidos, conseguiriam identificar qualquer outro termo dessa sequência.

Tarefa - Como embelezar um jardim (sequências)

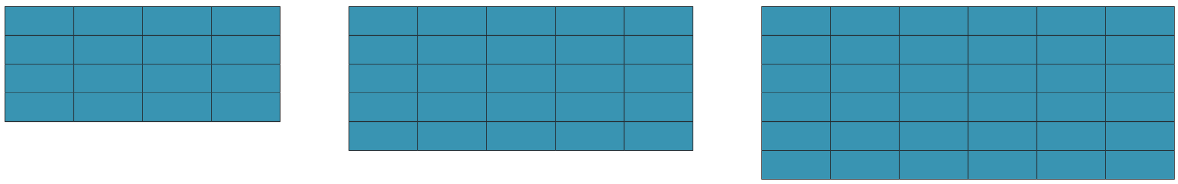
O Tó Zé é jardineiro numa quinta.
Na quinta, tem disponível duas zonas de cultivo que pretende embelezar.
Com o objetivo de plantar uma espécie diferente em cada quadrícula, optou por, semanalmente, transformar os seus jardins, de acordo com as seguintes sequências:

Jardim A:



semana 1 semana 2 semana 3 semana 4 (...)

Jardim B:



(...) semana 4 semana 5 semana 6 (...)

Resolve as questões seguintes usando a folha de cálculo:

1. Tendo por base o Jardim A, responde:

1.1. Quantas espécies diferentes de plantas terá o jardim na semana 5? E na semana 20?

1.2. Alguma vez o jardim terá 512 espécies diferentes de plantas? Justifica.

1.3. Qual poderá ser o termo geral da sequência correspondente ao jardim A?

(A) $n+10$ (C) $10n$

(B) $2n+10$ (D) $10n+2$

Justifica a tua opção.

2. Tendo por base o Jardim B, responde:

2.1. Quantas espécies diferentes de plantas terá o jardim em cada uma das três primeiras semanas?

2.2. Quantas espécies diferentes de plantas terá o jardim na semana 10?

2.3. Alguma vez o jardim terá 512 espécies diferentes de plantas? Justifica a tua resposta.

2.4. Qual poderá ser o termo geral da sequência correspondente ao número de espécies de espécies diferentes de plantas do jardim B? Explica o teu raciocínio.

3. Considerando os dois jardins:

3.1. Em qual deles seria possível plantar primeiro 65 espécies diferentes de plantas? Explica a tua resposta.

3.2. Em qual deles seria possível plantar primeiro 120? Explica a tua resposta.

3.3. Ao fim de algumas semanas o número de espécies diferentes de plantas num jardim, será o triplo do número de espécies diferentes de plantas do outro. Ao fim de quantas semanas se irá verificar esta relação?

Na segunda fase, os alunos desenvolveram autonomamente a tarefa, com o acompanhamento do professor. No desenvolvimento dos itens da primeira questão, era expectável que os alunos reconhecessem o padrão presente na sequência, na sua representação pictórica, para depois desenvolver um algoritmo, nomeadamente, na identificação do termo geral, programando a folha de cálculo.

Alguns alunos da Turma 2 revelaram ter dificuldades na "organização" a ter na folha de cálculo. O professor assumiu aqui o papel de, junto de cada par de alunos, destacar algumas vantagens de apresentar a informação já conhecida (números de semanas e de plantas correspondentes) em colunas.

Com o registo na folha de cálculo dos elementos correspondentes ao jardim A, a maioria dos grupos não teve dificuldade em responder à questão 1.1.. Quando questionados, mostravam conhecer a lei de formação, mas a esmagadora maioria dos grupos determinou o número de plantas ao fim de 5 semanas sem usar as potencialidades da folha de cálculo, ou seja, limitou-se a ir registando em cada uma das células seguintes o valor correspondente, recorrendo ao cálculo mental. E estavam a fazer o mesmo para determinar o número de plantas ao fim de 20 semanas.

O professor interrompeu momentaneamente os trabalhos e procurou que os alunos se apercebessem das vantagens de usar o conhecimento da lei de formação aplicado às potencialidades de uma folha de cálculo. Tal facto é particularmente relevante por haver necessidade, como parecia ser o caso nas próximas questões, de relacionar um número elevado de plantas e de semanas. Após este *input*, por parte do professor à turma, os alunos retomaram o trabalho a pares e foi possível perceber que procuravam agora transcrever as leis de formação identificadas para a folha de cálculo, para depois com um simples "arrastar" conseguir visualizar o número de plantas em semanas mais distantes da situação inicial.

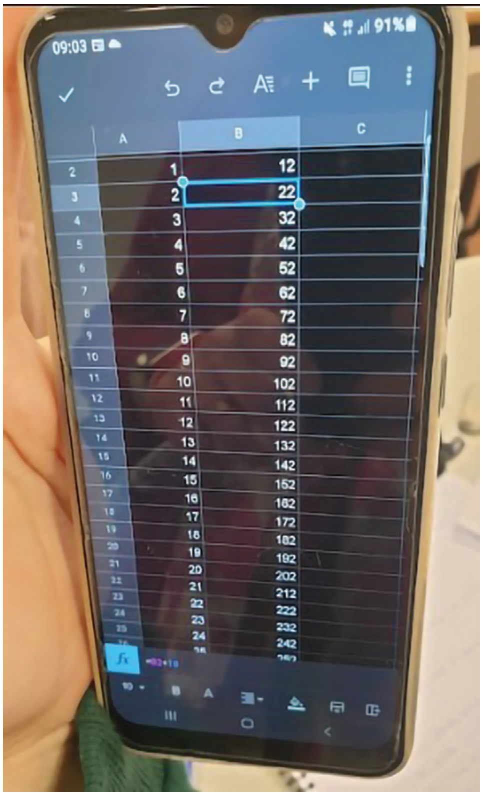


Figura 1. Produção de um par de alunos relativa à questão 1, na folha de cálculo

Nesta turma, todos os grupos optaram pela recorrência, procurando adicionar 10 ao número de plantas da semana anterior, o que lhes permitiu também responder à questão 1.2..

Em ambas as turmas, os alunos revelaram mais dificuldades na abordagem à sequência proposta para o jardim B, nomeadamente na identificação da fórmula a escrever na folha de cálculo, que lhes permitisse chegar às respostas para as questões apresentadas. Era expectável que os alunos optassem pela introdução da fórmula que recorre ao termo geral ou com recurso à escrita da expressão por recorrência. No entanto, embora alguns alunos reconhecessem um padrão que favorecia a escrita de uma expressão por recorrência, nenhum par conseguiu formalizá-la na folha de cálculo. Apenas um par de alunos conseguiu de forma autónoma encontrar o termo geral desta sequência e escrevê-la na folha de cálculo (figura 2).

Com a intervenção de um aluno, um pouco mais entusiasta com a "descoberta" que tinha acabado de fazer, a tarefa dos restantes pares ficou simplificada, tendo apenas que descodificar o que o colega acabava de dizer: "Professora, basta multiplicar a célula da semana por ela própria e descobrem-se os valores."

Os alunos não denotaram muitas dificuldades na realização das questões 3.1. e 3.2., apresentando explicações que tinham por base os seus registos na folha de cálculo.

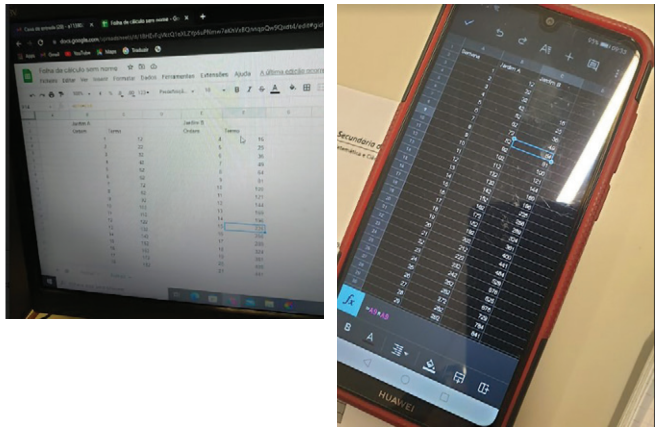


Figura 2. Produções de dois pares de alunos relativas às questões 1 e 2, na folha de cálculo

Já em relação à questão 3.3., os alunos apresentaram algumas dificuldades. Alguns referiram que não era possível encontrar exatamente o triplo de plantas entre os 2 jardins, tendo o professor dado indicações no sentido de identificarem os momentos em que um dos jardins tinha, pelo menos, o triplo de plantas do outro.

Assim, a maioria dos alunos identificou a semana 31 como o momento em que o jardim B terá mais do triplo de plantas do jardim A. No entanto, apenas dois pares de alunos identificaram que o mesmo também ocorre nas 3 primeiras semanas, ou seja, o jardim A tem mais do triplo de plantas que o jardim B.

Na terceira fase, a da discussão em grupo turma, foram selecionadas as produções de alguns alunos, para análise e discussão coletiva, identificados os processos de resolução e explicações usados pelos diferentes pares, bem como uma sistematização das conclusões consideradas mais relevantes. O professor projetou uma folha de cálculo para explorar os processos de resolução referidos pelos alunos e aproveitou a mesma para destacar algumas estratégias alternativas para facilitar o processo de resolução (exemplo: nenhum grupo usou as potencialidades da folha de cálculo para determinar o triplo do número de plantas de um jardim e assim facilitar a comparação com o outro jardim). As justificações e explicações solicitadas nas questões da tarefa, nomeadamente na questão 1.3., foram retomadas não só para as aperfeiçoar, como também para atribuir-lhes significado como processo de formação da sequência não por observação.

AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO

Um aspeto central deste novo programa de Matemática para o 7.º ano, como de todas as outras Aprendizagens Matemáticas para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), é o de considerar como conteúdos de aprendizagem, tanto os conhecimentos matemáticos inscritos nos quatro temas matemáticos (Números, Álgebra, Dados e Probabilidades e Geometria), como as capacidades matemáticas transversais que passaram a ser seis (resolução de problemas, raciocínio matemático, pensamento computacional, comunicação matemática, representações matemáticas, e conexões matemáticas) e as capacidades e atitudes matemáticas gerais transversais decorrentes das áreas de competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, dando particular relevância àquelas que mais diretamente se relacionam com a matemática (as capacidades de pensamento crítico, criatividade, colaboração e autorregulação, e as atitudes de autoconfiança, perseverança, iniciativa e autonomia e valorização do papel da Matemática). Estes conteúdos de aprendizagem deverão ser trabalhados de forma articulada (figura 3.).

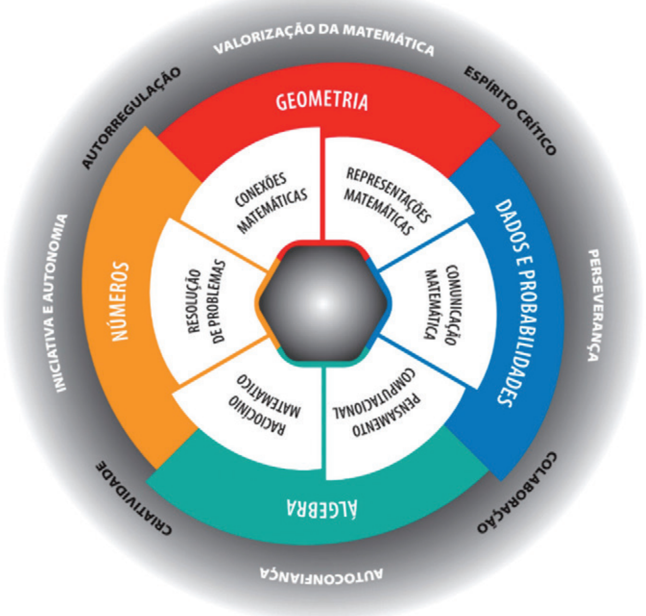


Figura 3. Conteúdos de aprendizagem em Matemática no Ensino Básico

Os objetivos de aprendizagem considerados para esta tarefa, para além dos objetivos relacionados com o tema matemático, incluíram o desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais de resolução de problemas, pensamento computacional e representações matemáticas, e da autoconfiança e perseverança, enquanto atitudes transversais gerais.

Dado o foco deste artigo, concentremo-nos na capacidade matemática transversal das representações matemáticas. A abordagem deste conteúdo de aprendizagem deve valorizar dois subtópicos que se complementam entre si: as "representações múltiplas", que se focam na capacidade dos alunos usarem diversos tipos de representações (designado por "tratamento", segundo Duval, 2006), e as "conexões entre representações", que incidem na capacidade dos alunos serem capazes de relacionar diferentes tipos de representações e de passarem de uma para outra representação (designado por "conversão", por Duval, 2006).

Podemos afirmar que o trabalho em matemática não dispensa as representações. Ao contrário do que se passa em outras ciências, dada a natureza dos objetos matemáticos (não observáveis), a única forma de lhes aceder é através das representações (Duval, 2006). Mas o uso de representações matemáticas não é apenas um meio de comunicação, proporciona igualmente a construção com compreensão de conhecimento (Santos, 2015, p. 4). Cria oportunidades para aceder, por parte dos alunos, aos objetos matemáticos, usando diferentes formas, respeitando deste modo as diversas apetências de cada um. Assim, podemos afirmar que é um meio de respeitar o princípio da "Matemática para Todos", um dos princípios norteadores destas novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico.

Existem diversas classificações para tipificar as representações. Uma das mais usadas é a apontada por Bruner (1999) que considera as representações ativas, que envolvem objetos e movimentos (por exemplo, materiais manipuláveis, estruturados ou não, como sejam geoplanos, figuras ou sólidos, cubos ou cubos de encaixe, espelhos, cordas,…, e simulações); as representações icónicas, que recorrem a imagens mais ou menos estruturadas (desenho, esquema, diagrama); e as representações simbólicas, que fazem uso de símbolos que envolvem códigos (linguagem oral e escrita, e símbolos como sejam numerais, sinais, fórmulas, expressões, escrita simbólica matemática, …).

Na tarefa "Como embelezar um jardim", o enunciado recorre a diferentes tipos de representações. Poder-se-á dizer que, neste tipo de tarefa, a representação icónica, através de imagens em forma de esquemas, é certamente facilitadora para a compreensão por parte dos alunos da situação que lhes é apresentada. Esta representação permite desenvolver nos alunos a capacidade de representar termos da sequência sem recurso à Álgebra, o que pode constituir-se como uma oportunidade de todos os alunos (mesmo aqueles com menor familiaridade com os processos algébricos) desenvolverem algum tipo de atividade matemática. Permite ainda, através da decomposição das figuras em partes, que os alunos construam uma expressão algébrica que defina o termo geral.

Mas o enunciado faz ainda uso, não só de linguagem escrita natural, como da escrita simbólica matemática. Muito embora a escrita simbólica matemática possa levantar dificuldades de compreensão por parte dos alunos, não foi este o caso. São alunos do 7.º ano de escolaridade, razoavelmente habituados a expressões algébricas não muito complexas. Note-se que neste caso não há expressões que muitas vezes aos alunos parecem muito semelhantes, e para as quais têm dificuldade em distinguir. As expressões algébricas utilizadas na tarefa foram intencionalmente escolhidas, de forma a estarem ao nível de exigência que se pretende para o 7.º ano de escolaridade, no início do estudo da Álgebra.

Por último, o recurso à folha de cálculo teve dois objetivos em particular. Por um lado, permite colocar questões que dificilmente seriam adequadas se não se usasse este recurso, por exemplo a resolução de uma equação a propósito da questão 3.3.. A representação de uma sequência em tabela emerge de forma natural e a questão 3 cria uma oportunidade para valorizar esta representação, pela possibilidade de fazer comparações de forma eficaz entre as duas sequências. Por outro lado, permite usar diferentes estratégias, por exemplo, para responder às questões 1.2. e 1.3.. Uma das possibilidades é através da simples observação dos valores obtidos na folha de cálculo, outra possibilidade é recorrer à interpretação da situação apresentada e da sua formalização em escrita simbólica. São claramente estratégias que exigem diferentes níveis de exigência cognitiva, mas por isso mesmo permitem ser resolvidas por um maior número de alunos. Possibilita, igualmente, estabelecer de forma acessível comparações entre valores das duas sequências. Cria assim um contexto favorável ao desenvolvimento de uma atitude de autoconfiança por parte dos alunos.

A CONCLUIR

Nesta tarefa podemos observar que a variedade de representações matemáticas é parte integrante da informação disponibilizada aos alunos. A representação algébrica das sequências contribui para a possibilidade de estender a análise das sequências para ordens em que a representação pictórica deixa de ser viável, permite trabalhar as expressões algébricas num contexto específico e com significado para os alunos, e no caso da utilização da folha de cálculo cria oportunidades para o desenvolvimento do pensamento computacional e da literacia digital dos alunos.

O desenvolvimento desta tarefa depende da mobilização cumulativa e complementar dos três tipos de representações apresentadas, o que constitui um fator para o seu enriquecimento, em particular para o desenvolvimento desta capacidade matemática. Naturalmente esta não é a única abordagem possível. Por exemplo, diferentes tarefas podem privilegiar a utilização de um tipo de representação, e, nesse caso, a diversidade pretendida ser conseguida, fazendo variar o tipo de representação entre tarefas. Pode, mas é mais pobre em termos de oportunidades de aprendizagem que se proporcionam aos alunos, se ficarmos apenas por estes casos. O tratamento e a conversão entre representações torna os alunos mais competentes na resolução de problemas (Duval, 2006; Heinze, Star, & Verschaffel, 2009).

A razão da escolha desta tarefa assenta no espírito deste novo programa de matemática em não ignorar tudo o que já tinha sido feito de adequado no passado em Portugal, mas sim dando-lhe continuidade, considerar a evolução das orientações curriculares para o ensino e aprendizagem em matemática, respeitando: (i) as aprendizagens matemáticas dos alunos que são relevantes no século XXI, princípio "Matemática para o século XXI"; (ii) que todos os alunos têm direito a aprender matemática, princípio da "Matemática para todos"; (iii) e que a matemática contribui, para a formação global do aluno, a par e em diálogo com as outras áreas curriculares, para o desenvolvimento das áreas de competências transversais indicadas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, princípio "A Matemática é única, mas não é a única".

Referências

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico 7.º ano de escolaridade.* ME-DGE. Disponível em: http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131 https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Cardoso, A., & Raposo, S. (2022). Uma abordagem às figuras planas com tarefas no Geogebra - Novas aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática, 164*, 17–22.

Heinze, A, Star, J. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 41*, 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Santos, L. (2015). Representações matemáticas. In M. Pires et al. (Eds.), *Investigação em Educação Matemática. Representações matemáticas* (pp. 3–6). SPIEM.

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Sandra Raposo
Escola Secundária de Pinhal Novo
António Cardoso
Agrupamento de Escolas de Reguengos de Monsaraz
Paulo Correia
Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal
Rui Gonçalo Espadeiro
Agrupamento de Escolas de Redondo

Diferentes representações no estudo de equações diferenciais

Nélia Amado, Maria Madalena Dullius, Jaime Carvalho e Silva

Discutir a importância dos diversos tópicos matemáticos é uma missão impossível e não é esse o nosso objetivo. No entanto, existem temas que, pela sua aplicabilidade a inúmeras áreas do saber, se tornam particularmente relevantes. O estudo das equações diferenciais é um dos temas que merece destaque pelo seu contributo nas várias ciências. Convém relembrar algumas das aplicações muitas vezes ignoradas como, por exemplo, o contributo destas equações na investigação criminal ou na arqueologia. Ao assistirmos à famosa série CSI vimos como os investigadores, ao chegarem ao local do crime, conseguem determinar a hora a que este ocorreu, mas talvez poucos se recordem que o processo que permite modelar o fenómeno da temperatura se baseia na resolução de uma equação diferencial. Também os arqueólogos, recorrem a processos que envolvem equações diferenciais para determinarem a data das suas descobertas pela análise do carbono 14.

Na verdade, a importância das equações diferenciais é mais conhecida em áreas como a Medicina, as Ciências Farmacêuticas, as Engenharias, a Gestão ou a Economia. Na Medicina, estas equações são fundamentais para modelar o tempo de atuação de determinado medicamento ou para o estudo da taxa de crescimento de tumores, entre muitos outros exemplos. Na Economia e Gestão são bem conhecidos os exemplos relacionados com o modelo de crescimento populacional de Malthus, que iremos abordar adiante, aos modelos de empréstimos, entre outros. Nas Engenharias, as soluções destas equações são usadas, por exemplo, para projetar pontes, automóveis, aviões e circuitos elétricos. Em suma, as equações diferenciais são uma poderosa ferramenta matemática para modelar inúmeros fenómenos reais de economia, engenharia, ciências naturais e ciências sociais.

Dada a sua importância e os desafios da sociedade atual, importa que o ensino e a aprendizagem deste tema proporcione aos alunos a oportunidade de identificar e resolver problemas da vida real de forma critica, em vez de se limitarem à manipulação de regras e procedimentos, sem qualquer compreensão dos fenómenos envolvidos.

RECORDANDO A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Resolver uma equação diferencial é, pois, encontrar as funções que a satisfazem. Vejamos um exemplo, que pode ser facilmente compreendido e resolvido por alunos do ensino secundário que tenham estudado derivadas.

Durante décadas, o ensino e a aprendizagem de equações diferenciais baseou-se quase exclusivamente na manipulação das representações analíticas.

> Resolva a equação diferencial $y'' - 2 = 0$ e indique a solução da equação que satisfaz as seguintes condições $y'(0)=2$ e $y(1)=2$.
>
> De facto, se $y''=2$ então $y'=2x+C_1$ e rapidamente se pode concluir que a família de funções $y = x^2+C_1 x+C_2$ são soluções da equação dada. Mas atendendo a que são dadas condições, podemos determinar a função que as satisfaz
>
> $y'(0)=2$, logo $C_1=2$ e $y(1)=2$, então $y(1)=1+2+C_2$, donde se pode concluir que $C_2=-1$
>
> A função que é solução daquela equação é $y =x^2+2x-1$

LIMITAÇÕES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O estudo das equações diferenciais, a partir de representações simbólicas e da manipulação e transformação dessas sucessivas representações, raramente permite aos alunos uma visão deste conceito matemático que lhes assegure uma aprendizagem com compreensão. De um modo geral, os alunos resolvem mecanicamente equações diferenciais, aplicando as diversas técnicas que aprendem, mas sem ter uma ideia do seu verdadeiro significado. A este propósito, Camacho-Machín, Perdomo-Díaz e Santos-Trigo (2012) referem que os alunos revelam dificuldades em identificar os diferentes significados do conceito de solução de uma equação diferencial e na apresentação das soluções de um problema que envolva este tipo de equações. Muito menos se apercebem que os métodos analíticos apenas permitem resolver uma ínfima parte das equações diferenciais.

No estudo realizado por estes autores, os alunos mostraram dificuldade em verificar se uma função era uma solução de uma equação, optando por resolvê-la e comparar os resultados obtidos com a solução dada. O referido estudo, mostra ainda que uma aprendizagem baseada apenas na manipulação algébrica se revela pouco duradoura, pois os alunos carecem, ou pelo menos não dependem, de estratégias de monitorização para se concentrarem em formas de recordar os procedimentos e as formas de raciocínio relacionados com a expressão envolvida. Dadas as limitações de aprendizagem das equações diferenciais através da mera manipulação analítica, é nossa convicção defender que os alunos necessitam de conhecer e tomar consciência dos recursos existentes e que podem usar na abordagem de diferentes situações ou problemas que envolvem este tipo de equações.

Como referimos, as equações diferenciais são uma poderosa ferramenta matemática para modelar inúmeros fenómenos reais, de diferentes áreas do conhecimento. Dada a sua importância e os desafios da sociedade atual, importa que os alunos sejam capazes de identificar e resolver problemas de forma crítica.

AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A forma como os alunos representam conceitos e resolvem problemas, desempenha um papel relevante na identificação e exploração de relações matemáticas. A modelação matemática surge como uma abordagem que permite estabelecer uma ponte entre a matemática escolar e a matemática usada em outras áreas do conhecimento (Gallegos, 2015). Uma análise da literatura mostra claramente que a modelação matemática de situações reais apresenta múltiplas vantagens na aprendizagem matemática em todos os níveis de ensino (Blomhoj & Carreira, 2009).

Deste modo, uma forma possível de iniciar o estudo das equações diferenciais pode ser resolvendo alguns problemas que envolvem tipos de equações, a que podem aceder a partir do significado do conceito de derivada, sem se focarem ainda no uso de um algoritmo particular. Camacho-Machín, Perdomo-Díaz e Santos-Trigo (2012), defendem que o estudo destas equações não deve ser limitado à classificação e posterior resolução através de algoritmos, mas que estas devem ser analisadas a partir de outros pontos de vista, relacionando-os com o conceito de derivada de uma função e extraindo deles o máximo de informação possível sobre as soluções. De igual modo, os autores defendem que os alunos precisam discutir e usar o significado geométrico da derivada e não se focar apenas em regras ou procedimentos para construir a direção do campo associado a uma equação. Pensar na derivada e no seu significado geométrico é um aspeto determinante para construir o campo de direção associado à equação.

O recurso a diferentes representações permite estabelecer uma ponte entre o que os alunos já conhecem e aquilo que vão aprender. As diferentes representações revelam-se fundamentais para o estabelecimento destas conexões entre o conceito de derivada e o de equação diferencial, facilitando a compreensão do novo conceito.

Por outro lado, as tecnologias digitais oferecem uma oportunidade para os alunos resolverem problemas de modelação que envolvem estas equações. O recurso a diferentes tipos de representação como gráfica ou numérica contribuem para dar sentido às soluções dos problemas. Assim, os alunos podem não só aprender como usar as tecnologias para resolver equações diferenciais, mas também aprender aplicações das equações diferenciais como ferramenta para modelar determinados problemas da vida real.

O ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAS NOS CURRÍCULOS

O estudo das equações diferenciais tem mudado ao longo dos tempos e, em alguns países, faz parte do currículo no ensino secundário. O exemplo apresentado inicialmente de uma equação diferencial é acessível a alunos do ensino secundário, pelo que podem ser propostos problemas da vida real que envolvam equações diferenciais simples, aos alunos deste nível de escolaridade.

Moungabio (2016) refere que no ensino secundário, em França, existe uma evolução clara de um capítulo isolado com técnicas próprias que se esgotavam nesse tema, para um papel maior da modelação, da articulação entre a Matemática e a Física, e para a utilização da Tecnologia. Atualmente, em França as equações diferenciais fazem parte do programa do último ano do ensino secundário[1] e servem como introdução à noção de primitiva. Apenas são estudadas as equações do tipo $y'=f(x)$ e $y'=ay+b$. No programa recomenda-se a ligação com a modelação, podendo ir-se até à equação logística; é indicada a resolução das equações diferenciais recorrendo ao método de aproximação de Euler e é referida a história da Matemática neste contexto (Newton, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati).

Como sabemos, este tema não faz parte do currículo do ensino secundário em Portugal. O Grupo de Revisão Curricular das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário (RCAEMES) discutiu a possibilidade de integrar o estudo de equações diferenciais simples nas novas Aprendizagens Essenciais para o Ensino Secundário, contudo, este tópico não integrou a versão que foi discutida recentemente, pelo que não fará parte das Aprendizagens Essenciais para o Ensino Secundário.

Apesar de ser um tema iniciado no ensino secundário em alguns países, é no Ensino Superior que as equações diferenciais são estudadas, em diversos cursos, como foi referido.

Para este artigo, selecionámos duas experiências de ensino de equações diferenciais, em duas instituições de ensino superior, uma em Portugal e outra no Brasil. A escolha destas duas experiências prende-se com o facto de a abordagem seguida envolver a utilização de recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem destas equações. Apesar de a utilização das tecnologias não ser uma prática frequente, existem vários estudos, a nível nacional e internacional, que nos mostram as vantagens da utilização das tecnologias neste nível de ensino (Gallegos, 2015, Camacho-Machín, Perdomo-Díaz, & Santos-Trigo, 2012).

UMA EXPERIÊNCIA NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Na Universidade de Coimbra, é comum as disciplinas de iniciação de Análise Matemática, que incluem o tema de equações diferenciais, contemplarem a interpretação geométrica das equações diferenciais usando, para tal, os campos de direções.

Um dos exercícios típicos (Carvalho e Silva, 1994), em que a ênfase é no trabalho gráfico, é reproduzido na figura 1. Aqui os alunos precisam de interiorizar que os pedaços de tangentes exibidos permitem reconstruir de forma aproximada uma solução da equação diferencial, visto que, perto do ponto de tangência, a reta tangente é uma boa aproximação (linear) da função solução da equação diferencial. Ou seja, os alunos apenas necessitam de mobilizar conhecimentos de derivadas já estudados anteriormente.

[1] Programme de spécialité de mathématiques de terminale générale, Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019.

Use o seguinte campo de direções da equação diferencial $y' = \frac{1}{x}$ para descrever o comportamento da solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$. Deve referir em particular o que se poderá dizer sobre a monotonia e sobre o limite de $y(x)$ quando x tende para $+\infty$.

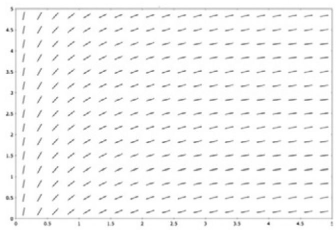


Figura 1. Exercício de Análise Matemática

A modelação matemática é um tema sempre presente e necessita de um trabalho mais numérico ou gráfico do que algébrico. Um problema típico conhecido é o Problema de Malthus (figura 2) que, não sendo, estritamente, um modelo económico, é claramente um modelo que, pela sua simplicidade, importância e relevo também em economia, deve ser estudado. Pretende-se que a resolução seja acompanhada do uso de ferramentas tecnológicas, em particular, do GeoGebra.

EQUAÇÃO DE MALTHUS

Considere a equação diferencial que modela o crescimento populacional *y(t)*, segundo Malthus *y'(t)= ky(t)*, onde *k* é um parâmetro real, *y(t)* está expresso em milhões e *t* expresso em anos.

(a) Resolva a equação diferencial (solução geral).

(b) Tendo por base o sinal de *y'* descreva (sem efetuar cálculos) qual o comportamento qualitativo (monotonia) das soluções não negativas em função do sinal de *k*.

(c) Determine o valor de *k* e a solução da equação diferencial (solução particular), sabendo que a população inicial era de 10 milhões e que passados 10 anos era de 100 milhões.

Figura 2. Problema de Malthus com recurso ao GeoGebra

A resolução completa deste problema está disponível em (Equação de Malthus – GeoGebra).

Para perceber a situação em termos gerais, apresenta-se o campo de direções de uma equação diferencial deste tipo, a equação diferencial *y' (t)= 2y*.

No GeoGebra é sempre possível modificar o valor de *n* (número de tangentes em cada linha horizontal) e o valor de *L* (comprimento de cada pedaço de tangente) obtendo assim diferentes campos de direções (figura 3).

Concluímos assim que a solução geral da equação diferencial $y(t)=e^{(kt+c_1)}$ é onde c_1 é uma constante arbitrária.

A população *y(t)* cresce se *k* é positivo e decresce se *k* é negativo. Os gráficos 2 e 3 ilustram estas duas situações.

A ênfase na modelação matemática usando equações diferenciais e na interpretação geométrica usando a definição de derivada ou um método de aproximação, faz com que o uso da tecnologia seja incontornável. Existem numerosos programas de simulação muito simples de utilizar, que permitem obter o campo de direções. Por exemplo, usando o software Desmos (https://www.desmos.com/calculator/ p7vd3cdmei), ou o Geogebra (https://www.geogebra.org/m/nbdvkybg#material/ au6gv9we; https://www.geogebra.org/m/W7dAdgqc).

Estes e muitos outros recursos são usados na resolução geométrica e numérica das equações diferenciais. Claro que os métodos de obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais, de que o mais simples é o método de Euler, não dispensam o uso de tecnologia.

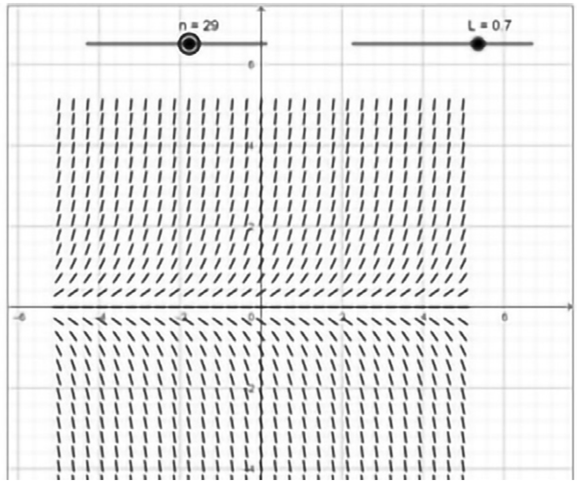


Figura 3. Gráfico 1 - Campo de direções

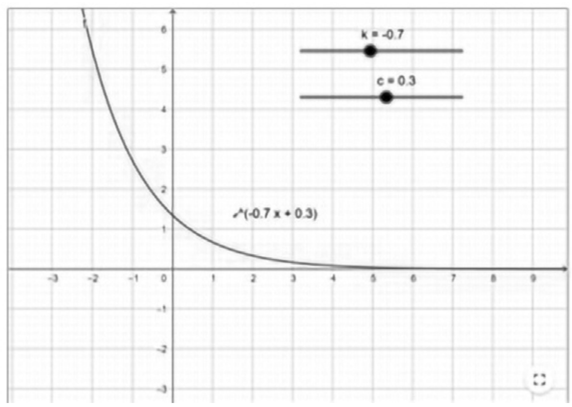


Figura 4. Gráfico 2 - Exemplo de uma solução da equação de Malthus decrescente

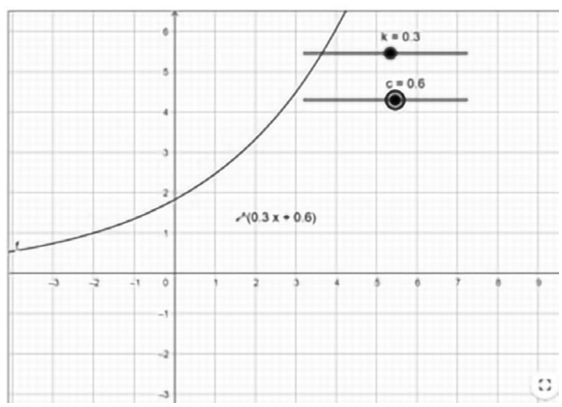


Figura 5. Gráfico 3 - Exemplo de uma solução da equação de Malthus crescente

UMA EXPERIÊNCIA NA UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES, BRASIL

Tal como em Portugal, também no Brasil existem experiências onde o estudo das equações diferenciais é feito com recurso às tecnologias e envolve os alunos na resolução de problemas da vida real.

As tecnologias digitais disponíveis, permitem ir além da simples aplicação de técnicas e da manipulação das representações analíticas para resolução das equações, o que pode ajudar os alunos a centrarem-se mais na interpretação das equações diferenciais e nas suas soluções em relação aos fenómenos em estudo. As tecnologias digitais proporcionam aos alunos a oportunidade de interagir com diferentes representações que descrevem um mesmo fenómeno. Por meio desta interação, o aluno dispõe da oportunidade de observar, explorar e analisar como se comportam as diversas grandezas envolvidas nas equações diferenciais, focando-se na interpretação e aplicação, ao invés de olhar apenas para a solução analítica. A proposta de ensino aqui apresentada, centra-se na resolução de problemas com o uso do *software* Powersim, em que se exploram as soluções de equações diferenciais de forma gráfica e numérica, simulando e focando na interpretação.

Esta abordagem ao tema das equações diferenciais com recurso à utilização do Powersim, é realizada atualmente, no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas (Mestrado e Doutoramento) da Universidade do Vale do Taquari – Univates. A maioria dos alunos já estudou equações diferenciais na licenciatura, mas apenas com enfoque na resolução analítica e desconhece a sua interpretação. Inicialmente, os alunos mostram alguma dificuldade e até alguma resistência a esta abordagem, mostrando-se mais confortáveis com a resolução analítica, mesmo quando não a sabem interpretar.

O Powersim é um *software* que permite modelar um sistema através da elaboração de diagramas de fluxo utilizando a metáfora de Forrester (1990, citado por Santos et al., 2002). Através da criação e conexão de objetos básicos, representados por ícones na base de construção do modelo do Powersim, pode-se construir um modelo computacional fornecendo apenas relações algébricas entre os seus elementos. São facilmente obtidos gráficos e tabelas e o utilizador pode facilmente introduzir alterações nas variáveis, parâmetros e analisar as suas relações, sem conhecimento da formulação matemática do problema. Em especial, o comportamento de variáveis em função do tempo, que permite investigar o comportamento dinâmico de um sistema. A opção pelo uso do Powersim deve-se ao facto de se usar a representação para modelar a situação do problema em estudo. O seu uso facilita o entendimento das relações entre as variáveis das equações diferenciais e o comportamento das mesmas sem ter uma solução analítica.

Neste curso, procura-se estimular a participação ativa dos alunos nas aulas, iniciando com problemas que lhes permitem atribuir significado às variáveis e aos parâmetros envolvidos, por meio de um raciocínio conceptual relacionado com o problema em estudo, como na resolução do Problema 1 (figura 6). Os alunos são estimulados a criar ou explorar o modelo computacional de modo a compreender o seu comportamento. Só após esta experiência é formulada a equação diferencial que descreve o fenómeno em estudo e a sua solução analítica. O foco está na compreensão, tanto da situação problema em si, quanto do comportamento da solução.

> **Problema 1**: Numa criação de coelhos existiam, inicialmente, 100 coelhos, por ano nascem 10% de coelhos, mas morrem 12 coelhos.
> Qual é a quantidade de coelhos como função do tempo, em anos?

Figura 6. Enunciado do problema 1

Na exploração do modelo com o Powersim (figura 7), a célula retangular representa o número de coelhos, uma célula de entrada representa o número de nascimentos e uma célula de saída representa o número de mortes. Após esta construção com ícones, é possível fazer a simulação e obter uma representação gráfica e numérica da situação, sem recorrer a uma representação analítica da equação diferencial que traduz o problema.

A equação diferencial que descreve esta situação é, $\frac{dC}{dt} = \textit{entrada - saída}$, ou seja, $\frac{dC}{dt} = 0{,}1C - 12$.

Perante a interpretação do resultado obtido, o professor sugeriu que se fizessem novas simulações alterando os dados iniciais do problema. Na figura 8 apresenta-se uma nova simulação. Neste caso, foram alterados os parâmetros, considerando-se que, por ano, nasceram 10 coelhos e morreram 2% da quantidade de coelhos.

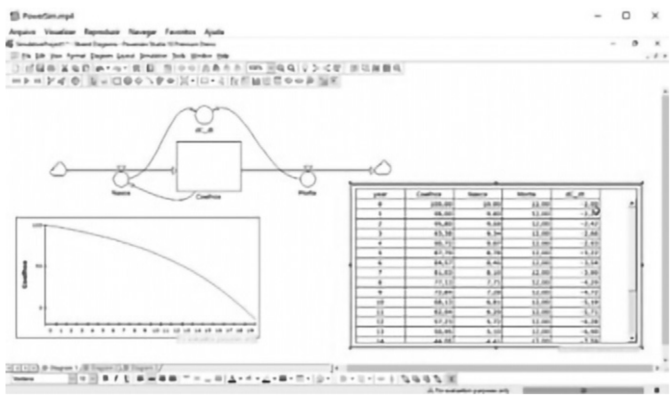


Figura 7. Simulação do problema dos coelhos com o PowerSim

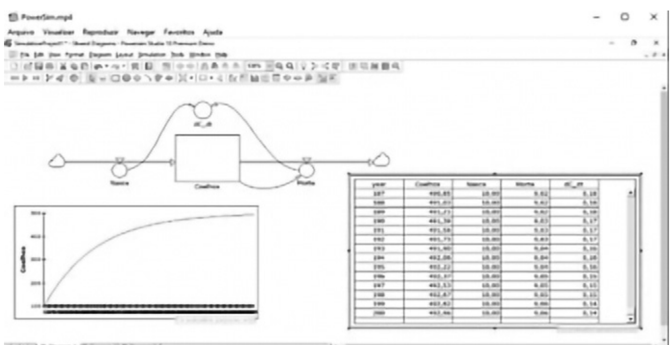


Figura 8. Nova simulação do problema dos coelhos

Na figura 9 a situação é a mesma, mas nascem 5 coelhos e morrem 10 % dos coelhos por ano. A utilização deste *software* permite aos alunos obter em simultâneo, três representações distintas da situação: numérica, gráfica e analítica. Acresce ainda o facto de o recurso à tecnologia permitir alterar os dados e obter de imediato a resposta. Ou seja, possibilita um número ilimitado de simulações e a sua análise.

Esta abordagem com o Powersim, um diagrama com ícones, a partir da interpretação do problema, permite analisar como acontece a variação, neste caso, o número de coelhos, o que interfere no aumento desse número (entrada) e o que interfere na sua diminuição (saída). A partir desta interpretação é possível obter a solução gráfica e numérica. Outra questão relevante é a facilidade com que se pode fazer variar os parâmetros e verificar como se altera a solução. Por exemplo, no problema dos coelhos, obtiveram-se três gráficos diferentes, sendo dois decrescentes (um tendendo a 50 e outro a zero) e um crescente, dependendo dos parâmetros considerados na entrada, ou seja, de nascimentos, e na saída, de mortes.

Estas possibilidades, que o recurso à tecnologia proporciona, apresentam diversas vantagens. As representações gráfica e numérica permitem aos alunos uma compreensão do problema, dificilmente alcançada através da resolução exclusivamente analítica. Se os alunos se limitassem à resolução analítica da equação diferencial, não teriam ideia do verdadeiro significado do resultado obtido, como referido anteriormente, e, consequentemente, não teriam interesse em explorar a variação de dados. Neste caso, diferentes representações mostraram-se decisivas para a compreensão e análise crítica da situação problemática.

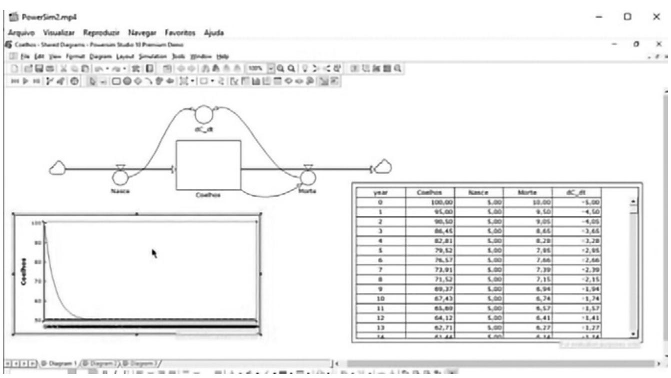


Figura 9. Uma outra simulação do problema dos coelhos

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As equações diferenciais oferecem um grande contributo para resolver diversos problemas da vida real, nas mais diversas áreas. Em muitos cursos, onde os alunos estudam equações diferenciais recorrendo apenas à manipulação analítica, sem a apresentação das diversas representações que são proporcionadas pelas tecnologias, as aprendizagens ficam limitadas. Os problemas atuais que envolvem estas equações exigem que os alunos obtenham soluções de forma rápida e eficaz, mas acima de tudo que os alunos desenvolvam uma verdadeira compreensão do conceito de equação diferencial através do estabelecimento de conexões com a derivada de uma função e de relações entre as diferentes representações gráficas, numéricas e algébricas. Vários autores (Camacho-Machín et al., 2008; Machín et al., 2009) destacam as limitações dos métodos analíticos estudados pelos alunos, na medida em que estes apenas permitem resolver um número reduzido de equações. Assim, sugerem a necessidade de se aceitar o sistema de representação gráfica por permitir obter as soluções de todas as equações, mas também por permitirem ampliar a compreensão do conceito de solução de uma equação diferencial. Habre (2000) vai mais longe ao defender que as várias abordagens, analítica gráfica e numérica, devem ser trabalhadas em conjunto de modo a contribuírem para uma sólida compreensão destas equações e para a resolução dos problemas que as envolvem.

Referências

Blomhoj, M., & Carreira, S. (2009), *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematic*s (pp. 47–60). Roskilde: Roskilde University.

Carvalho e Silva, J. (1994). *Princípios de Análise Matemática Aplicada*. Lisboa: McGraw-Hill.

Gallegos, R. (2015). A differential equations course for engineers thought modelling and technology. In G. A. Stillman et al. (eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice., International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* DOI 10.1007/978-3-319-18272-8_46

Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J., & Santos-Trigo, M. (2008). Revisiting university students'knowledge that involves basic differential equation questions. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*(3), 123–133.

Camacho-Machín, M.; Perdomo-Díaz, J., & Santos-Trigo, M. (2012). An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (Part II). *The teaching of mathematics, 15(*2), 63–84

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(4), 455–472

Machín, M. C., Díaz, J. P., & Trigo, L. M. S. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. *PNA, 3(*3), 123-133. Disponível em: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6184.

Moungabio, F. (2016). *Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France : cas des équations différentielles du premier ordre. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO].* Université Denis Diderot Paris 7. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01260645

Santos, A., Cho, Y., Araújo, I. S., Gonçalves, G. P. (2002). *Modelagem computacional utilizando STELLA*. Rio Grande: Editora da Furg

Nélia Amado,
Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Maria Madalena Dullius
Universidade do Vale do Taquari-Univates, Brasil

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática e CMUC, Universidade de Coimbra

Representações no ensino e aprendizagem da geometria – potencialidades e desafios

Lina Brunheira

Há uns anos, andava a minha filha mais nova no 5.º ano, quando me chamou para a esclarecer sobre uma dúvida num exercício. Já não me lembro da sua dificuldade ou do exercício em si, mas ficou-me a discussão que surgiu quando, a determinada altura, me disse convictamente que um segmento de reta só tem dois pontos:

– Como dois pontos???
– Sim, dois pontos. Um no princípio, outro no fim.
– E então entre esses dois pontos não há mais?
– Não, só a linha.
– Então, mas a linha é formada por muitos pontos…
– Não, não é. Só nas pontas é que temos pontos marcados!

A discussão foi mais prolongada do que este excerto que transcrevo de memória, tanto mais quanto a teimosia que a relação entre mãe e filha permite e que, habitualmente, a autoridade do professor leva a inibir. Contudo, uma ideia ficou muito clara neste episódio: os argumentos para a assunção de que um segmento de reta só tem dois pontos baseavam-se exclusivamente na representação visual que frequentemente usamos, em que destacamos os extremos do segmento para distinguir a sua representação da que é usada para reta. Sem dúvida que este episódio retrata uma dificuldade que merece reflexão, para a qual me faz sentido aludir à afirmação de Battista: em geometria "raciocinamos sobre objetos; raciocinamos com representações" (2008, p. 342). Esta distinção será óbvia para os professores, porém, para os alunos, os objetos e as representações são, frequentemente, uma e a mesma coisa. E, se é claro que é desadequado discutir a questão nestes termos com alunos mais novos, é fundamental encontrar formas de potenciar o uso das representações e lidar com os desafios que nos levantam.

Desta forma, neste artigo partilharei algumas reflexões sobre a utilização de representações no âmbito da geometria, decorrentes do trabalho que tenho desenvolvido nos últimos anos no âmbito da formação inicial de educadores e professores e com alunos de 1.º e 2.º ciclo.

A centralidade das representações visuais

Neste artigo, opto por seguir a classificação de representações porposta por Lesh et al. (1987), citada e adaptada pelo NCTM (2017), que apresenta cinco categorias de representações: visuais, verbais, contextuais, físicas e simbólicas – uma proposta com pontos de contacto com a clássica classificação de Bruner, incluindo a inexistência de independência ou alternância entre categorias.

Huinker (2015) faz uma descrição das ações características de cada representação (figura 1) às quais associo exemplos de representações do conceito de triângulo, de modo a destacar algumas ideias.

Naturalmente, a escolha da representação a usar depende da sua adequação ao propósito estabelecido. O exemplo apresentado de representação visual poderá ser útil para contrariar a ideia de que um dos lados do triângulo tem de ser horizontal, pelo que a escolha da sua posição foi intencional; o exemplo da representação física é apropriado para evidenciar que os triângulos são polígonos "rígidos", ou seja, que o comprimento dos lados determina a amplitude dos ângulos (o que deverá ser contrastado com outros polígonos). Estes dois exemplos evidenciam que não há uma independência na classificação de representações pois, também na representação física, o seu caráter visual é importante; a sua classificação pretende antes enfatizar a possibilidade de agir sobre ela – no caso, rodar ou virar.

Além da possível sobreposição de características na mesma representação, é importante considerar o potencial das conexões a estabelecer entre diferentes tipos de representações. Como refere Huinker (2015), vários autores têm afirmado a relevância de abordar as ideias matemáticas usando várias formas de representação, saber quando e porquê é adequado usar uma em vez de outra, transitar entre representações e usá-las de forma flexível na resolução de problemas, destacando-a como uma capacidade a desenvolver nos alunos. Do ponto de vista curricular, as novas Aprendizagens Curriculares (Canavarro et al., 2021) reconhecem esta relevância ao destacar a capacidade de usar representações múltiplas e afirmar que a compreensão plena das ideias matemáticas "depende da familiaridade e fluência que os alunos têm com as várias formas de representação" (p. 3).

Voltando a um olhar focado na geometria, a classificação de representações em matemática nas cinco categorias anteriores, necessariamente geral, parece ser insuficiente para uma análise mais completa e atual sobre as representações visuais, se tivermos em conta as novas formas de representação associadas às tecnologias. Efetivamente, a distinção entre o caráter estático/dinâmico das representações que a utilização de ambientes de geometria dinâmica (AGD) traz à discussão merece também consideração no âmbito deste tema matemático.

Desta forma, nas secções que se seguem, apresentarei exemplos de episódios de sala de aula que reportam a utilização de

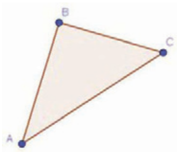
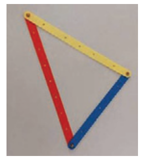
Representações visuais	Representações verbais	Representações contextuais	Representações físicas	Representações simbólicas
Ilustra, mostra ou trabalha com ideias matemáticas usando diagramas, imagens, linhas numéricas, gráficos ou outro tipo de desenhos.	Usa linguagem (palavras e frases) para interpretar, discutir, definir ou descrever ideias matemáticas, estabelecendo pontes entre linguagem matemática formal e informal.	Situa ideias matemáticas no quotidiano, mundo real ou situações imaginárias, usando uma variedade de medidas discretas ou contínuas (e.g., pessoas, metros, jardas).	Usa objetos concretos para mostrar, estudar, agir sobre ou manipular ideias matemáticas (e.g., cubos, contas, ladrilhos ou tiras de papel).	Regista ou trabalha com ideias matemáticas usando numerais, variáveis, tabelas[1] e outros símbolos.
	Polígono com três lados			[ABC]

Figura 1

diferentes formas de representação e a sua articulação, mantendo o destaque nas representações visuais, dinâmicas ou estáticas, e que remetem para o seu potencial na compreensão de conceitos e relações, na organização e comunicação do pensamento e na resolução de problemas.

CONSTRUINDO O CONCEITO DE TRIÂNGULO

O episódio[2] que apresento de seguida diz respeito a uma aula de 1.º ano. Os alunos encontram-se reunidos em frente a um ecrã onde está projetada a imagem de um AGD que a professora manipula a partir do seu computador. No programa, gera várias figuras que vai discutindo com os alunos no sentido de acordarem sobre os casos que são ou não são triângulos e quais as suas características. O arrastamento dos vértices leva-os à análise do último polígono da figura 2:

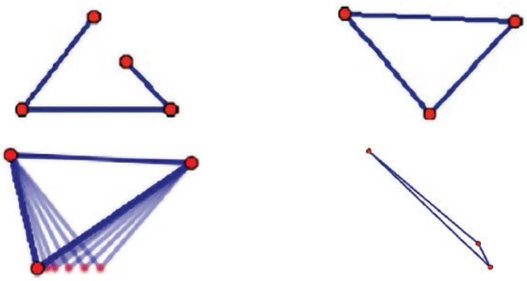


Figura 2. Retirado de Sinclair & Moss (2012)

P: Um segundo. Fechem os olhos. Prometam não olhar. Dasia, feche seus olhos. OK. Esperem… OK. Abram os olhos. Isto é um triângulo?

Alguns alunos dizem "Não" e mais alunos dizem "Sim".

P: Porquê Dasia?
Dasia: Porque ainda tem três cantos.
Morgan: Não.
P: Porque não?
Morgan: Porque isso está na diagonal.
Leah: Está de lado e mais esmagado.
P: Mais esmagado, mas ainda é um triângulo?
Michael: Sim.
Outros alunos: Sim.
Abigail: É um triângulo e não é um triângulo.
P: Temos um problema difícil de resolver que é descobrir se é essa coisa engraçada é um triângulo ou não.
Leah: É.
Robert: É um triângulo
John: Nós dissemos que era um triângulo.

O episódio revela como alguns alunos resistem à ideia de que o triângulo apresentado, estando "de lado e mais esmagado", ainda deveria ser considerado como tal. Note-se que, anteriormente, dois alunos já tinham dito que o segundo triângulo apresentado na figura 2 estava "ao contrário", apesar de terem acordado na sugestão de uma aluna que disse "Faz três lados e liga-os" como a instrução necessária à construção de um triângulo. Este é um exemplo típico do conhecido *efeito protótipo*, amplamente tratado na literatura (por exemplo, Fujita, 2012). Este efeito consiste na tendência para restringir os conceitos tomando apenas como exemplos alguns casos especiais e, assim, acrescentar atributos desnecessários ou falsos (como pensar que um triângulo tem de ter um lado na horizontal e o terceiro vértice no semiplano superior).

Pode pensar-se que a dificuldade reportada neste episódio advém da imaturidade dos alunos ou do seu desconhecimento sobre a definição de triângulo. É uma ideia errada, como tem vindo a comprovar a investigação. Vejamos um exemplo em torno do conceito de paralelogramo. No ano letivo de 2018/19, propus um diagnóstico[3] simples no primeiro dia de aulas da Unidade Curricular de Geometria da Licenciatura em Educação Básica (LEB). Essencialmente, os estudantes deveriam selecionar da imagem (figura 3) os quadriláteros que correspondessem a paralelogramos e, posteriormente, apresentar uma definição desse conceito.

Vejamos os resultados numa das turmas que contava com 24 estudantes. O primeiro aspeto a salientar é que os quadriláteros mais selecionados foram os paralelogramos obliquângulos e, destes, o menos reconhecido é o 14, em que nenhum dos lados se encontra na posição horizontal ou vertical, tornando mais difícil o seu reconhecimento. Consequentemente, os

[1] Na discussão que é feita nos *Princípios para Acção* (NCTM, 2017) as tabelas são enquadradas como um tipo de representação visual.

[2] Retirado de Sinclair & Moss (2012)

[3] Adaptado de Fujita (2012.

casos particulares de paralelogramos foram menos registados – aproximadamente ¼ dos estudantes regista os retângulos e losangos como paralelogramos. Outro aspeto a assinalar é que mais de metade da turma selecionou quadriláteros errados, como o 10 e o 12 que são trapézios não paralelogramos, o que pode derivar de uma confusão entre conceitos. Contudo, se é expectável encontrar erros deste tipo, não deixa de ser curioso registar que 11 estudantes – quase metade da turma – tenha apresentado definições corretas para paralelogramo, havendo apenas em 3 casos uma consistência entre a definição apresentada e os quadriláteros escolhidos.

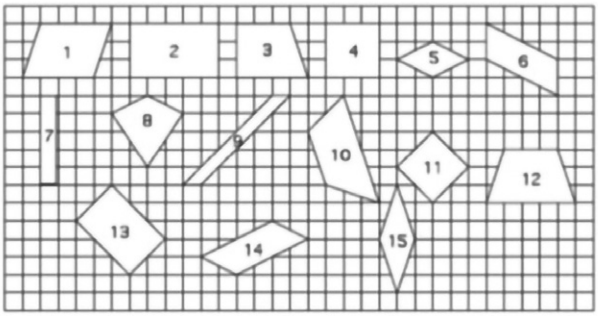


Figura 3

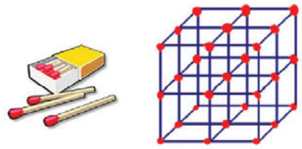
Depois de terminado o tratamento do tópico sobre quadriláteros, as turmas foram confrontadas com estes resultados, o que constituiu um ponto de partida para uma discussão matemática, mas também didática, enfatizando uma ideia central: frequentemente, é o exemplo protótipo que é usado como base do julgamento que os alunos fazem das figuras e não a sua definição ou o conhecimento das suas propriedades. Este conhecimento é fundamental para que, na sua ação, o professor tenha em conta o tipo e variedade de representações que promove no trabalho com os seus alunos.

Voltando ao episódio com a turma de 1.º ano, mais do que os erros, fica evidente a necessidade de articular as representações visuais do conceito de triângulo com as representações verbais que as crianças propõem, necessariamente numa linguagem ainda muito informal, mas que oferecem um olhar sobre as suas conceções de triângulo. Para tal, foi fundamental o recurso a representações dinâmicas em que, mantendo os pressupostos iniciais (três lados "ligados"), se foi refinando a definição de triângulo[4] conjugando as características do polígono com um leque alargado de representações visuais que promove uma compreensão aprofundada do conceito.

ORGANIZANDO E COMUNICANDO O PENSAMENTO NUM PROBLEMA 3D

Analisemos agora um excerto de uma resolução do problema "A malha de fósforos" (figura 4), extraído do Campeonato de Matemática Sub12[5] e que foi proposto a estudantes da LEB na Unidade Curricular de Geometria.

A malha de fósforos



O Fábio começou a construir uma malha de pequenos cubos, feita com fósforos. Cada aresta de um pequeno cubo é formada por um único fósforo, como se ilustra a figura. Até agora, apenas criou uma malha composta por 8 cubos pequenos, mas o seu objetivo é construir uma malha cúbica de 1000 cubos pequenos. De quantos fósforos irá precisar o Fábio para essa construção?

Figura 4

O grupo começou por simplificar o problema, fazendo a contagem para um cubo de aresta 2 (o grupo tratou ainda os cubos de aresta 3 e 4), para depois generalizar e aplicar a estratégia ao cubo de aresta 10 (figura 5).

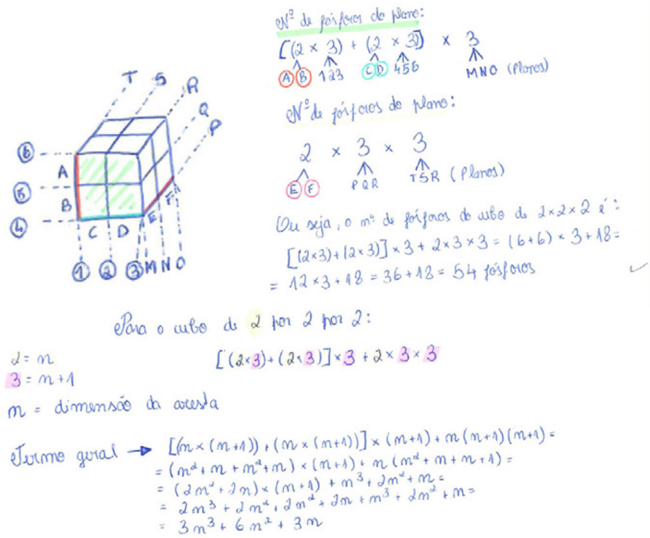


Figura 5

A resolução do grupo recorre essencialmente a representações visuais e simbólicas, com utilização de letras e cores que facilitam a organização do pensamento, quer no que respeita à forma como "vê" o objeto tridimensional, quer na sua relação com os valores da expressão numérica. Adiante na resolução, a cor é novamente utilizada para facilitar a correspondência entre o cubo analisado e o caso geral, de modo a formular uma expressão algébrica que resolve o problema para qualquer cubo.

Deste modo, a resolução constitui um exemplo de uma articulação proveitosa entre diferentes tipos de representações que, por um lado, se verifica fundamental para a resolução do problema e, por outro, para a comunicação do raciocínio aos outros. Efetivamente, é através dos registos cuidados que acedemos a um modelo mental assente na identificação de subconjuntos dos objetos: os fósforos que estão no plano frontal e seus paralelos e os restantes que lhe são perpendiculares, como procuro traduzir na figura 6.

---

[4] Sugere-se a leitura do artigo original para aceder à discussão completa.

[5] https://matematica5estrelas.ualg.pt/10-11/subs/sub12.html

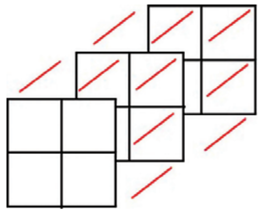


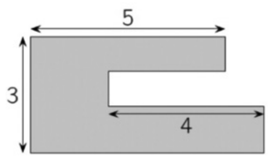
Figura 6

A resolução apresentada é apenas um exemplo de uma diversidade de estratégias que emergiram nas resoluções de estudantes da LEB, mas que também identificamos nas resoluções do Campeonato de Matemática Sub12 que foram tornadas públicas. Trata-se de um problema em que a tridimensionalidade impõe desafios acrescidos na representação dos objetos e na forma de os organizar. Como refere o NCTM, "as representações incorporam características importantes das estruturas mentais e ações matemáticas" (2017, p. 24), o que parece evidente na resolução apresentada em que nos é permitido compreender a forma com o grupo decompõe a construção para contar organizadamente os fósforos.

SIMPLIFICANDO A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

A última situação que apresento surge de um problema de medida adaptado do Canguru Matemático[6], igualmente proposto a estudantes da LEB em Geometria (figura 7). Para a discussão em causa, vamos cingir-nos à primeira questão do enunciado.

À volta do jardim



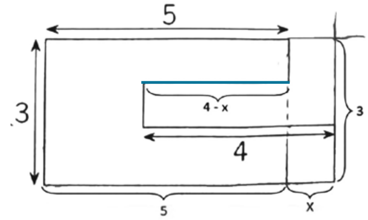
O jardim do Miguel tem o formato da figura ao lado. Cada lado do jardim é paralelo ou perpendicular a cada um dos restantes lados. As dimensões, em metros, de alguns dos lados estão representadas na figura. Qual é o perímetro, em metros, do jardim do Miguel?

Como poderás saber o perímetro de um jardim qualquer com esta forma, conhecendo apenas as medidas que, neste caso, correspondem a 3, 4 e 5 metros?

Figura 7

As duas resoluções seguintes usam os mesmos tipos de representações que o problema anterior – visuais e simbólicas – mas servem para evidenciar outros aspetos. Comecemos pela resolução da figura 8 que corresponde à estratégia mais utilizada, sobretudo por aqueles que têm uma maior fluência na utilização da álgebra.

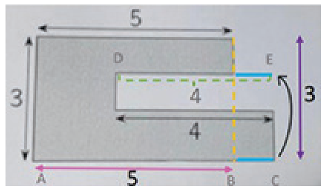
Neste excerto, o grupo decompõe um dos lados de medida desconhecida em dois segmentos, um com medida 5 (que se deduz pelo paralelismo com outro lado) e outro com medida desconhecida (designado por x); identifica que esta medida adicionada à do segmento colorido perfaz 4, logo designa este por 4-x. Depois deste passo, o problema fica facilmente resolvido através da simplificação da expressão algébrica para o perímetro do jardim.



Perímetro (polígono) = 3 + 3 + 5 + 5 + 4 + X + (4 - X) = 3 + 3 + 5 + 5 + 4 + X + 4 - X = 3 + 3 + 5 + 5 + 4 + 4 = 24 metros

Figura 8

A resolução seguinte (figura 9), da qual apresento apenas um excerto elucidativo sobre a estratégia, foi realizada por um grupo que começou por achar o problema muito difícil e que nunca ponderou a utilização de incógnitas por não se sentir à vontade na área da álgebra. Contudo, a sua estratégia foi muito apreciada pela turma no momento de discussão coletiva, sobretudo pela sua simplicidade e elegância.



P = 3 + 3 + 5 + 5 + 4 + 4 = 24

Figura 9

Tal como a resolução anterior, o grupo decompõe o lado AC nos mesmos segmentos. No entanto, faz uma translação do segmento cuja medida é desconhecida ([BC]) de modo a formar o segmento DE que se sabe ter o mesmo comprimento que o segmento marcado com a medida 4. Depois desta ação todos os segmentos passam a ter medidas conhecidas, apesar de deixarem de delimitar a área do jardim. Este é um aspeto interessante da resolução – apenas um conhecimento conceptual do perímetro enquanto comprimento da linha fronteira, em vez de um conhecimento processual que se foca na soma das medidas dos lados, admite esta estratégia. Por esse motivo, à valorização que a turma fez sobre a simplicidade e elegância desta resolução, acrescento a compreensão que favorece. Mais ainda, esta resolução ajuda a compreender a razão pela qual, na primeira resolução, os termos em x se anulam na expressão algébrica, tornando esta estratégia menos "opaca".

Como é evidente, esta resolução apoia-se fundamentalmente nas representações visuais onde, mais uma vez, estratégias de codificação como a cor foram fundamentais. O caso deste grupo, que frequentemente manifestava mais insegurança na resolução de problemas, remete-me para a afirmação de Goldenberg et al. (1998) que sugerem que o raciocínio visual constitui, para

6 Prova Cadete 2020 (alunos de 9.º ano)

muitos alunos, um ponto de acesso, uma primeira oportunidade de participar na atividade matemática.

DESAFIOS

Com as situações apresentadas, procurei sublinhar a importância das representações visuais no trabalho a desenvolver em geometria, mantendo a relevância da articulação e complementaridade das outras formas de representação. Contudo, as representações visuais oferecem também desafios e dificuldades, como o episódio com que iniciei o artigo mostrou.

Alguns destes desafios advêm dos diferentes papéis que representações, como desenhos ou diagramas, assumem em geometria. Battista (2007) identifica dois objetivos principais: (a) representar uma classe de figuras (por exemplo, o conjunto dos retângulos), e (b) representar relações geométricas (por exemplo, que as bissetrizes dos ângulos de um triângulo se intersetam no incentro do triângulo). Isto significa que um retângulo pode estar a representar a classe de todos os retângulos (por exemplo, num enunciado com a definição do conceito) ou um único objeto sobre o qual interessa conhecer as características particulares (por exemplo, num problema sobre perímetro ou área), o que muitas vezes depende da maneira como cada indivíduo interpreta a situação.

O primeiro objetivo apontado por Battista para a utilização de desenhos ou diagramas – representar a classe de figuras – levanta o problema do efeito protótipo, já referido a propósito do episódio sobre o conceito de triângulo, e que mostra a necessidade de incluirmos uma diversidade de representações daquela figura no trabalho com os alunos. O segundo objetivo apontado por Battista para a utilização de desenhos ou diagramas – representar relações geométricas – merece igualmente alguma atenção. Em tarefas como a do perímetro do jardim, é frequente receber reações de alunos que perguntam se podem medir os lados desconhecidos; noutras tarefas também é comum assumirem informações a partir da perceção que têm do desenho ou diagrama, mas que não são dados – por exemplo, assumir a congruência ou paralelismo entre segmentos. Estas reações são naturais dada a diversidade de contextos em que os desenhos e diagramas surgem ao longo da vida dos alunos. Por exemplo, no contexto do diagnóstico sobre o conceito de paralelogramo referido anteriormente, é fundamental incluir a malha quadriculada no fundo da figura 3 para que os estudantes possam decidir sobre a congruência e paralelismo dos lados; já no âmbito do jardim de infância, se pedirmos para as crianças escolherem os quadrados daquele conjunto de quadriláteros, tal cuidado não fará sentido, pois essa escolha terá de ter por base a perceção da congruência de lados e ângulos. Significa, portanto, que à medida que progredimos no nível de escolaridade, exigimos que os alunos raciocinem com base em informação que seja estabelecida ou possa ser validada, e não sobre a sua perceção. Contudo, esta é uma mudança subtil e poucas vezes discutida.

Estes desafios mostram a necessidade de darmos uma atenção explícita às representações no trabalho com os nossos alunos. Como referem Nistal et al. (2009), a investigação mostra que as características da tarefa, do contexto e do próprio aluno influenciam significativamente a seleção flexível das representações. É preciso fazer propostas de trabalho que promovam a diversidade de representações e suas conexões e discuti-las com os alunos, percebendo como as encaram e como lidam com elas. É importante formular questões de partida como "Neste enunciado, quais são os dados que temos? O que nos transmite o desenho/diagrama/imagem? Como podemos usá-lo para apoiar a resolução?". Durante a resolução da tarefa, faz sentido sugerir "Como é que vamos registar para organizarmos o nosso pensamento? E para o explicarmos aos outros?". Analisar resoluções de alunos num momento coletivo, questionando "Quais as estratégias de registo e organização do raciocínio que foram usados? Como é que elas nos ajudam a compreender e a resolver a situação? Quais são as mais proveitosas?..." poderá ajudar os alunos a aumentar o leque de representações que conhecem, fazer uma seleção criteriosa atendendo à situação matemática e, progressivamente, articular diferentes formas de representação.

Referências

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). Information Age.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. 2, pp. 131–56). Information Age.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico.* ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60–72.

Goldenberg, E. Paul, Cuoco, Albert, & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3–44). Erlbaum.

Huinker, D. (2015). Representational competence: A renewed focus for classroom practice in mathematics. *Wisconsin Teacher of Mathematics, 67*(2), 4–8.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. APM.

Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM, 41*(5), 627–636.

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research, 51*, 28–44.

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

Preparar e realizar aulas usando diversas representações matemáticas: um processo colaborativo

Isabel Velez, João Pedro da Ponte, Maria de Lurdes Serrazina

A capacidade dos alunos usarem diferentes representações em Matemática tem vindo a valorizar-se desde o início do século XXI (NCTM, 2007) e surge nas Novas Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021) como um dos objetivos a atingir pelos alunos. Acevedo et al. (2009) referem que o recurso a diferentes representações pode desenvolver nos alunos a capacidade para escolher a representação mais adequada a cada situação. No entanto, pode também gerar dificuldades, se os alunos não compreenderem as representações que utilizam. Assim, os autores referem que ao utilizar diferentes representações, os alunos devem (i) ter conhecimento para interagir com as várias representações; (ii) ser capazes de coordenar transformações entre representações; e (iii) conseguir escolher a representação mais adequada a cada situação.

Stylianou (2010) refere que a utilização de diferentes representações numa tarefa pode ter várias funções: (i) interpretar, sistematizar e compreender a informação no enunciado; (ii) registar e visualizar todas as informações dadas; (iii) explorar e definir uma estratégia para encontrar a resposta correta; e (iv) monitorizar e avaliar o processo da resolução. A autora considera a produção de representações como uma forma de comunicar sobre os conceitos representados e atribui-lhe um papel importante durante a discussão na resolução de problemas. Indica ainda que esta discussão facilita a comunicação e a compreensão entre todos, ilustrando mais facilmente o ponto de vista de cada um.

Pelo seu lado, Valério (2005) refere que durante a resolução de um problema, os alunos recorrem inicialmente a representações visuais (a que chama icónicas) para ilustrar e visualizar o problema. Estas representações são utilizadas como elementos de contagem e como ligação do problema à realidade. Refere ainda que, tendencialmente, os alunos reutilizam representações próprias em situações problemáticas semelhantes, adaptando-as ao problema em questão. No entanto, fazem-no com menor frequência relativamente a representações sugeridas por terceiros.

O papel do professor no processo de aprendizagem da escolha e utilização de representações adequadas por parte dos alunos tem sido igualmente objeto de estudo. Por exemplo, Thomas, Mulligan e Goldin (2002) referem que o trabalho com as representações visuais dos alunos pode ser inicialmente muito difícil. Assim, recomendam que os professores: (i) proponham problemas que promovam o pensamento visual dos alunos, questionando-os para que utilizem diferentes representações; (ii) utilizem a tecnologia como suporte visual às competências de representação e à construção de conexões e que (iii) alinhem as suas estratégias de avaliação com as suas estratégias de ensino. Os autores sugerem ainda que, para promover o estabelecimento de conexões entre as diferentes representações, os professores escolham tarefas que possibilitem o recurso a diferentes representações e discutam com os alunos sobre os processos de transformação de uma representação noutra e sobre a escolha de representação adequadas.

A forma como este processo decorre na sala de aula influencia também a aprendizagem dos alunos. Quaresma (2010) refere que um ritmo de trabalho demasiado acelerado pode orientar os alunos para a mecanização e memorização na resolução de determinados exercícios e tarefas, sem compreenderem os conceitos e as representações matemáticas envolvidos. Nesse sentido, Bishop e Goffree (1986) sugerem que numa fase inicial os professores procurem abordar as diferentes representações num formato mais familiar e significativo para os alunos, com o intuito de que estes criem e usem representações próprias. Na sua perspetiva, o professor deve recorrer não só a uma "linguagem mais comum", mas também a outro tipo de representações que os alunos já dominem, permitindo-lhes o estabelecimento de conexões entre elas, ao seu próprio ritmo.

Durante a resolução de problemas, a discussão coletiva surge como um dos momentos privilegiados para a discussão e análise das representações utilizadas pelos alunos. Stylianou (2010) indica que, ao apresentarem as suas próprias representações, os alunos podem enriquecer as discussões. Refere também o papel do professor no que diz respeito ao tipo de orientação e questionamento dos alunos, pois com base nas representações dos alunos, o professor pode procurar compreender melhor o seu raciocínio, dando-lhes o apoio adequado (Stylianou, 2011).

Neste artigo abordamos o trabalho desenvolvido por um grupo de quatro professores do 3.º ano de escolaridade (Sandra, Sónia, Carla e Ricardo), focando-nos na planificação e realização de uma tarefa na sala de aula que utiliza diferentes representações e na posterior reflexão. Considerámos as representações utilizadas de acordo com os cinco tipos de representações (verbal, visual, física, contextual e simbólica) indicados no documento das Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021).

A tarefa escolhida foi a seguinte: "Os alunos do 3.º ano vão numa visita de estudo e alugaram 4 autocarros, que vão cheios. Vão 24 alunos em cada autocarro e por cada 10 alunos tem de ir um adulto. Quantos alunos e quantos adultos vão à visita de estudo?". Neste trabalho, existiram três fases distintas: (a) Sessão Pré-Aula, em que os professores analisaram e discutiram a tarefa que iriam propor aos alunos; (b) Realização da tarefa, em que os professores exploraram a tarefa nas respetivas salas de aula; (c) Sessão Pós-Aula, onde os professores refletiram sobre as representações produzidas na sala de aula.

SESSÃO PRÉ-AULA

Nesta sessão, os professores procuraram antecipar as representações, as estratégias e as dificuldades dos alunos. O grupo considerou como expectável o recurso preferencial a representações visuais (esquemas) por parte dos alunos, ao invés da representação simbólica do algoritmo da divisão com dois algarismos, pois estes ainda não conheciam esta representação. Os professores discutiram ainda as potenciais dificuldades dos alunos, relacionadas com a interpretação da tarefa e explicitação de estratégias:

Sandra: Eles vão dizer que só vão dois adultos por cada 24… Em cada autocarro!
Ricardo: Não vão 2…
Sandra: Sim, mas o que eles vão dizer é que são 2!
Sónia: Essa interpretação do 2,4 é que tens 2 adultos para 20 crianças e depois outro adulto para essas 4 que sobram… Ou podes fazer à totalidade das crianças. Porque se forem três adultos por autocarro vai dar um número… Se for um adulto por cada 10 crianças vai-te dar outro número!

Os professores aperceberam-se que existem duas formas possíveis de interpretar o enunciado da tarefa e, além disso, poderiam surgir diferentes estratégias e representações. Tendo em conta as representações contextuais dos alunos (as visitas de estudo na sua escola), na perspetiva dos professores, a maioria calcularia o número de adultos tendo por referência cada autocarro (24:10). Perspetivaram ainda que alguns alunos calculariam o número de adultos a partir do número total de crianças (96:10).

REALIZAÇÃO DA TAREFA

Introdução da tarefa

Nas salas de aula, os professores procuraram ajudar os alunos na interpretação das representações verbais do enunciado da tarefa. Para isso, questionaram-nos, destacando a informação relevante para a resolução da tarefa, tal como aconteceu com a turma de Carla:

Carla: Quantos autocarros é que temos?
Luís: 4!
Carla: Quantos alunos cabem no autocarro? (silêncio) 50? (silêncio) O que é que diz o enunciado?
Luís: 24!
Carla: Então vão 24 alunos nos 4 autocarros?
Laura: Não…
Carla: Então? (silêncio) Quantos alunos é que vão por autocarro?
Laura: 10…
Carla: Alunos? Quantos alunos é que vão em cada autocarro?
Laura: 24!
Carla: Ah! E quantos autocarros temos?
Laura: 4!
Carla: E quais são as perguntas que nós temos de responder?
Laura: Quantos alunos vão… Em cada autocarro…
Carla: Quantos alunos vão em cada autocarro? Não… Quantos alunos vão na visita! Certo? E depois… Quantos adultos vão a acompanhar? Qual é o dado que nos dão dos adultos relativamente aos alunos?
João: Cada 10 vai levar 1 adulto!

Trabalho autónomo dos alunos

Depois da *Introdução da tarefa*, em todas as salas de aula, os alunos trabalharam autonomamente e individualmente, sem que os professores os orientassem na escolha de representações. Assim, os professores procuraram promover a escolha livre das representações mais adequadas para a resolução da tarefa. Enquanto cada turma resolvia a tarefa, os respetivos professores observavam e questionavam os alunos relativamente às estratégias e às representações utilizadas.

Inicialmente, na turma de Ricardo, alguns alunos não conseguiram resolver a tarefa e sentiam-se frustrados. Com o intuito de os ajudar a interpretar o enunciado, o professor desenhou os autocarros no quadro (representação visual), o que parece ter ajudado (figura 1).

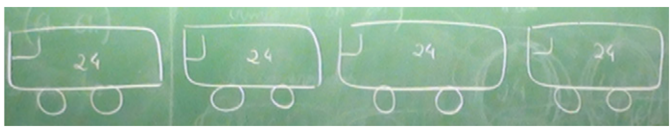


Figura 1. Representação visual utilizada por Ricardo

À medida que os alunos resolviam a tarefa, surgiam dificuldades na interpretação das representações escolhidas. Assim, os professores questionavam-nos para os ajudar a ultrapassar as dificuldades encontradas. A certa altura, Sandra questionou um dos alunos:

André: Já percebi! Sobram 4 alunos por cada autocarro!
Sandra: Um adulto por cada 10 alunos… Mas em cada autocarro vão 24 alunos…
André: Então vão 2 [adultos]!
Sandra: Vão 2 adultos em cada autocarro? Porquê?
André: Porque faltam os 4! Tinha que ser 12 – 12 [cada adulto leva 12]! Porque 12 mais 12 é 24!

Sandra: Então quantos adultos vão?

André: 2!

Sandra: E os outros 4 meninos vão com quem? Estavas a dizer-me que para irem 2 [adultos] eram 12 alunos [por adulto]… Mas um adulto só leva 10… Não leva 12… (silêncio) Então? (silêncio) Imagina que vou eu e a professora Carla… Quantos alunos é que nós conseguimos levar?

André: 20…

Sandra: Mas cada autocarro leva 24 alunos… E os outros 4? Como é que nós resolvemos a situação? (silêncio) Para podermos ir todos à visita de estudo?

André: Um autocarro leva 28?

Sandra: Mas aqui não diz que um autocarro leva 28…

O aluno resolveu a tarefa calculando o número de adultos por autocarro (24:10). Apesar de compreender que eram necessários dois adultos para vinte alunos, André ficou confuso perante os quatro alunos restantes. Sandra procurou conduzi-lo ao estabelecimento de conexões com as representações contextuais das vivências escolares (comparando o enunciado com a realidade escolar – numa visita de estudo, nenhum aluno ficava na escola sem acompanhamento de um professor). Face à resposta incorreta de André, Sandra optou por remetê-lo novamente para o enunciado da tarefa e deixá-lo a refletir na sua resposta.

Durante o *Trabalho autónomo* dos alunos, surgiram diferentes representações em todas as turmas. Metade dos alunos optou pela estratégia 96:10 para determinar o número de adultos na visita de estudo. Muitos alunos recorreram a representações visuais enquanto outros procuraram utilizar representações simbólicas. Sónia discute a representação simbólica utilizada por Joaquim (figura 2 e 3):

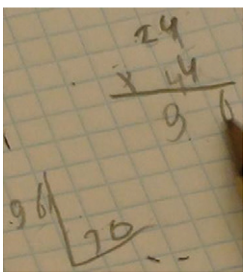


Figura 2.

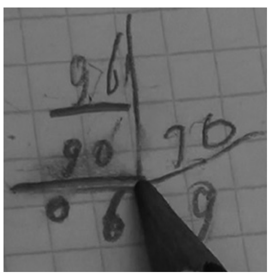


Figura 3.

Representações simbólicas de Joaquim

Sónia: Porque estás a fazer assim?

Joaquim: Porque… Vão 24 alunos em cada autocarro… Vão 96 [no total]… É o total de alunos que vão nos autocarros e tenho que saber… Quantos adultos vão em cada autocarro e não há nenhum número vezes 10 que dê 96… Apenas o 9 que dá 90… Então… Coloquei o 9 aqui… Como dá 9 vezes… Dá 90 que coloquei aqui! Depois, fiz a conta de menos e ainda sobram 6 crianças… Tem que ir mais 1 adulto!

Sandra: Mas vão quantos adultos?

Joaquim: 9!

Sandra: Mas como, se sobram?

Joaquim: Mas como sobram [6] tem que ir mais 1 adulto!

Sandra: Então, mas quantos são no total?

Joaquim: 10!

Discussão coletiva

Durante o *Trabalho autónomo* dos alunos, os professores escolheram as representações que lhes pareceram mais interessantes para a *Discussão coletiva*. Assim, no início deste momento, convidaram alguns alunos para apresentar e explicar aos colegas as estratégias e as representações utilizadas.

Por exemplo, Ricardo pediu a dois alunos que apresentassem as representações visuais (esquemas) que utilizaram. Sendo Jonas muito tímido, o professor replicou no quadro a representação visual utilizada pelo aluno (figura 4):

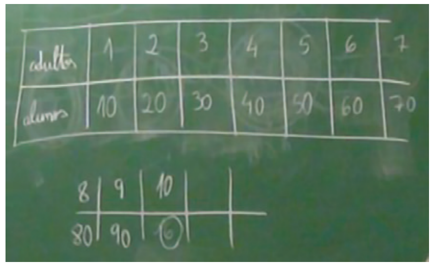


Figura 4. Representação visual de Jonas, replicada pelo professor

Jonas: São 10 alunos e vai um adulto. Então fiz os 90 [alunos] que vai até aos 9 [adultos].

Ricardo: O que ele fez foi isto… Não foi, Jonas (aluno acena afirmativamente)? Puseste aqui um adulto… São quantos alunos?

Jonas: Dez… (o professor escreve "10" por baixo do número "1")

Ricardo: Foi isso que fizeste aí no teu caderno… Como é que eu continuo esta tabela? Por cada 10 alunos, vem um adulto, certo?

Vanessa: Então… 20 alunos… Vão 2 [adultos]!

Ricardo: Três adultos…

Alunos: Trinta! (continuam até chegar a 9 adultos)

…

Ricardo: 96! Então eu só tenho mais 6 alunos! Posso levar mais 1 adulto… Ou não?

Alunos: Não!

Jonas: Tem de ser 10!

Ricardo: Têm de ser 10 adultos?

Alunos: Não! Sim!

Ricardo: Este (aponta para o "1") leva 10 [alunos]… 2 adultos levam 20, 3 levam 30, 4 levam 40, 9 adultos, levam 90 crianças! E as outras crianças vão com quem? (silêncio) Tem de ir mais um adulto com eles, não é? Apesar de não termos os 100 alunos... precisamos à mesma de 10 adultos… Porque estas 6 crianças não vão sozinhas, pois não?

A maioria da turma considerou apenas a contabilização de nove adultos. Outros alunos, como Jonas, compreenderam que eram necessários dez, mas nenhum conseguiu explicar a sua interpretação do resultado. Apesar das inúmeras tentativas, perante o silêncio da turma, Ricardo acabou por explicar a interpretação de Jonas. Em seguida, solicitou a Mauro que apresentasse a sua solução (figura 5):

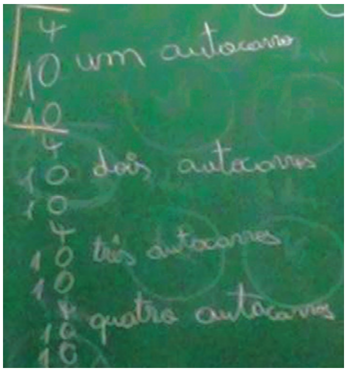


Figura 5. Representação visual de Mauro

Ricardo: Nós poderíamos ter resolvido isto de uma maneira diferente… Que daria outro resultado… Mauro, explica lá…

Mauro: Se são 24 alunos em cada autocarro… Se cada 10 alunos vão com um adulto… Dez vão com um adulto, mais 10 vão com outro adulto e os 4 [que sobram] vão com outro adulto.

Ricardo: O Mauro está a fazer por autocarro! Nós fizemos o total e dividimos por adultos, não foi? Olha aqui… Isto (desenha uma chaveta no esquema utilizado por Mauro) é um autocarro! Leva 10 alunos, mais 10 alunos, mais 4 alunos! Leva 24! Não é?

Alunos: Sim!

Ricardo: Então, explica aos teus colegas… quantos adultos é que vão?

Mauro: 12!

Ricardo: 12 adultos! Pela maneira que nós tínhamos aqui feito primeiro… quantos adultos é que iam?

Alunos: 10!

REFLEXÃO PÓS-AULA

Os professores discutiram a adequação das representações e as dificuldades que surgiram nas suas turmas e mostraram-se surpreendidos pelo facto de alguns alunos terem procurado utilizar representações simbólicas. As representações visuais, baseadas em desenhos detalhados que ilustram o enunciado da tarefa (figura 6), foram consideradas pouco adequadas, sendo apenas complementares às representações simbólicas.

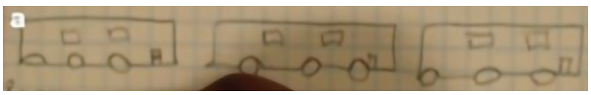


Figura 6. Representação visual dos alunos analisadas na sessão de reflexão pós-aula

Os professores referiram ainda que o recurso a representações visuais deste tipo pode ser contraproducente, dado que os alunos podem perder muito tempo, e que é importante conduzi-los à utilização de representações mais adequadas à resolução da tarefa.

Os professores analisaram também a forma como Ricardo explorou as diferentes representações na sua sala de aula (figura 7):

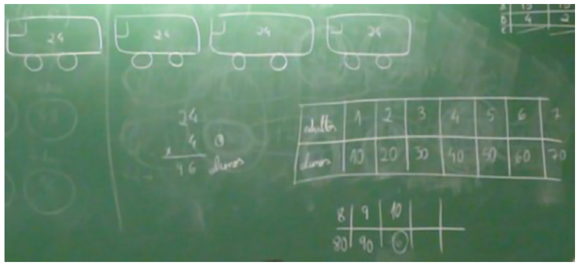


Figura 7. Representações utilizadas por Ricardo, analisadas na sessão de reflexão pós-aula

Sónia: As representações do Ricardo… Estão aqui a icónica [visual], que é a de cima… A dos autocarros! Depois tens a formal [simbólica] que é a operação, mas falta-te aqui depois 96 alunos a dividir pelos autocarros! Tu vais fazer… Na tabela ao lado! 3 estratégias apresentadas! 3 representações [diferentes] num só problema! Começaste por esta, certo (aponta para a representação visual dos autocarros)? Para introduzir os autocarros e para ser mais percetível para os alunos.

Os professores consideraram o facto de Ricardo ter utilizado vários tipos de representação durante a exploração da tarefa, em *Trabalho autónomo*, como bastante positivo. Mas o grupo de professores considerou que teria sido importante o recurso a outras representações simbólicas.

Além da análise das representações utilizadas, os professores refletiram ainda sobre as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução da tarefa:

Sónia: [Uma das dificuldades] Era o facto de se poder interpretar de duas maneiras.

Carla: [E] É o [número de crianças] que sobra, não é? Porque nunca se chega a um número certo! O que é que se faz? Leva-se mais um [adulto]?

A CONCLUIR

Na realização da tarefa, as representações que se revelaram mais produtivas são as que combinam elementos visuais e simbólicos. As representações contextuais parecem ter sido também muito úteis. As representações visuais mais próximas da situação foram úteis para a compreensão, mas não para a solução do problema.

As sessões de planificação e a reflexão conjunta possibilitaram aos professores a oportunidade de ponderar possíveis representações e dificuldades dos alunos. A análise das possíveis resoluções das tarefas revela-se importante na antecipação de constrangimentos e definição de estratégias. Esta análise torna-se ainda mais útil quando é feita colaborativamente, permitindo aos professores discutir diferentes perspetivas, representações e formas de explorar uma tarefa. Apesar da planificação conjunta da tarefa, as estratégias e representações utilizadas em cada turma e os resultados obtidos pelos alunos podem diferir. Novamente, o trabalho colaborativo permite refletir sobre as diferenças identificadas e procurar novas estratégias para ultrapassar eventuais problemas.

No momento de *Trabalho autónomo* dos alunos, os professores observaram-nos para percecionar a variedade de estratégias e representações que surgiram. Simultaneamente, escolheram de antemão as representações que pretendiam explorar na *Discussão coletiva*. Esta escolha prévia permitiu aos professores explicitar conexões entre as diferentes representações e promover a sua compreensão por parte dos alunos.

Referências

Acevedo Nistal, A., Dooren, W. V., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). *Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review*. ZDM, *41*(5), 627– 636.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309—365). Dordrecht: D. Reidel.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L. Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: Uma experiência de ensino*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 325—343.

Stylianou, D. A. (2011). The process of abstracting in students' representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17(*1), 8—12.

Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 117-133.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ciclo. *Quadrante, 14*(1), 37—66.

Isabel Velez
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Maria de Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa, Portugal;

Representações no estudo das frações no 5.º ano de escolaridade

Elvira Santos, Cristina Martins, Irene Martins, Susana Serra

Ao longo do ano letivo 2021-22 decorreu a operacionalização antecipada das novas Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (NAEM) (Canavarro et al., 2021). No 5.º ano de escolaridade duas professoras (Irene e Susana), coautoras deste artigo, trabalharam ao longo de todo o ano letivo de forma colaborativa, reunindo semanalmente para planificar, construir tarefas, selecionar materiais e refletir sobre o trabalho decorrido. Esse trabalho foi desenvolvido com o acompanhamento de três elementos do Grupo de Desenvolvimento Curricular e Profissional da Matemática onde todas as opções e decisões relativas à planificação foram discutidas antes de serem levadas à prática e onde se refletiu, também, sobre a sua implementação, recolhendo dados para fundamentar futuras ações.

No âmbito da planificação de tarefas a levar à sala de aula, tivemos como ponto de partida as necessidades dos alunos em conjunção com aspetos de excecionalidade. Esta excecionalidade deve-se ao facto destes alunos, que estavam a iniciar o 2.º ciclo num novo programa de Matemática, concretizado nas NAEM de 5.º ano, viveram o seu processo de aprendizagem durante parte do 1.º ciclo no contexto de pandemia Covid 19, em que entre muitas outras condicionantes não lhes foi possível a utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Tornou-se, desta forma, ainda mais evidente o preconizado nas NAEM no que respeita à necessidade de uma articulação constante entre as aprendizagens a realizar no 2.º ciclo e as realizadas no 1.º ciclo.

É neste contexto que surge este artigo, no qual pretendemos dar a conhecer o trabalho desenvolvido em sala de aula sobre a comparação de frações, tendo-se optado pelo recurso à utilização do material manipulável, no caso concreto as barras Cuisenaire. Foram, ainda, desenvolvidas as capacidades de comunicação matemática, pensamento crítico e criatividade.

Assim, a consideração, entre outros aspetos, de uma abordagem em espiral e a necessidade de focar a aprendizagem na exploração das representações foi um motivo maior para as decisões tomadas pelo grupo de trabalho do 2.º ciclo, no sentido de contribuir para uma aprendizagem mais significativa aos alunos.

O papel das representações na aprendizagem

Num sentido lato, uma representação é uma configuração que pode representar algo de alguma forma" (Goldin, 2008, p. 178). Quando se menciona o termo representações tanto podemos referir-nos ao processo, fazendo alusão à aquisição de um conceito ou relação, como à forma em que a mesma é representada, ou seja, como um produto (NCTM, 2007). Para Tripathi (2008) uma representação matemática é "um constructo mental ou físico que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito e a inter-relação entre este e outras ideias" (p. 438). Durante o processo de aprendizagem os alunos vão progressivamente percorrer um caminho em que ao aceder às ideias matemáticas através das representações ficam na posse de um conjunto de ferramentas matemáticas que lhes possibilitam pensar matematicamente.

Jerome Bruner (1999) distingue três tipos de representações: i) representações ativas, relativas ao conjunto de ações adequadas para atingir uma determinada aprendizagem; ii) representações icónicas, relativas ao conjunto de imagens ou gráficos que ajudam a desenvolver uma ideia ou processo; iii) representações simbólicas, quando o pensamento utiliza um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas de um sistema que ajudam a entender um conceito de forma mais abrangente.

Como refere o NCTM (2007), os alunos devem "criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas" (p. 160). O professor ao ter acesso a essas representações vai ter acesso à forma como o aluno pensa e interpreta uma determinada tarefa. Assim, "os professores poderão aperceber-se do raciocínio dos alunos e da sua apreensão dos conceitos matemáticos ao analisar, questionar e interpretar as suas representações" (NCTM, 2007, p. 160). É pois, importante que o professor analise as representações dos seus alunos para, por um lado, conhecer o seu raciocínio matemático e, por outro, permitir-lhe apoiá-los na transição das suas próprias representações para as convencionais da matemática.

Nas NAEM (Canavarro et al., 2021) é clara a valorização das representações. Na apresentação dos objetivos para o ensino básico é referida a importância de desenvolver a capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática, atribuindo valor à conjunção de diferentes tipos de representações para ajudar a clarificar ideias matemáticas. Também nos conteúdos de aprendizagem, as capacidades matemáticas transversais são um tema, sendo que este inclui o tópico representações matemáticas. Salienta-se ainda que neste documento e na resposta à questão sobre como promover a aprendizagem da Matemática, são referidos de forma concreta os recursos, sendo assinalado que:

"A aprendizagem da Matemática beneficia do uso de recursos diversos que possibilitem, entre outros, o uso e exploração de representações múltiplas de forma eficiente. Os materiais manipuláveis devem ser utilizados sempre que favoreçam a compreensão de conhecimentos matemáticos e a conexão entre diferentes representações matemáticas" (Canavarro et al., 2021, p. 6). No documento, é também previsto que no 2.º ciclo, os alunos enriqueçam o seu leque de estratégias para resolver problemas, que beneficia de uma maior variedade de representações, sejam diagramas, tabelas, gráficos ou linguagem simbólica, as quais favorecem igualmente o desenvolvimento da comunicação matemática.

REPRESENTAÇÕES NO 5.º ANO: UM CAMINHO PERCORRIDO

As tarefas que aqui se apresentam enquadram-se curricularmente no tema Números, tendo como principal objetivo estabelecer a comparação de frações. No desenvolvimento das tarefas em sala de aula seguiu-se um ensino de natureza essencialmente exploratória, com a organização do trabalho dos alunos em grupos de quatro elementos. As produções dos alunos na resolução e resposta às tarefas que se apresentam pretendem ilustrar as representações utilizadas pelos grupos de alunos, em contexto de sala de aula. Numa parte da aula reservada para o efeito, as produções dos grupos foram apresentadas pelos próprios e discutidas em grande grupo, dando origem a novos conhecimentos matemáticos.

Num primeiro momento, os alunos tiveram oportunidade de explorar o material, sendo que efetuaram construções, compararam o comprimento das barras, e associaram o comprimento à cor de cada uma. Nesta primeira tarefa foi proposto aos alunos usar o conjunto de barras para cobrir uma determinada área com a utilização das barras Cuisenaire. Deste modo, os alunos foram-se apropriando do tamanho relativo das barras e a relação com a respetiva cor, como é possível ver na figura 1.

Figura 1. Produção de um grupo na resolução da tarefa "Cobrir uma determinada área com a utilização das barras Cuisenaire"

Numa segunda tarefa, pretendeu-se conhecer o raciocínio matemático dos alunos ao comparar frações com a unidade. Com esta tarefa, considerando que a barra laranja representa a unidade, os alunos deveriam identificar a fração que outras barras representavam, bem como, dada uma fração e a respetiva unidade identificar a barra correspondente.

Conforme é possível observar na figura 2, verificou-se que, de uma forma geral, que os alunos identificaram a fração correspondente a cada uma das barras em comparação com a unidade. Igualmente, foi possível observar que reconheceram facilmente a barra amarela como aquela que representa ½. No sentido de conhecer melhor como pensaram, era solicitado aos alunos que explicassem o processo que utilizaram para responder à questão.

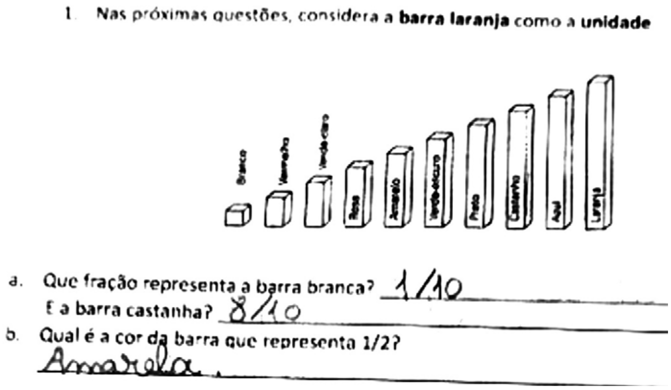


Figura 2. Produção de um grupo de trabalho na tarefa "Identificação de frações menores do que a unidade"

Na figura 3, é visível a produção realizada por um grupo. Observa-se que os alunos usaram a representação da barra que corresponde à unidade (barra laranja) e depois desenharam as outras barras, as barras branca e castanha, ajudando a identificar as frações que as representam respetivamente $\frac{1}{10}$ e $\frac{8}{10}$.

Para justificarem a sua resposta de que a barra amarela correspondia à fração $\frac{1}{2}$ procederam da mesma forma, desenharam a barra amarela ao lado da barra laranja, dando, desta forma, a ideia de comparação.

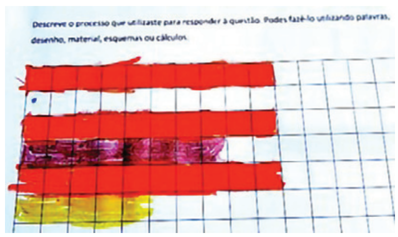


Figura 3. Produção dos alunos para justificarem o seu pensamento nas questões anteriores

Na questão seguinte desta tarefa, os alunos foram questionados a identificar a barra que correspondia à unidade, sendo-lhes dada a fração que uma determinada cor representava (figuras 4 e 5).

Analisando as produções dos alunos verifica-se que a ação dos alunos se centrou na procura de uma barra que fosse possível dividir em 4 partes iguais, respondendo à primeira parte da questão - barra cor de rosa. Constatou-se, ainda, que a partir da barra cor de rosa, identificada como a unidade, facilmente encontraram a barra que correspondia a $\frac{1}{2}$, barra vermelha.

Na questão 3 (figura 5) é indicada uma barra como unidade, mantendo intencionalmente a barra rosa para esse efeito, e foi pedido que, além da identificação das frações que representam números menores do que a unidade identificassem, também, a fração que representa a barra verde-escuro.

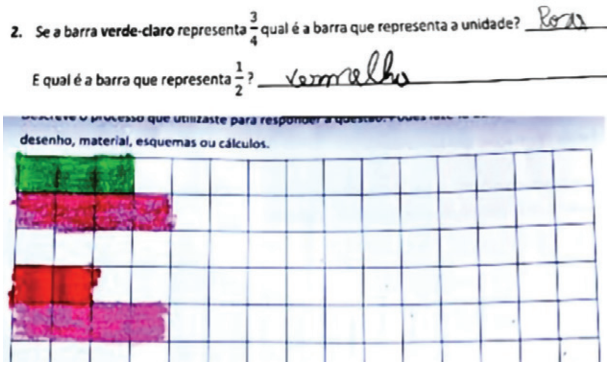


Figura 4. Produção de um grupo de alunos na identificação da unidade e da metade, dada uma barra como referência

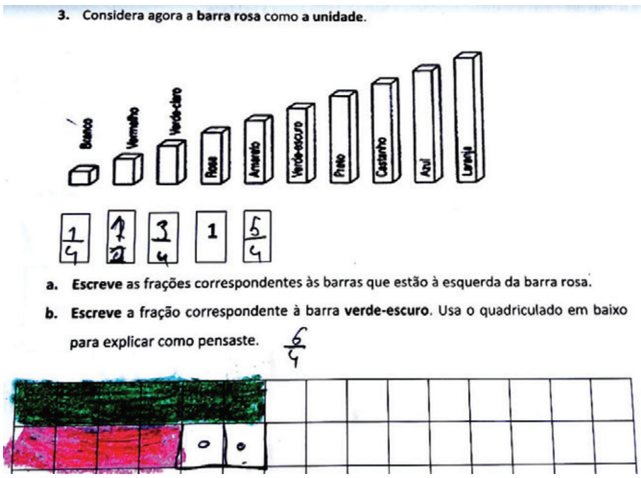


Figura 5. Produção de um grupo de trabalho: "Representação de frações maiores do que a unidade"

Os alunos desenharam a barra rosa e completaram os quadradinhos que faltavam, visível nos espaços em branco junto às barras, para descobrir que a barra correspondia a $\frac{6}{4}$. Percebemos assim, que os alunos efetuam novamente a comparação com a barra que representa a unidade e, nesta, assinalam mais dois quartos que completam a fração representada pela barra verde-escuro.

Ainda que não lhes tivesse sido pedido explicitamente para escreverem a fração correspondente à barra amarela, como essa questão estava implícita no enunciado através do espaço em branco para o efeito, os alunos representaram a fração correspondente a essa barra e justificaram oralmente que se a barra for dividida em 4 partes, a barra amarela tem mais uma dessas partes, ou seja, mais $\frac{1}{4}$, e logo, nesse espaço colocaram $\frac{5}{4}$.

O caminho percorrido continuou com a tarefa "Agora é a tua vez" (figuras 6 e 7), em que os alunos foram desafiados a elaborar questões aos seus colegas sobre o tópico em estudo. Pretendeu-se criar um momento que fosse simultaneamente de elaboração de enunciados de problemas e de questionamento pelos pares. Os alunos, após análise em trabalho de grupo, evidenciaram as suas questões em discussão grupo turma.

Constatou-se que neste percurso de aprendizagem, esta etapa foi bem acolhida pelos alunos, dando opinião sobre os enunciados produzidos pelos colegas revelando capacidade para identificar as fragilidades das questões colocadas. Com esta parte da tarefa, foram trabalhadas as capacidades de pensamento crítico e criatividade aliadas ao desenvolvimento da comunicação matemática.

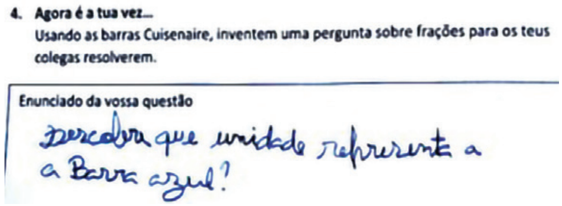


Figura 6. Produção do grupo A à tarefa "Agora é a tua vez"

Na figura 6, podemos observar que na criação do enunciado, os alunos não identificaram uma barra como referência o que suscitou a seguinte questão por parte do aluno Daniel (nome fictício, como todos os que forem surgindo):

> Daniel: Eu penso que eles devem melhorar a pergunta.
> A professora interpretou a sugestão do aluno e questionou: Então qual é a fração representada pela barra azul se ela própria for a unidade?
> Vários alunos responderam: Nove nonos.
> Um outro aluno, Carlos, adiantou outra resposta: Mas também podemos escrever 1.
> Porém uma aluna, Carla, sugere: Eles deviam dizer que a barra azul era a unidade e nós dizíamos a fração que ela representa.

Na produção apresentada na figura 7 foi indicada a unidade de referência (barra preta e incluídas 3 alíneas).

Na alínea a, os alunos solicitaram a identificação de uma fração menor do que a unidade, representada pela barra amarela, o que não levantou qualquer dúvida aos colegas. O mesmo aconteceu em relação à barra vermelha.

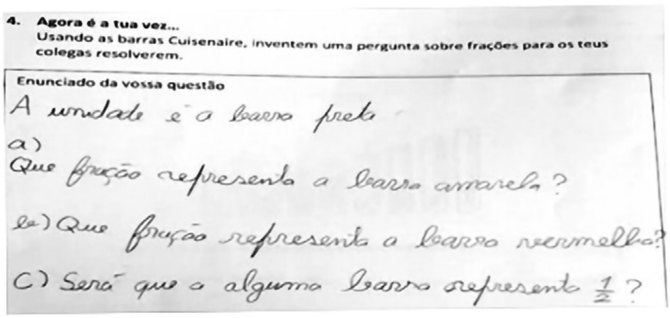


Figura 7. Produção do grupo C à tarefa "Agora é a tua vez"

Em relação à alínea c, uma aluna, a Maria, fez um comentário que conduziu ao seguinte diálogo:

> Maria: A barra preta é $\frac{7}{7}$. 7 é um número ímpar, não é possível encontrar a metade.
> A professora questionou: O que queres dizer, não é possível encontrar a metade, queres explicar melhor?
> Maria: Como 7 é um número ímpar, metade não é um número inteiro, por isso não temos nenhuma barra que represente $\frac{1}{2}$ da barra preta ($\frac{7}{7}$).

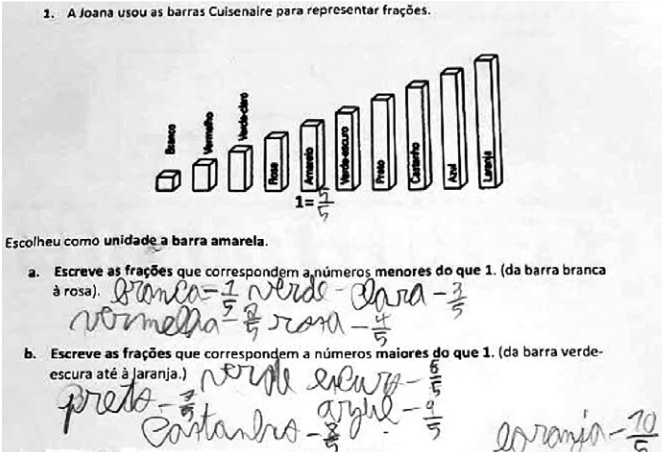


Figura 8. Produções dos alunos na tarefa "Comparação de frações": questão 1

Na resolução da tarefa, os grupos não manifestaram dúvidas. Nesta resolução destaca-se que os alunos identificaram a unidade na forma de fração e a partir daí, identificaram as frações que representam números menores e maiores do que 1.

Na segunda questão foi solicitado aos alunos que sistematizassem as ideias sobre as frações que representam números maiores que a unidade e menores que a unidade, atendendo aos seus termos. A sistematização foi efetuada com segurança na utilização dos termos e de forma correta pelos grupos.

Em síntese, nesta tarefa, é visível que os alunos identificam 1 como $\frac{5}{5}$ (figura 8) e a partir daí escrevem facilmente todas as frações que correspondem às barras. Ao escreverem as frações, os alunos identificaram facilmente as frações menores e maiores do que a unidade, fazendo referência, pela primeira vez, à relação entre numerador e denominador.

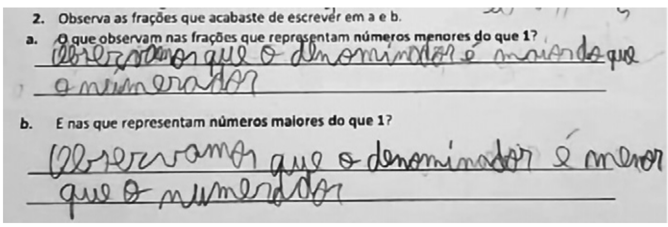


Figura 9. Produções dos alunos na tarefa "Comparação de frações": questão 2

Essa relação, é posteriormente integrada dando origem à escrita da regra de comparação de frações com o mesmo denominador, permitindo efetuar uma generalização baseada nas observações feitas (figura 10). Essa regra foi escrita através de uma ação que qualquer aluno deve realizar e completada com a escrita simbólica que indica essa comparação.

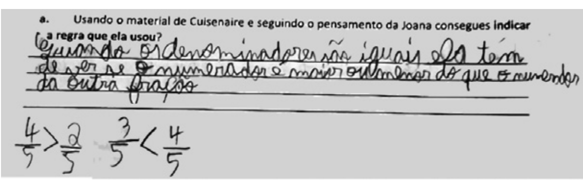


Figura 10. Produções dos alunos na tarefa "Comparação de frações"

REFLEXÃO FINAL

Estes alunos iniciaram o 2.º ciclo num novo programa, as novas Aprendizagens Essenciais, o que implicou uma constante e necessária averiguação e articulação das aprendizagens a efetuar com as aprendizagens anteriores dos alunos.

Durante a elaboração das tarefas, as professoras procuraram identificar e mobilizar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos, nomeadamente sobre frações menores que a unidade, para intencionalmente levar os alunos a identificar as frações maiores que a unidade, pois a comparação física propiciava-lhes facilidade e segurança nas respostas.

A elaboração das tarefas teve ainda a intenção de proporcionar o desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais tais como a comunicação matemática, o pensamento critico e a criatividade contribuindo, assim, para um maior envolvimento da parte dos alunos nas elaboração das suas produções.

Após a implementação das tarefas em sala de aula e da análise das produções orais e escritas dos alunos, verificou-se que a utilização do material *Cuisenaire* teve um papel relevante, no entendimento das frações, pois permitiu às professoras perceber o raciocínio dos alunos e permitiu aos alunos transitar entre duas representações distintas para o mesmo objeto.

As discussões possibilitaram às professoras perceber que inicialmente os alunos recorriam ao desenho das barras e depois à representação da fração e, por fim, usavam linguagem matemática como um dos meios para comunicar as suas conclusões e estratégias de resolução, como Bruner refere, numa abordagem em espiral, explícita nas NAEM.

Referências

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico.* ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178—203): Routledge.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* APM. (obra original em inglês, publicada em 2000)

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438—444.

Elvira Santos
Agrupamento de Escolas de Álvaro Velho, Barreiro

Cristina Martins
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança

Irene Martins
Professora titular de turma do 5.º ano no Agrupamento de Escolas de Álvaro Velho, Barreiro

Susana Serra
Professora titular de turma do 5.º ano no Agrupamento de Escolas Moinhos da Arroja, Odivelas

Processos de raciocínio espacial na articulação entre representações 3D e 2D

Joana Conceição
Margarida Rodrigues

Raciocínio espacial (RE) é definido por Davis et al. (2015) como um conjunto de processos que se organizam em duas partes fundamentais, complementares, coenvolvidas e inextricáveis, *compreender* (mentalmente) e *transformar* (fisicamente). Esta relação que existe entre estas duas partes permite, entre outros aspetos, o estabelecimento de relações, progressivamente mais aprofundadas, entre o que é físico e concreto e o que é mental e abstrato.

Mudar de dimensão constitui um dos processos de RE enumerados por estes autores. Este processo implica a passagem de representações bidimensionais de figuras tridimensionais para representações tridimensionais e a passagem de representações tridimensionais para representações bidimensionais dessas figuras. Isto requer que haja, por um lado, um conhecimento da estrutura das figuras e, por outro lado, o conhecimento de códigos de representação. Nos casos de figuras tridimensionais, estes códigos constituem-se como representações abstratas, relativamente aos modelos 3D, e traduzem-se por símbolos, esquemas, desenhos, onde as relações espaciais presentes procuram representar as relações espaciais do modelo. São exemplos de códigos de representação as representações em perspetiva, em camadas ou a ortogonal codificada (figura 1 a, b e c, respetivamente). Gutiérrez (1996) refere, precisamente, que as representações bidimensionais de figuras tridimensionais implicam perda de informação, porque não é possível representar uma figura 3D no plano, na sua totalidade. Por isso, o conhecimento dos códigos de representação torna-se fundamental para a interpretação de um determinado tipo de representação, como acontece na passagem do 2D para o 3D. Desta forma, é possível restituir informação importante que se perdeu com o registo bidimensional da figura tridimensional.

A falta de conhecimentos, por parte dos alunos, no que respeita à articulação entre representações bidimensionais e tridimensionais de objetos tridimensionais, tem sido descrita por diversos autores (e.g. Gutiérrez, 1996) como um dos fatores que gera dificuldade na interpretação de representações bidimensionais de figuras tridimensionais. No entanto, os trabalhos de investigação, neste âmbito, têm-se debruçado sobretudo na interpretação de representações formais como as projeções em perspetiva, cavaleira ou isométrica, e poucos têm sido os trabalhos dedicados a compreender que tipo de representações intuitivas utilizam os alunos para representar figuras tridimensionais no plano. Isto parece ser sugestivo da importância de o trabalho, em sala de aula, contemplar, entre outros aspetos, a construção de figuras, a exploração das suas estruturas e das suas formas de representação. Mas sugere também a importância de trabalhar a aprendizagem das figuras bidimensionais e tridimensionais de forma integrada e articulada, tal como sugerido por Johnston-Wilder e Mason (2005).

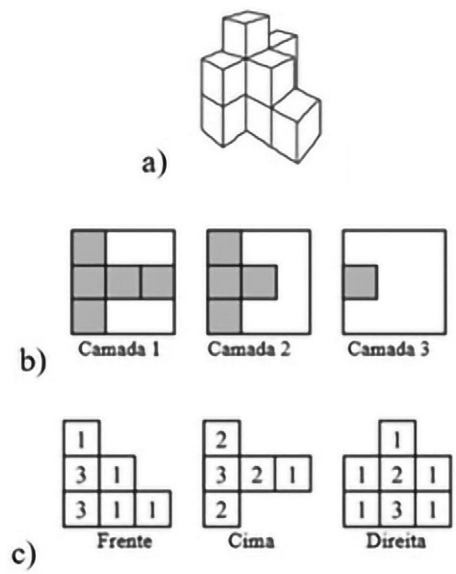


Figura 1. Exemplos de códigos de representação de figuras 3D no plano (Gutiérrez, 1996)

Neste sentido, o nosso objetivo, neste artigo, é perceber que tipo de estratégias utilizam alunos do 1.º ano para representar construções tridimensionais, no plano, e que processos de raciocínio estão envolvidos nessa articulação.

RACIOCÍNIO ESPACIAL

O esquema da figura 2 apresenta uma proposta de Davis et al. (2015) para a caracterização do RE e dos processos envolvidos.

Figura 2. Proposta de Davis et al. (2015) para caracterizar o RE

Dos diferentes processos enumerados por estes autores, estão associados a compreender, por exemplo, compor/decompor, organizar/reorganizar, segmentar, comparar, relacionar e imaginar. Estes processos remetem para um trabalho centrado na estrutura das figuras, bidimensionais e tridimensionais, uma vez que parecem incidir em aspetos particulares na sua relação com o todo. Relativamente à parte de transformar, os processos incluem deslizar, rodar, refletir, mudar de dimensão, localizar, entre outros. A interação entre os processos associados a compreender e a transformar parecem contribuir para uma abstração progressiva que emerge a partir da manipulação do que é físico e concreto para a construção e manipulação de representações mentais e abstratas.

Alguns autores têm vindo a evidenciar a importância do desenho de construções na abstração matemática (Sinclair et al., 2018) e na perceção e aprofundamento de relações espaciais (Thom & McGarvey, 2015). Desenhar figuras tridimensionais implica uma mudança no tipo de representação utilizado, para a qual contribuem diferentes processos de RE: relacionar, construir diagramas, compor/decompor, organizar/reorganizar e segmentar (compreender) e mudar de dimensão e localizar (transformar). Implica também o reconhecimento de relações semelhantes entre a construção 3D e a sua representação 2D. Por isso, é importante criar condições para o trabalho dentro de diferentes tipos de representação, explorando e discutindo formas de representação pessoais para chegar a formas de representação mais formais e inteligíveis.

Por exemplo, Sack e van Niekerk (2009) descrevem diferentes formas de representação de construções com cubos, utilizadas por alunos entre os seis e os sete anos de idade (figura 3).

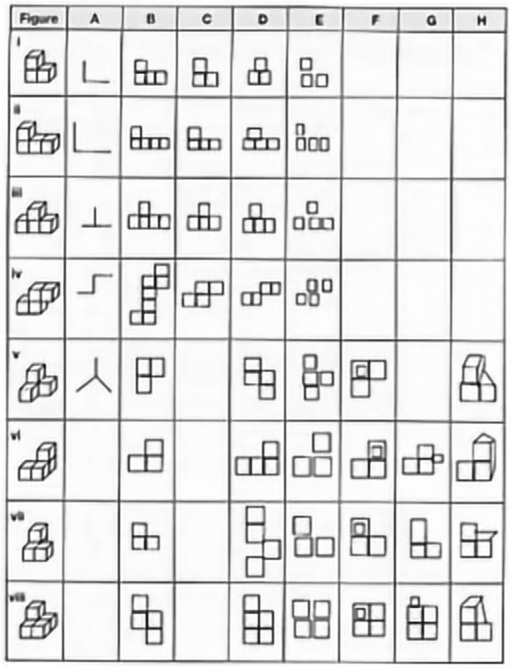


Figura 3. Diferentes categorias de desenhos de policubos (Sack & van Niekerk, 2009, p. 148)

Este trabalho é revelador do desafio que a representação de figuras 3D implica. Por exemplo, na figura 3, as construções i a iv são passíveis de assentar, totalmente, numa superfície plana, tornando mais fácil o seu registo, enquanto as construções de v a viii apresentam cubos em profundidade, o que torna o seu registo mais desafiante quando ainda não se conhecem códigos de representação. Também o tipo de relações presentes, neste último grupo de figuras, é mais complexo. Para além deste trabalho, a investigação de Nunes e Rodrigues (2018) com crianças da educação pré-escolar acrescenta o registo de cubos no verso da folha para representar níveis diferentes na construção.

Para perceber a que relações espaciais os alunos recorrem para representar, no plano, as relações espaciais que identificam nas construções tridimensionais, é preciso criar momentos de trabalho para discutir essas representações, procurando que essas discussões conduzam a formas de representação mais formais, socialmente construídas, para que sejam entendidas por todos. Esses momentos devem procurar articular as diferentes formas de representação possíveis para uma determinada figura.

EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Este estudo foi desenvolvido numa turma de 1.º ano, com 24 alunos e respetiva professora. Tinha como objetivo compreender os processos de raciocínio espacial e de estruturação espacial, utilizados pelos alunos, sendo que, neste artigo, em particular, nos focamos em perceber o tipo de estratégias que os alunos do 1.º ano utilizam na representação, no plano, de construções tridimensionais e que processos de raciocínio estão envolvidos nessa articulação. Dentro das três sequências de tarefas implementadas, foram propostas duas tarefas aos alunos, uma de construção de pentacubos e outra de construção de um paralelepípedo com tricubos, assim como o registo das suas construções, na sua folha de trabalho. Para além destas duas tarefas, ao longo da experiência de ensino, foram várias as oportunidades que foram sendo criadas para levar as crianças a articular as representações bidimensionais e as representações tridimensionais.

REPRESENTAÇÕES BIDIMENSIONAIS DE FIGURAS TRIDIMENSIONAIS

Começamos por apresentar, na figura 4, uma construção de duas camadas feita por uma aluna da turma, Luzia, e o respetivo registo.

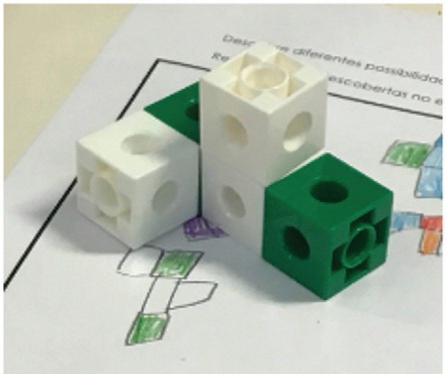


Figura 4. Registo e construção de Luzia para um pentacubo com duas camadas

Este registo é relativo a uma construção com profundidade, feita por Luzia, onde a aluna regista uma espécie de quadrado enviesado, possivelmente, para dar a ideia de níveis diferentes. Embora este registo não forneça as informações adequadas para a sua reconstrução, o modelo mental que a aluna possui, e que deu origem a esta representação, pode corresponder ao modelo 3D. Afirmamos isto, porque o registo de figuras é desafiante e esta estratégia de desenhar um quadrado enviesado parece ter sido o recurso que a aluna encontrou para tentar registar de forma fidedigna. Nesta passagem de uma representação tridimensional para uma representação bidimensional, reconhecem-se diferentes processos de RE, que surgem por força de um processo principal que é mudar de dimensão, como relacionar (diferentes representações), localizar (cubos e compostos), segmentar (a construção em partes).

O facto de o registo de Luzia suscitar dúvidas na interpretação que alguns colegas fazem quando tentam reconstruir a figura (figura 5), leva a professora a conduzir a discussão, no sentido de evidenciar essas discrepâncias e de levar os alunos a refletir sobre formas de registo adequadas:

> Professora – Quem olhar bem para esta figura (registo da figura 4) que a Luzia fez, até parece que é esta (mostra a construção da figura 3). Na verdade, o que a Luzia queria fazer era esta (mostra a construção de Luzia).

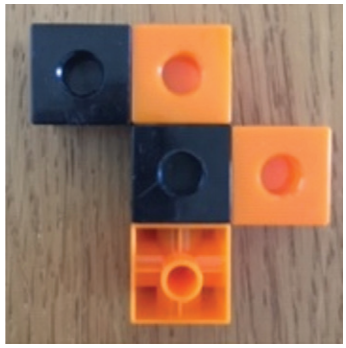


Figura 5. Construção a partir do registo de Luzia

> Raquel – Porque não dava para fazer… Tinha de colocar ao lado.
> Professora – Por que é que não dava para fazer por cima?
> Raquel – Porque aquilo é só um papel, não dá para… Tínhamos de fazer do outro lado (referindo-se ao verso da folha).

Raquel compreende a relação por cima/por baixo, presente na construção, e sugere uma forma de registo que mantém essa relação, embora não seja eficaz nem adequada, do ponto de vista mais formal da representação de figuras tridimensionais. Esta estratégia é também referida por Nunes e Rodrigues (2018), o que sugere que pode ser uma forma de entendimento frequente em crianças destas idades.

Na figura 6, apresentamos uma outra figura construída por Gil e a forma de registo que utilizou para esta construção. Este registo foi discutido na turma por apresentar um código de representação que se começa a aproximar da projeção ortogonal codificada, apresentada por Gutiérrez (1996), embora se trate ainda de uma representação visual.

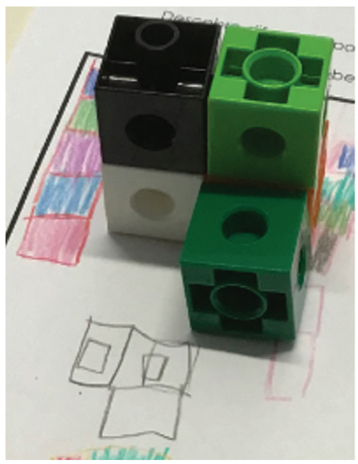


Figura 6. Registo e construção de Gil

O seguinte excerto diz respeito à explicação do aluno:

> Gil – Eu fiz assim, porque era mais fácil fazer assim, percebia-se mais. Porque aqui está um cubo maior, aqui está outro cubo grande, aqui está outro cubo grande e aqui, percebia-se que está outro cubo em cima e este aqui é outro cubo.

A sua explicação sugere uma estruturação por camadas, onde o aluno, ao mudar de dimensão, mobiliza, como processos de RE segmentar (em camadas), localizar e relacionar. Embora os processos sejam semelhantes aos utilizados por Luzia, o tipo de relações que estabelece parecem ser diferentes, em parte, porque a própria figura sugere relações diferentes, mas também porque Gil recorre a outro tipo de registo. A sua explicação e o seu desenho sugerem que Gil representa a construção de acordo com o seu modelo mental, a partir da vista de cima. Neste caso, desenha primeiro os cubos da camada inferior, como se não houvesse a camada superior, e depois então os cubos da camada superior, desenhando quadrados mais pequenos para sugerir diferentes níveis.

Desta forma, Gil desenha a construção 3D de uma forma que permite representar de forma coerente relações espaciais nela presentes. No entanto, a professora salvaguardou que a estratégia de registo de Gil seria limitada, no caso de figuras com colunas com muitos cubos e, por isso, apresentou aos alunos a projeção ortogonal codificada, explicando que se poderiam usar números para indicar o total de cubos em cada coluna. Desta forma, a professora procura estabelecer uma relação entre a representação visual de Gil e uma representação simbólica.

Relativamente às construções com tricubos, apresentamos o registo da construção de Dalila (figura 7). A seta indica a perspetiva da aluna.

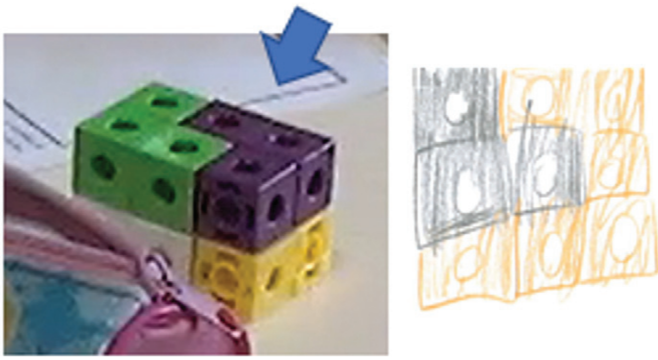


Figura 7. Construção e registo de Dalila

Dalila regista primeiro a vista de cima da construção e depois a vista da frente apenas da camada inferior. Embora a sua estratégia de registo não seja, totalmente, coerente com o modelo 3D, algumas das relações espaciais parecem ter sido tidas em conta. Na passagem da tridimensionalidade para a bidimensionalidade, Dalila parece segmentar a construção em camadas e registar o que vê de cada uma dessas camadas. Apesar de sugerir uma decomposição em camadas, tal como Gil, a forma de representação utilizada por Dalila não representa toda a informação acerca da construção. Não obstante a sua forma de registo ser ainda muito simples, sugere quase a representação em perspetiva.

Na figura 8, vemos o registo de Gil, para a construção de um paralelepípedo, onde a seta indica a perspetiva do aluno. Gil explica o seu significado:

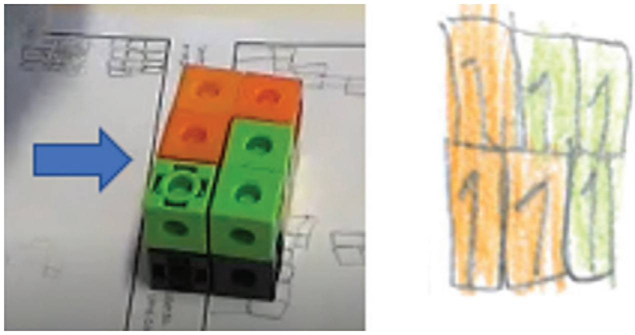


Figura 8. Construção e registo de Gil

Professora – O que significam estes 1?
Gil – Significa que estes… O quadrado que é um e o outro um que é dois.

Gil desenha seis quadrados que representam uma camada da construção, vista de cima, e, dentro de cada quadrado, escreve o número 1 para indicar o número de cubos acima da primeira camada. Contudo, este tipo de representação pode induzir a ideia de que só há um cubo em cada coluna. Gil parece recorrer aos mesmos processos de RE que tinha utilizado anteriormente, mas utiliza um tipo de representação mais abstrata, uma vez que já não desenha os quadrados da camada superior dentro dos quadrados da camada inferior, recorrendo antes a símbolos (números) que representam a quantidade de cubos acima da primeira camada.

Luísa utiliza uma representação semelhante à de Gil, embora escrevendo 2 em cada quadrado, identificando o número total de cubos em cada coluna (figura 9).

Figura 9. Registo de Luísa

Desta forma, este tipo de representação simbólica parece manter as relações espaciais presentes na construção 3D e, por não revelar ambiguidade, permite uma interpretação fiável do tipo de construção a que se refere.

Relativamente à estratégia de registo de Gil e Luísa, os alunos utilizam representações simbólicas, recorrendo a números para mostrar a quantidade de cubos, embora com significados diferentes. As suas formas de representação evidenciam processos de segmentar, relacionar, localizar, mudar de dimensão e também de modelar, pelo recurso ao registo simbólico.

CONCLUSÕES

As estratégias utilizadas por alunos do 1.º ano para representar figuras tridimensionais revelam que, por um lado, estes são capazes de utilizar estratégias informais e, por outro, que procuram manter as relações espaciais que encontram nas figuras tridimensionais. Estas estratégias merecem ser discutidas na sala de aula como forma de promover formas de representação mais sofisticadas. Essa discussão deve ter em conta a articulação entre as diferentes formas de representação.

O processo de representar figuras tridimensionais no plano, mudar de dimensão, é já, em si, um processo de RE, mas os alunos mobilizam outros, como segmentar, localizar, relacionar ou modelar, para poderem compreender melhor os diferentes aspetos das figuras, a partir das relações espaciais estabelecidas. Isto evidencia a importância dos processos de raciocínio espacial, neste tipo de trabalho.

Os desenhos das construções têm um papel fundamental, já que implicam uma análise mais aprofundada da estrutura das figuras e da procura de estratégias de representação que procurem manter as relações presentes nessa estrutura. Esta passagem de um tipo de representação 3D para uma representação 2D é fundamental no processo de abstração.

Agradecimentos:

Este trabalho foi financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017).

Referências

Davis, B., Okamoto, Y., & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In Davis, B. (Ed.) *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 121–136). New York: Routledge.

Gutiérrez, A. (1996). Children's ability for using different plane representations of space figures. In A. R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 33-42). Brisbane, Australia: Centre for Mathematics and Science Education, Q.U.T.

Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

Nunes, M. J. & Rodrigues, M. (2018). Compondo e desenhando formas tridimensionais: um contributo para a caracterização do raciocínio espacial de crianças de 5 anos. *Quadrante, 27*(2). 63–88.

Sack, J., & van Niekerk, R. (2009). Developing the spatial operational capacity of young children using wooden cubes and dynamic simulation software. In T. Craine & R. Rubinstein (Ed.), *Understanding geometry for a changing world: Seventy-first yearbook* (pp. 141-154). Reston: NCTM.

Sinclair, N., Moss, J., Hawes, Z., & Stephenson, C. (2018). Learning through and from drawing in Early Years Geometry. In K. Mix & M. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics: The role of spatial reasoning in mathematical thought* (pp. 229-252). Cham, Switzerland: Springer. doi:10.1007/978-3-319-98767-5

Thom, J. S., & McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing(s): observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM, 47*(3), 465–481.

Joana Conceição
Colégio Atlântico, Seixal

Margarida Rodrigues
CIED, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Representar para resolver!

Sandra Nobre

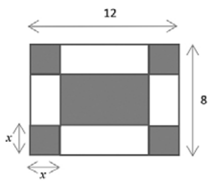
A proposta de tarefas não rotineiras que se centrem no raciocínio e na resolução de problemas é fundamental para que os alunos desenvolvam o seu conhecimento matemático, com compreensão. O envolvimento dos alunos nestas tarefas leva-os a contactar com uma diversidade de estratégias que naturalmente envolvem uma grande variedade de representações matemáticas.

Atualmente, as representações matemáticas constituem uma componente fundamental da aprendizagem e apresentam-se como uma capacidade matemática a desenvolver, a par de outras, ao longo de todo o ensino básico (Canavarro et al., 2021).

Neste artigo, descrevo a resolução de uma tarefa, analiso as representações matemáticas que os alunos registaram e a forma como as articularam no processo de resolução.

Problema

Considera o retângulo da figura, com uma parte colorida a cinzento e outra branca. Sabe-se que $0 < x < 4$.
Poderá a área da região colorida a cinzento ser igual à área branca? Justifica a tua resposta.



Este problema foi proposto a uma turma do 8.º ano, constituída por 21 alunos, durante uma aula de 90 minutos. Após a apresentação da tarefa, os alunos trabalharam, maioritariamente, a pares.

Foi possível observar que os diferentes pares de alunos abordaram o problema recorrendo a diferentes representações, tais como, linguagem natural, representações pictóricas, representações gráficas e as representações nos sistemas de notação numérico e algébrico (Nobre, 2016).

Alguns alunos começaram por resolver o problema recorrendo à estratégia de tentativa e erro, atribuindo valores ao comprimento do lado do quadrado, x. Uma das primeiras tentativas, para quem recorreu a esta estratégia, foi a substituição de x pelo valor 2. Este intento não foi ao acaso. A partir da imagem da figura alguns alunos consideraram que a área de cada um dos retângulos laterais brancos era o dobro da área de cada um dos quadrados. Esta explicação, em linguagem natural, foi apresentada por um par de alunos na sua resolução, como apresento na figura 1.

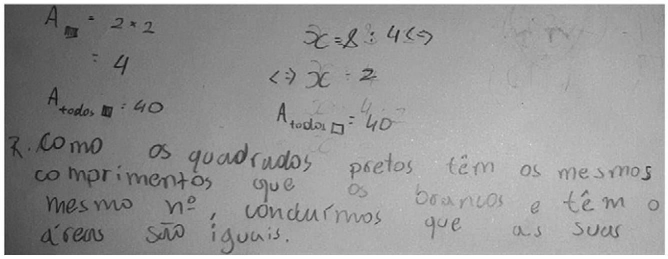


Figura 1. Resolução de um par de alunos

Embora este par de alunos não o explicite na sua resposta, eles dividiram a figura em quadrados iguais, 10 cinzentos e 10 brancos, como se apresenta na figura 2, concluindo assim que as suas áreas são iguais para x = 2.

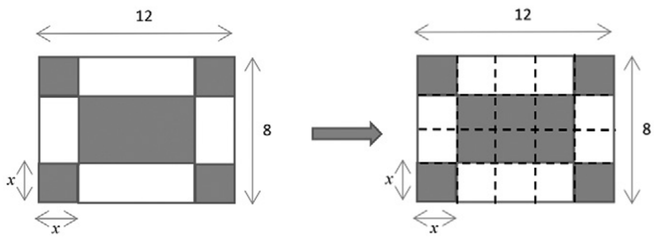


Figura 2. Divisão do retângulo em quadrados

Na sua explicação os alunos recorreram aos cálculos das áreas dos quadrados e argumentaram com recurso a linguagem natural a forma como relacionaram as áreas.

Outro par de alunos, que também recorreu à tentativa e erro, decidiu substituir o valor de x por 3, conforme apresento na figura 3.

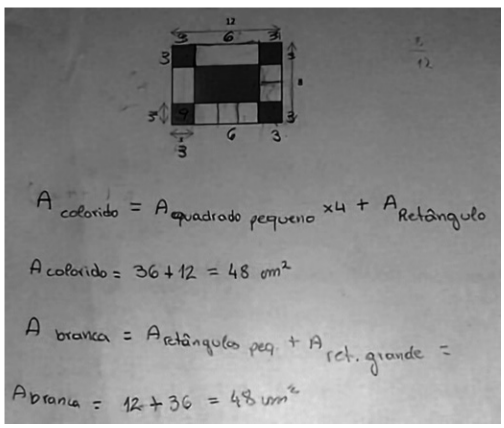


Figura 3. Resolução de outro par de alunos

Os alunos mostraram na sua resolução a forma como determinaram as áreas obtendo valores iguais. Contudo, não respondem explicitamente ao que é solicitado no enunciado.

Estes dois pares de alunos, cujas resoluções foram apresentadas anteriormente, embora tenham sido incentivados a procurar outras soluções, não o fizeram, admitindo que já tinham encontrado um valor para o qual as áreas são iguais e, como tal, obtido a resposta para o problema.

Um terceiro par de alunos, também recorrendo à tentativa e erro, obteve as duas soluções distintas para o problema, como apresento na figura 4.

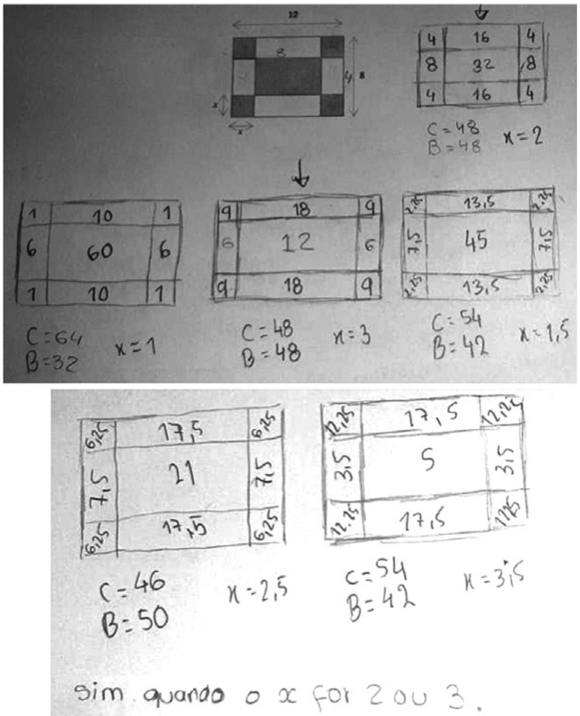


Figura 4. Resolução de um terceiro par de alunos

Estes alunos apresentaram várias tentativas para diferentes valores de x, considerando também números não inteiros, como 1,5 e 2,5. No final concluíram que as áreas são iguais para dois valores distintos de x, 2 e 3. Simultaneamente, apresentaram representações do retângulo com os valores das áreas das diferentes partes da figura, de acordo com as substituições que fizeram.

Dos cinco pares de alunos que recorreram à estratégia de tentativa e erro, apenas dois deles apresentaram as duas soluções para o problema, os restantes três pares apenas apresentam uma solução.

Os restantes alunos avançaram com estratégias algébricas, contudo nem todos foram bem-sucedidos. Alguns alunos manifestaram dificuldades na escrita das expressões algébricas bem como na definição e implementação de um plano assertivo para a resolução do problema em causa.

Dois dos pares de alunos, que optaram por seguir uma estratégia algébrica, começaram por escrever expressões algébricas para designar as medidas dos comprimentos dos lados dos retângulos. Os alunos, embora não o tenham expressado explicitamente junto da figura, recorreram às expressões algébricas indicadas na figura 5 para o cálculo das áreas dos retângulos que compõem a figura.

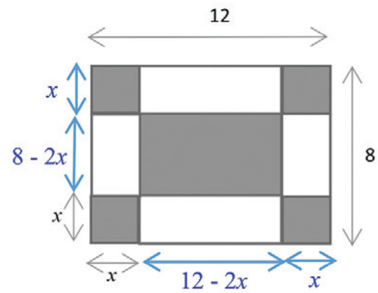


Figura 5. Expressões algébricas

Ambos os pares de alunos começaram por traduzir o problema através de uma equação, onde expressam a igualdade entre a área a cinzento e a área a branco (figura 6).

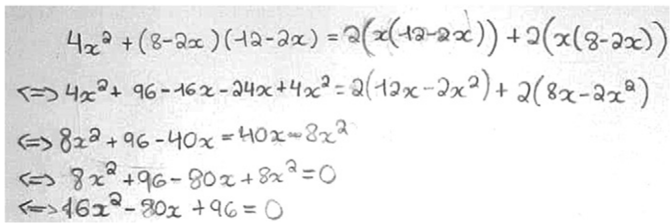


Figura 6. Equação para a igualdade das áreas

Estes alunos efetuaram, em seguida, várias operações algébricas, transformando sucessivamente a equação até à sua simplificação. Esta situação criou uma oportunidade para relembrar a multiplicação de binómios, bem como a simplificação de polinómios, já estudadas. Após a escrita da equação na forma canónica, ambos os pares de alunos ficaram surpreendidos por terem obtido uma equação do 2.º grau completa que ainda não sabiam resolver (um tópico apenas abordado no 9.º ano). Nesta fase, os alunos questionaram-me acerca de possíveis processos para a resolução da equação, contudo apenas os incentivei a refletirem acerca da igualdade obtida, sem lhe dar resposta ao seu pedido. Neste momento, pensei que os alunos optassem pelo método de tentativa e erro para resolver a equação, substituindo a incógnita por um valor até obterem uma proposição verdadeira. Os alunos discutiram entre si qual seria a melhor opção para chegar a um resultado. Os alunos decidiram que uma representação gráfica poderia ser a melhor opção para obter a solução. Assim, recorreram ao telemóvel pessoal para aceder ao GeoGebra, conforme se vê na figura 7.

A partir da representação gráfica obtida, os alunos identificaram de imediato as duas soluções da equação, x = 2 ou x = 3, e efetuaram um esboço do gráfico na folha de resposta.

Neste procedimento foram estabelecidas conexões entre diferentes tipos de representações. Uma representação algébrica, através da equação e a representação gráfica da parábola que representa a função quadrática encontrada pelos alunos. De imediato, os alunos reconheceram que as soluções da equação são as abcissas dos pontos de interseção da representação gráfica com o eixo Ox.

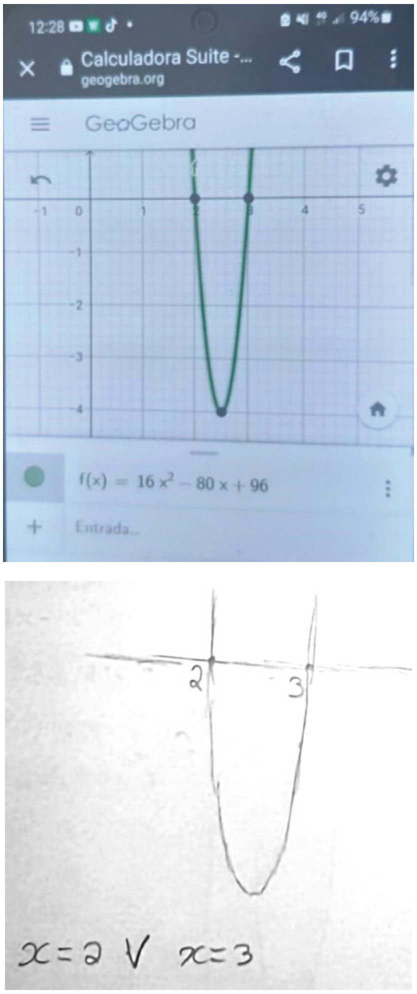


Figura 7. Representação gráfica no GeoGebra e respetivo esboço no papel

A procura de uma estratégia alternativa para a resolução da equação do 2.º grau não foi ocasional. Na realidade, para estes dois pares de alunos, a tentativa e erro é um método, muitas vezes, subestimado. Apenas recorrem à tentativa e erro em última instância, caso não consigam encontrar uma estratégia para resolver uma tarefa.

De facto, estes alunos, tendem a procurar processos de resolução alternativos e mais poderosos, o que tem contribuído para alargar os seus conhecimentos ao nível das representações matemáticas, bem como permitido o estabelecimento de conexões entre os diferentes tipos de representações usadas.

Após a conclusão da resolução da tarefa passámos à fase da apresentação e discussão de diferentes resoluções, desde as mais informais às mais formais. Nesta fase, os alunos conseguiram percecionar as diferentes estratégias, bem como as diferentes representações que emergiram durante a resolução do problema.

Os alunos que recorreram à tentativa e erro usaram maioritariamente representações no sistema de notação numérico para escreverem expressões numéricas e efetuarem os cálculos para as áreas dos retângulos; alguns recorreram ainda à linguagem natural para estabelecer e/ou explicar as relações entre os comprimentos dos lados e as áreas dos retângulos. Há ainda outros que recorreram às representações pictóricas para representarem diferentes retângulos para as diferentes tentativas que foram realizando.

Quanto aos alunos que recorreram a estratégias algébricas, estes fizeram uso de expressões algébricas para a escrita de equações que expressam a igualdade das áreas. Estes alunos recorreram, por fim, a representações gráficas, num ambiente digital, para a obtenção das soluções do problema. O uso do GeoGebra por parte dos alunos é comum em sala de aula e estes têm a liberdade de recorrer a esta ferramenta, no seu telemóvel, quando a consideram útil para a resolução das tarefas que lhes são propostas.

Houve, no entanto, alunos que tentaram adotar uma estratégia algébrica, mas não concluíram a resolução do problema. Alguns por dificuldades na manipulação algébrica, o que dificultou a simplificação das expressões, outros por ainda desconhecerem como resolver a equação do 2.º grau completa obtida.

A fase da discussão revelou-se pertinente para os alunos contactarem com outras representações matemáticas que suportam a resolução deste problema, permitindo-lhes ainda perceber como é possível estabelecer conexões entre diferentes representações. Por outro lado, permitiu que os alunos com dificuldades na manipulação algébrica conseguissem perceber o significado das expressões algébricas usadas, esclarecendo as suas dúvidas e assim avançarem na sua resolução.

É importante que os professores continuem a propor tarefas, em sala de aula, que sejam desafiantes para os alunos, que os levem a mobilizar livremente e de forma flexível diversas representações matemáticas de modo a promover uma aprendizagem da matemática com compreensão. Os alunos, na resolução das tarefas, devem ter a oportunidade de lidar frequentemente com diferentes estratégias e diferentes representações. Devem ainda ser estimulados a entender o papel das diferentes representações, bem como das suas inter-relações.

Referências

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico.* ME-DGE.

Nobre, S. (2016). *O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Sandra Nobre
Agrupamento de Escolas Tomás Cabreira

O poder das representações matemáticas na resolução de problemas de contagem

Mónica Valadão, Nélia Amado, João Pedro da Ponte

Neste artigo apresentamos parte de uma experiência de ensino desenvolvida com o objetivo de promover uma aprendizagem mais significativa da Análise Combinatória, ilustrando como a resolução de problemas por parte dos alunos pode tirar partido do uso de diferentes representações.

ANÁLISE COMBINATÓRIA E REPRESENTAÇÕES

A importância da Análise Combinatória no currículo de matemática está bem patente na literatura em educação matemática. Vários autores (por exemplo, Sriraman & English, 2004) destacam a pertinência da resolução de problemas de contagem na matemática escolar, na medida em que estes promovem o pensamento autónomo, estimulam a flexibilidade nas abordagens e nas representações, orientam para um foco nas estruturas, facilitam o desenvolvimento de processos de enumeração e a realização de conjeturas e de generalizações, incentivam a partilha de resoluções e criam oportunidades para a formulação de novos problemas.

Todavia, a investigação mostra que os alunos enfrentam grandes dificuldades na resolução de problemas de contagem. Pensar de um ponto de vista combinatório requer que os alunos explorem criativamente os aspetos estruturais de uma situação-problema, na tentativa de a reduzir a um caso mais simples ou a um problema previamente resolvido. Há uma simplicidade intrínseca aos problemas de contagem que faz com que sejam de fácil compreensão, mas também sejam capazes de gerar grandes desafios na procura de um caminho adequado para os resolver. A maioria destes problemas não tem métodos de resolução prontamente disponíveis e criam incerteza nos alunos, na forma como os abordar e que processos utilizar (Batanero et al., 1997).

Em Portugal, o ensino da análise combinatória tem sido pouco valorizado, surgindo apenas no 12.º ano, na disciplina de Matemática A, associado ao cálculo de probabilidades. Nas novas Aprendizagens Essenciais para o ensino secundário, a matemática discreta assume maior destaque, sendo recomendada a resolução de problemas de contagem com base em situações reais, com exploração e discussão de exemplos ilustrativos e a utilização de representações matemáticas diversificadas, com análise das vantagens e limitações de cada tipo de representação.

O modo como os professores pensam e trabalham a análise combinatória, afeta diretamente a aprendizagem dos alunos. Na perspetiva de Batanero et al. (1997), o ensino e a avaliação da combinatória devem ser baseados na resolução de problemas de contagem diversificados, em que os alunos sintam necessidade de utilizar procedimentos sistemáticos de enumeração, recorrência, classificação e uma diversidade de representações. O ensino da combinatória deve enfatizar o raciocínio combinatório, em oposição à aplicação das fórmulas das permutações, arranjos e combinações. O modelo de ensino deste tema tem seguido perspetivas didáticas voltadas integralmente, ou quase, para aspetos estritamente matemáticos, desvinculados de conexões com a realidade. Adotar uma metodologia que permita a participação do aluno na construção dos conceitos, poderá contribuir para uma compreensão mais significativa do tema.

As tarefas a propor aos alunos devem promover o raciocínio, favorecer a utilização de diferentes representações e o estabelecimento de conexões entre elas, estimular um discurso matemático significativo e o desenvolvimento de uma fluência procedimental e a compreensão conceptual (NCTM, 2014). English (2005) defende que devem ser dadas oportunidades aos alunos para explorarem situações que envolvam problemas de contagem sem instrução direta, uma vez que a resolução destes problemas estimula o pensamento dos alunos, ao permitir uma variedade de resoluções e representações, como o uso de desenhos, tabelas, listagens sistemáticas e não sistemáticas, modelos concretos, entre outras abordagens.

Quando confrontados com diferentes problemas de contagem, os alunos utilizam, naturalmente, diferentes abordagens nas suas resoluções. Sriraman e English (2004) consideram fundamental dar liberdade aos alunos, para que estes utilizem diferentes representações e diferentes processos de resolução. "Encorajar tal flexibilidade e análise crítica de escolhas permite construir uma fundação para a flexibilidade na matemática mais complexa" (Sriraman & English, 2004, p. 185).

UMA EXPERIÊNCIA REALIZADA NO ÂMBITO DE UM ESTUDO DE AULA

A planificação da experiência de ensino foi elaborada durante a realização de um estudo de aula subordinado ao tema da análise combinatória, lecionado na disciplina de Matemática A, no 12.º ano de escolaridade, no ano letivo de 2021/22. Com o trabalho desenvolvido nas sessões do estudo de aula foi construída uma sequência didática constituída por sete aulas de 90 minutos, sobre a resolução de problemas de contagem envolvendo as operações combinatórias de permutação, arranjo simples, combinação e arranjo completo.

Nas primeiras aulas propôs-se a resolução de uma sequência de tarefas que envolviam situações de contagem simples, sem que tivessem sido formalizados os conceitos de arranjo, permutação e combinação, mas que tinham por objetivo a sua introdução. No fim da sequência de tarefas pretendia-se que os alunos fossem capazes de compreender, relacionar e distinguir as operações, aplicando-as na resolução de problemas combinatórios, mas também de manipular as fórmulas combinatórias.

Apresentamos aqui a tarefa "Uma taça de gelado" (figura 1), proposta aos alunos na segunda aula da sequência. Nesta aula, os alunos apenas conheciam o conceito de fatorial. Para a sequência de tarefas proposta na segunda aula, foram selecionadas duas tarefas envolvendo cada uma das operações combinatórias (permutação, arranjo simples, combinação e arranjo completo). Depois da resolução das tarefas, foi pedido que os alunos as agrupassem de acordo com o critério que considerassem adequado. O propósito desta atividade, foi levar os alunos a encontrar relações entre as várias tarefas, dando ênfase às suas semelhanças e diferenças. Após a construção das categorias, os alunos explicaram e justificaram as associações que fizeram, caracterizando cada um dos grupos formados.

Tarefa: Uma taça de gelado

Numa gelataria há seis sabores diferentes de gelado, sendo dois de fruta (framboesa, banana e pistachio) e ainda os sabores a chocolate, menta e nata,
De quantas maneiras é possível escolher uma taça com dois sabores diferentes?

Figura 1. Enunciado da tarefa "Uma taça de gelado"

A tarefa apresentada envolvia o conceito de combinação, que ainda não tinha sido trabalhado. Assim, esperava-se que os alunos a resolvessem recorrendo a representações como esquemas, tabelas, diagramas, listas, ou outras, de modo a obterem o conjunto de resultados e compreenderem o que estava a ser contado. A tarefa "Uma taça de gelado" é particularmente rica para a promoção de diversas representações matemáticas.

As aulas da experiência de ensino foram lecionadas pelas professoras que participaram no estudo de aula. Na experiência de ensino foi proposta uma organização das aulas em três fases. Em todas as aulas houve um momento de lançamento das tarefas, seguido do trabalho autónomo dos alunos, que se realizou em grupos, terminando com a discussão coletiva e a síntese final.

Expomos, em seguida, algumas das resoluções de alunos de duas turmas do 12.º ano a esta tarefa. Na figura 2 apresentamos a resolução do Manuel. O aluno opta por escrever o conjunto de todos os resultados possíveis. Tal como é referido por vários autores (por exemplo, Lockwood, 2014), na resolução de problemas de contagem, os alunos devem começar por enumerar alguns resultados, para que compreendam a estrutura do problema e o que lhes é pedido. A orientação para o conjunto de resultados pode ajudar os alunos a encontrar formas significativas de compreender os problemas e de fundamentar os seus processos de contagem. Nesta situação, o conjunto de resultados não é grande e, talvez por isso, o aluno não sentiu necessidade de utilizar outro processo de contagem, limitando-se a apresentar o seguinte esquema e daí concluir de imediato o número total de opções de gelados com dois sabores. Repare-se que o aluno percebeu que, por exemplo, ao considerar os sabores (F, B) já não necessitava de indicar a opção (B, F), por se tratar do mesmo gelado.

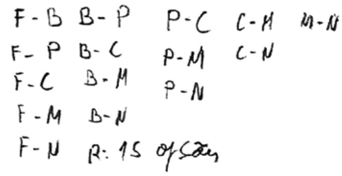


Figura 2. Resolução de Manuel da tarefa "Uma taça de gelado"

Por seu lado, Cátia recorreu a um diagrama em árvore para identificar todas as combinações possíveis de gelados com dois sabores (figura 3). A imagem que esta representação lhe oferece, permite perceber que alguns dos resultados são repetidos e que por essa razão não devem ser contados. Como se pode ver, Cátia assinala com um x os resultados repetidos e conclui que existem 15 maneiras diferentes de escolher dois sabores de gelado.

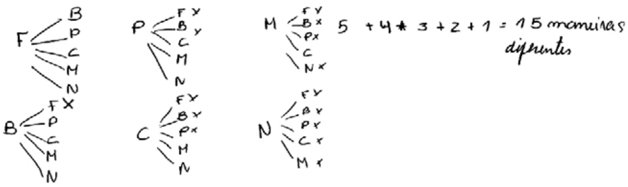


Figura 3. Resolução de Cátia da tarefa "Uma taça de gelado"

Na sua resolução, Fátima recorre a uma representação semelhante a um diagrama de árvore (figura 4). Esta aluna, apresenta um esquema que ilustra as diferentes combinações possíveis, de dois sabores, primeiro escolhendo de entre os três sabores de fruta, depois entre os três sabores que não são de fruta e finalmente juntou um sabor de fruta com um dos outros sabores. O processo de contagem utilizado por Fátima origina uma expressão diferente da obtida por Cátia, bem como uma organização distinta do respetivo conjunto de resultados. A representação utilizada pela aluna para o conjunto de resultados serviu para fundamentar o seu raciocínio e ajudou a perceber que o processo de contagem estava correto.

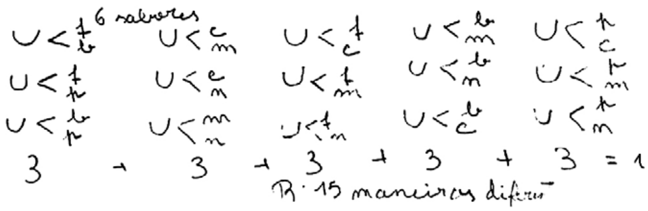


Figura 4. Resolução de Fátima da tarefa "Uma taça de gelado"

As situações combinatórias prestam-se a uma grande variedade de abordagens de resolução e de representações. Isabel recorreu a uma tabela de dupla entrada para representar os seis sabores e vai organizando os sabores dois a dois, como é sugerido (figura 5). A aluna interpretou corretamente o enunciado do problema e tem o cuidado de excluir os resultados que são repetidos. Mostra compreender claramente que não é possível escolher dois sabores iguais para colocar na taça e que alterar a ordem pela qual se escolhem os sabores não altera a constituição da taça, isto é, não altera o resultado. Assim, Isabel não preenche a diagonal da tabela nem uma das suas metades.

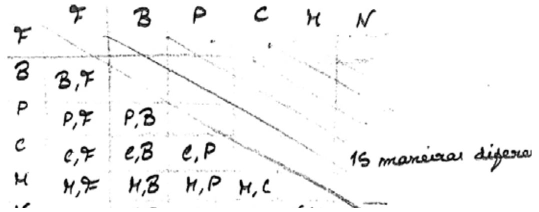


Figura 5. Resolução de Isabel da tarefa "Uma taça de gelado"

Finalmente, na figura 6, apresentamos a resolução de Joaquim. O aluno recorre a representações simbólicas e verbais. As simbólicas envolveram apenas representações numéricas e os símbolos de operações de multiplicação e divisão, suportadas por representações em linguagem natural que serviram para expressar o seu raciocínio. Esta forma simples de representação conduziu ao resultado correto e à compreensão do que era solicitado no problema, sem ser necessário recorrer a representações simbólicas mais sofisticadas, presentes nas operações combinatórias. As representações verbais expressas em linguagem natural parecem ser muito importantes para este aluno.

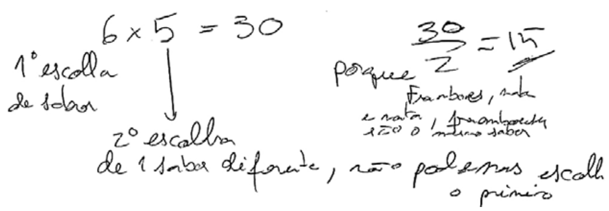


Figura 6. Resolução de Joaquim da tarefa "Uma taça de gelado"

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de representações matemáticas diversificadas e o estabelecimento de conexões entre estas, permite aprofundar a compreensão dos conceitos e procedimentos, assim como comunicar os raciocínio na resolução de problemas (NCTM, 2014).

Na resolução da tarefa "Uma taça de gelado", os alunos recorreram a diferentes representações matemáticas como veículo para comunicar e expressar o seu raciocínio. Tal como é destacado pelo NCTM (2014) "as representações incorporam características importantes das estruturas mentais e ações matemáticas, tais como o desenho de diagramas e o uso de palavras para mostrar e explicar o significado de fração, razão ou multiplicação" (p. 24). Os alunos, ao aprenderem a representar, explicar e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas revelam uma verdadeira compreensão do problema.

Durante a monitorização do trabalho dos alunos, as professoras sequenciaram algumas resoluções para o momento da discussão coletiva, garantindo que as diferentes representações eram apresentadas e que os objetivos para a discussão eram atingidos. Realizou-se uma reflexão sobre as principais vantagens e desvantagens de cada uma das representações na resolução de um problema de contagem: a tabela de dupla entrada, por exemplo, não poderia ser utilizada se a taça de gelado fosse composta por três sabores diferentes, a listagem sistemática não é prática quando o conjunto de resultados é muito grande, e ainda, o facto de a expressão matemática não permitir visualizar os resultados da experiência. As professoras valorizaram os diferentes tipos de representação, não privilegiando um tipo em detrimento dos outros. A complementaridade entre as diversas representações, de natureza formal e informal, bem como as conexões que se podem estabelecer entre elas, podem conduzir a uma boa compreensão do que está a ser contado.

Envolver os alunos no processo de construção das fórmulas das operações combinatórias conduziu a uma compreensão profunda do seu significado e da forma como funcionam e como são aplicadas na resolução das tarefas de contagem. Verificou-se que os alunos foram capazes de relacionar as operações combinatórias, identificando semelhanças e diferenças entre elas, refletiram sobre os padrões e as relações matemáticas existentes, compreendendo quando e porquê cada uma das operações deve ser utilizada.

Na forma como habitualmente a combinatória é trabalhada em sala de aula, o professor começa por apresentar a sua perspetiva, normalmente através da representação da expressão simbólica das combinações, que os alunos, posteriormente, aplicam na resolução de exercícios e problemas. No entanto, as diferentes representações produzidas pelos alunos mostram como é possível olhar para um conceito através de "uma variedade de lentes, com cada lente a proporcionar uma perspetiva diferente que torna a imagem (conceito) mais rica e mais aprofundada" (Tripathi, 2008, p. 439). Salienta-se assim a importância de um trabalho, em sala de aula, que permita aos alunos chegarem por eles próprios aos conceitos antes de lhes serem ensinadas as fórmulas.

Referências

Batanero C., Navarro-Pelayo V., & Godino J. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *Assessment challenge in statistics education* (pp. 239–252). IOS Press.

English, L.D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Springer.

Lockwood, E. (2014). A set-oriented perspective on solving counting problems. *For the Learning of Mathematics, 34*(2), 31–37.

NCTM (2014). P*rinciples to actions: Ensuring mathematical success for all.* NCTM.

Sriraman, B., & English, L. D. (2004). Combinatorial mathematics: research into practice. *The Mathematics Teacher, 98*(3), 182–191.

Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445. http://www.jstor.org/stable/41182592

Mónica Valadão
EBS Tomás de Borba, Angra do Heroísmo, Açores
Nélia Amado
FCT, Universidade do Algarve & UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

A Representação nos "Princípios e Normas para a Matemática Escolar"

O livro "Princípios e Normas para a Matemática Escolar" (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007) apresenta um conjunto de recomendações fundamentadas na crença de que todos os alunos podem e devem aprender matemática com compreensão. Os capítulos que incidem nas normas para a matemática escolar (com um capítulo geral e com quatro capítulos mais específicos para cada um dos grupos de anos de escolaridade do sistema educativo referido: anos pré-escolar-2.º, anos 3.º-5.º, anos 6.º-8.º, anos 9.º-12.º) incluem uma secção denominada "Representação", um dos cinco "processos matemáticos" (ou capacidades matemáticas) considerados, "sendo-lhe dedicada uma Norma por inteiro, o que não acontecia anteriormente" (p. x).

A sistematização que aqui expomos incide, principalmente, no capítulo "Normas para a matemática escolar: do pré-escolar ao 12.º ano".

Começamos por indicar as três ideias-chave destacadas na introdução das normas estabelecidas pelo NCTM para a Representação (p. 75):

1. Quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente.
2. O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado — por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma. O termo é também aplicável tanto aos processos e resultados observáveis externamente, como aos que ocorrem "internamente", nas mentes dos indivíduos quando fazem matemática.
3. As representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação. Assinala-se, ainda, que novas formas de representação, associadas às tecnologias, vieram criar uma necessidade ainda maior de enfatizar esta capacidade matemática, no ensino.

Especificamente, são também três as "Normas para a Representação" (p. 75) que os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos, a saber:

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

Passamos, de seguida, a destacar ideias desenvolvidas no documento e associadas a cada um destes três objetivos, que consideramos relevantes e representativas da compreensão que, na altura, havia sobre esta capacidade matemática.

1. **Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas (pp. 75-77)**

Nesta norma, sobressai a importância de os alunos compreenderem que "as representações escritas das ideias matemáticas constituem uma componente essencial da aprendizagem e da produção de matemática". Qual deverá ser o papel do professor para que tal se realize? É, pois, assinalado ser determinante que o professor encoraje os alunos a representar as suas ideias utilizando as formas de representação que lhes fazem sentido. Estas são representações não convencionais. Não se pretende desta forma desvalorizar as convencionais, dado que estas representações irão facilitar a aprendizagem da matemática pelos alunos e a comunicação das suas ideias matemáticas com outros. É essencial não esquecer que as representações são ferramentas eficazes, relevando desta feita o trabalho que é necessário fazer para as desenvolver e compreender. Neste âmbito, um exemplo adiantado incide na notação no sistema decimal. É assumido ser este um assunto difícil para as crianças mais novas, pelo que "o currículo deverá proporcionar várias oportunidades para o estabelecimento de conexões entre a compreensão emergente dos números que os alunos utilizam na contagem e a estrutura da sua representação no sistema decimal". É a este respeito assinalado que "à medida que os alunos avançam no currículo, a ênfase tende a mudar, progressivamente, para as formas de apresentação da própria matemática". Este facto talvez seja baseado, segundo o documento em análise, no pressuposto que os alunos com idade para pensarem em termos formais já não necessitam de "negociar entre as suas conceções ingénuas e os formalismos matemáticos".

De qualquer forma, é visível um alerta para a necessidade de os alunos de todos os níveis de educação e ensino "desenvolver a sua compreensão das ideias mais complexas apreendidas nas representações convencionais", como, por exemplo, a da variável x que, parecendo tão clara, é uma "noção de difícil compreensão para os alunos". Assim, é colocada a tónica na importância das "representações idiossincráticas construídas pelos alunos", quando envolvidos na resolução de problemas ou em investigações matemáticas, ajudando-os na compreensão das ideias matemáticas, mas também em formas significativas de registo de um método de resolução e na sua descrição aos outros. Quando o professor observa representações dos seus alunos pode aceder "aos modos de interpretação e de raciocínio dos alunos", assim como pode "estabelecer ligações entre as representações pessoais dos seus alunos e representações mais convencionais". Neste documento, é reforçada a ideia de proporcionar aos alunos oportunidades para "aprender formas de representação convencionais" e igualmente para "criar, aperfeiçoar e utilizar as suas próprias representações". Qualquer uma destas formas funciona como uma ferramenta importante de suporte à aprendizagem e à produção de matemática.

A especificidade feita por ciclos de escolaridade é sobretudo colocada na utilização de objetos a nível do 1.º ciclo, podendo servir para representar "o número de rodas de quatro bicicletas ou o número de pirilampos de uma história", exemplos dados neste documento. O recurso a grelhas de valor de posição, ou a materiais manipuláveis, como "os ábacos ou material multibásico de base dez", são também apontados para a representação de um número maior de objetos. Já no respeitante aos 2.º e 3.º ciclos, é adiantado que as representações matemáticas são muito mais direcionadas para objetos e ações diretamente relacionados com a sua experiência. Nestes ciclos de ensino, os alunos poderão "começar a criar e a usar representações matemáticas de "entes" mais abstratos", como os números racionais. Quanto aos alunos do ensino secundário é explicitada a utilização das representações convencionais como "uma forma privilegiada para expressar e compreender conceitos matemáticos mais abstratos", sendo referido que, através das suas representações, os alunos "deverão ser capazes de ver uma estrutura comum nos fenómenos matemáticos provenientes de uma variedade de contextos".

Outra ideia de destaque prende-se com a constatação que "as representações matemáticas ajudam o aluno a organizar o seu raciocínio", pois permitem "tornar as ideias matemáticas mais concretas" e também mais "acessíveis à reflexão". Se no pré-escolar e 1.º ciclo, a utilização das representações pelos alunos pode fornecer aos professores e aos colegas "um registo dos seus esforços para compreenderem a matemática", nos ciclos seguintes o seu uso terá uma maior relevância na resolução de problemas ou "para enquadrar, esclarecer ou expandir uma ideia matemática". Sobre este aspeto, expomos alguns dos exemplos adiantados: (i) "recolha de uma grande quantidade de dados, no decurso de uma atividade experimental sobre as condições atmosféricas, durante um largo período de tempo", com a utilização de "uma folha de cálculo e gráficos para organizarem e representarem esses dados"; (ii) "utilização dos computadores e das calculadoras", mudando "o que os alunos podem realizar com representações convencionais" e ampliando "o conjunto de representações com as quais podem trabalhar". Por exemplo, a utilização de programas de geometria dinâmica ou de gráficos, permite-lhes "rodar, inverter, esticar e ampliar os seus gráficos", o recurso a sistemas algébricos computacionais possibilita-lhes "manipular expressões", e o uso de folhas de cálculo pode levá-los a "investigar conjuntos complexos de dados". A reflexão sobre a utilização das tecnologias é também um meio de reflexão sobre as diferenças entre as representações que estas possibilitam e as representações convencionais.

2. Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas (pp. 77-79)

Uma ideia forte nesta norma é a valorização da diversidade de representações, realçando que "representações distintas focam, geralmente, aspetos diferentes de relações ou conceitos complexos". Atenda-se, por exemplo, ao conceito de fração. Os alunos podem aprender a representar frações como "setores de um círculo ou como partes de um retângulo ou de outras figuras" ou através de "representações físicas como placas divididas em partes, barras fracionadas e outros materiais", reforçando a interpretação de fração como relação parte-todo. Embora útil, este tipo de representação não realça outras interpretações ou significados do conceito de fração, "como razão, divisão indicada, ou a fração enquanto representação de um número". Outras representações associadas às frações, tais como "pontos numa reta numérica ou razões entre elementos discretos num conjunto", fazem sobressair outros aspetos relativos ao complexo conceito de fração. Por isso, para que desenvolvam conhecimentos aprofundados sobre frações, os alunos necessitam de recorrer a "uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão".

A importância da utilização de múltiplas representações deverá, então, ser privilegiada ao longo da escolaridade. Alunos do 1.º ciclo deverão saber como "representar três grupos de quatro através da adição repetida, da contagem por intervalos ou de uma disposição de objetos", começando a entender que algumas representações tornam "mais fácil a compreensão de algumas propriedades". Por exemplo, utilizando a disposição retangular "o professor pode tornar visível a propriedade comutativa" da multiplicação. Nos 2.º e 3.º ciclos, os alunos vão ampliando o conjunto de representações que possuem, incluindo "figuras, tabelas, gráficos e palavras mais complexas para modelar problemas e situações", e desenvolvem "um repertório cada vez mais alargado de representações matemáticas, bem como um conhecimento de como as utilizar de forma eficiente" no sentido de saber escolher e justificar o tipo de representação mais apropriada à situação.

Nesta perspetiva, é essencial que os alunos de todos os níveis de educação e ensino "reflitam sobre o uso que fazem de representações, de modo a desenvolverem uma compreensão dos pontos fortes e fracos de várias representações com objetivos diferentes". Por exemplo, ao aprender sobre diferentes formas de representação de dados estatísticos, os alunos precisam de "oportunidades para identificar o tipo de dados e questões" em que o recurso a um gráfico circular é mais adequado do que a um gráfico de linhas", ou que o uso de um diagrama de extremos e quartis se revela mais apropriado do que um histograma.

3. Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (pp. 79-80)

O documento discute diferentes significados do termo "modelo", associando-o a "modelos manipuláveis", a exemplificação ou simulação, e, ainda, a "um [termo] sinónimo aproximado de representação". Assume o termo "modelo matemático" como "uma representação matemática dos elementos e relações presentes numa versão idealizada de um fenómeno complexo", podendo ser utilizado para "esclarecer e interpretar fenómenos e para resolver problemas" e permitindo "uma visualização de um fenómeno real". Como uma ilustração de os modelos proporcionarem uma visualização de um fenómeno real é referido o caso de um estudo sobre o "fluxo do tráfego". "Por quanto tempo deverá um semáforo manter-se verde, de modo a permitir que uma quantidade razoável de automóveis atravesse o cruzamento?" pode ser uma questão a explorar pelos alunos. Poderão fazer uma recolha de dados na realidade sobre "o tempo (médio) que o primeiro carro demora a atravessar o cruzamento, o segundo carro, etc.". Poderão elaborar uma representação estatística desses dados ou estabelecer "funções analíticas para abordarem o problema no abstrato", tendo em conta o tempo de espera de um carro para avançar, o tempo de demora de um carro "a atingir a velocidade média dos restantes carros em andamento", etc.

O uso apropriado pelos alunos dos diversos tipos de representações, para "modelar fenómenos físicos, sociais e matemáticos", deverá reforçar-se à medida que a sua escolaridade avança. O documento vai apresentando algumas situações que exemplificam este reforço. Por exemplo, os alunos mais novos podem "modelar a distribuição de 24 bolachas por 8 crianças, utilizando sólidos ou blocos organizados de formas diversas", fazendo apelo ao uso de materiais concretos e manipuláveis. Depois os alunos utilizam as representações para "modelarem fenómenos do mundo circundante e para identificarem padrões quantitativos" e, em continuidade, para modelarem e resolverem "problemas inseridos em contextos quer do mundo real, quer puramente matemáticos", evoluindo para a utilização de "variáveis na representação de valores desconhecidos" e de "equações, tabelas e gráficos na representação e análise de relações". Já os alunos do secundário podem criar e interpretar "modelos de fenómenos delineados a partir de uma maior diversidade de contextos — incluindo os ambientes físico e social", identificando "elementos essenciais dos contextos" e recorrendo a "representações que captem as relações matemáticas existentes entre esses elementos". Nestes casos, o aproveitamento das "tecnologias eletrónicas" disponíveis é fundamental por possibilitarem aos alunos o "acesso a modelos, que podem ser utilizados na análise de uma vasta gama de situações realistas e interessantes", tornando-as mais significativas para todos. Por exemplo, os métodos numéricos iterativos "podem ser usados para desenvolver um conceito intuitivo de limite e das suas aplicações" ou o comportamento assimptótico das funções pode ser "apreendido mais facilmente por meio de gráficos, assim como os efeitos das transformações nas funções".

A concluir, apresentamos uma panorâmica sucinta e global dos quatro capítulos mais específicos de cada um dos grupos do sistema educativo considerado, mencionando aspetos relacionados quer com o desenvolvimento da representação ao longo da escolaridade na perspetiva dos alunos quer com ações genéricas do professor para potenciar esse desenvolvimento.

Os alunos mais novos "representam os seus pensamentos e os seus conhecimentos sobre ideias matemáticas através da linguagem verbal oral e escrita, através de gestos, desenhos e de símbolos inventados e convencionais" (p. 160). Avançando na sua escolaridade básica, e para modelar situações problemáticas, os alunos utilizam "quer modelos externos — modelos que eles possam construir, modificar e analisar — quer imagens mentais". Recorrem a "representações informais, tais como desenhos, para realçar as diversas características dos problemas", e utilizam "modelos físicos para representar e compreender noções, tais como a multiplicação e o valor posicional" da numeração. Na resolução dos problemas aprendem, igualmente, a "usar equações, tabelas e gráficos" (p. 240). Próximo do final da escolaridade básica, os alunos desenvolvem e aprofundam conceitos e relações matemáticas com recurso a representações múltiplas e diversificadas, como "objetos físicos, desenhos, tabelas, gráficos e símbolos". Identificam e usam diferentes formas de representação para "frações, números decimais, percentagens e números inteiros" e usam uma "variedade de ferramentas gráficas para representação e análise de conjuntos de dados" (p. 332). Já no secundário, mais competentes matematicamente, os alunos desenvolvem um "repertório cada vez maior de representações matemáticas e o de como as usar de forma produtiva" (p. 422), reconhecendo melhor "que diferentes representações sustentam diferentes formas de pensar e manipular os objetos matemáticos" (p. 423).

Nesta perspetiva, especialmente nos anos iniciais, uma das principais responsabilidades do professor na abordagem da representação consiste na criação de "um ambiente de aprendizagem no qual a utilização, por parte dos alunos, de diversas representações seja encorajada, apoiada e aceite pelos seus colegas e pelos adultos" (p. 163). Para isso, deve estimular "os alunos a utilizarem uma multiplicidade de representações", ajudá-los a "associar as suas linguagens à linguagem convencional da matemática" (p. 160) e a atribuir "significado a formas de representação importantes" (p. 337).

Referência:

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Associação de Professores de Matemática. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Cristina Martins

Manuel Vara Pires

Centro de Investigação em Educação Básica, Instituto Politécnico de Bragança

HENRIQUE GUIMARÃES

Nasci em 1951, em 5 de Outubro, na Póvoa de Varzim.

Póvoa do Mar era como então, e ainda hoje é conhecida e mesmo chamada pelas gentes de lá, e por outras também. Póvoa do Mar, como se o Mar fosse dela pertencente, e ela pertença do Mar.

Sim, deu-me o Mar a Póvoa a conhecer, primeiro ao longe, até ao longínquo horizonte azul cerrado de água lisa, depois bem perto, na água transparente e brilhante, que salpicava fria dos baldes de lata, e escorria nas nossas pernas, ao transportá-los cheios com água da beirinha do mar, até os pousarmos junto à barraca alugada.

Enchíamos os baldes de que me lembro alguns, com as suas cores garridas —amarelo, verde, vermelho, e alguns desenhos quase sempre a preto — trazerem as latas de conserva 'estampadas' — sinal da matéria da sua confecção original que se foi perdendo até chegar ao plástico e outros materiais.

Assim era até ao local da 'pocinha', ou poça grande que fosse, cavada por mim e pela minha gémea irmã e certamente com ajuda extra de outros amigos veraneantes. Gostávamos muito destes baldes e outros apetrechos que também usávamos— formas para bolos de areia, pás e pazinhas, todas em cabo em madeira.

Lançava-se a água na areia e conforme o balde e a poça, às vezes ainda dava para 'chapinhar' ficávamos com alguma areia molhada, para bolos e pouco mais.

Lisboa, Fevereiro, 2022

A morte desconta-se vivendo[1]

Fátima Alonso Guimarães

Num tempo em que a morte é varrida para debaixo do tapete e que só com um suave bater de asas, ao nosso ouvido se revela, um dia ali a temos, à nossa frente, materializada em alguém que amamos e habitou a nossa casa: o meu irmão Henrique morreu! Rodeada de escombros, neste mundo que me é agora desconhecido, procuro habitar este lugar vazio. E aqui estou eu, levada ao local de perda e desolação para trazer de volta momentos de percursos de vida partilhados, tantas vezes revisitados e sentidos como um eterno instante. As recordações surgem em catadupa e ficam agora palavras suas e minhas, confundindo-se.

DIAS AZUIS

Fixo-me nas fotografias de família, ali na prateleira em frente, registos de memórias diluídas que, apesar de tudo, permitem evocar o fluído de vida partilhada que vem de longe. Com a primeira, recuo a mais de 60 anos, à infância, a Moçambique, ao quintal da casa da aldeia onde vivemos. Vejo, atrás, o seu rosto de criança, sorridente, descontraído, entre amigos, irmãos e o cão Piloto, seu companheiro de passeios perfeitos. Podia ser uma daquelas longas e luminosas manhãs em que brincava na rua, deambulando por entre árvores cintilantes e cantando a Canção da rola a chorar pelos filhos: "Mb'sala uan vo teca, imbili uaslhanga, uaslhela, to to too too to... (Os meus filhos crescem, vocês tiram-mos, o meu coração chora e bate to to too too to….)." Vem-me à memória aqueles dias azuis, quentes, completos, de sons fortes e cheiros intensos que alertam para uma biologia exuberante sempre a trabalhar, gerar, multiplicar. Dias do amanhecer de ouro onde a vastidão e nobreza da estepe africana lhe trouxeram a experiência inigualável de liberdade, grandeza e beleza. Vem-me à memória as inesquecíveis e arrebatadoras aventuras cavalgadas no Condor e Cavaleiro Andante, em Emilio Salgari, nos livros dos Cinco, na A Maravilhosa Viagem de Nils Holgerson e tantos mais. E também as noites de deslumbramento, das memoráveis e mágicas sessões de cinema ao ar livre, com projecção feita num lençol e assentos trazidos de casa, em que o tempo parava com Buster Keaton, Fernandel ou Tati. Estas experiências singulares, iniciais e primeiras foram determinantes para o fascínio e prazer que da leitura e do cinema para sempre retiraria.

A continuação dos estudos obrigou ao afastamento do lar e do aconchego da mãe natureza que fez com que esta infância quimérica acabasse cedo: "com os meus pais e irmão longe, na aldeia da criança de mim, e eu, com a minha irmã, estávamos no liceu, em Lourenço Marques, deixado para ser aluno". Sucederam-se anos tristes, intermináveis meses, em que esperava ansiosamente as férias, o regresso a casa e a espaços de liberdade. O escape procurava-o nos livros de Júlio Verne ou da colecção Quer saber...?, na Alice no País das Maravilhas, O Homem Invisível ou nos Pioneiros Americanos.

Sempre bom aluno, das recordações do liceu guarda a do professor de História, o seu humor e saber, e o deslumbramento com que seguia a história das civilizações romana e grega e, principalmente, as suas mitologias. Tantas vezes lhe ouvi que a leitura da Ilíada para Jovens, de Platão e dos clássicos, a ele o devia. Nos últimos anos do liceu os nossos pais mudam-se para a cidade. O regresso a casa traz consigo o sol e, sem televisão, a leitura constitui a evasão ideal. A sua curiosidade de leitor crescia agora com os livros de Alexandre Dumas, Vítor Hugo, Charles Dickens, Cervantes e outros da Livraria Lello.

Regresso às fotos. Esta outra é do fim dos anos 60. E ali está ele, jovem adulto universitário, com amigos que apesar da sua errância ficaram para a vida. Nestes anos frequenta com regularidade o cineclube, descobrindo os filmes de realizadores de culto, não disponíveis nas salas de cinema da cidade, para ir mais além do que a escola podia dar. O gosto pelo cinema que o acompanhou ao longo da vida, situa-o aí, tal como pela fotografia: "A seguir ao cinema, foi com a fotografia que aprendi a ver". Adquire a sua primeira máquina fotográfica e frequenta cursos de fotografia onde descobre a obra de alguns dos grandes

[1] Este texto foi composto com elementos de memórias e escritos de HMG, sempre que possível com palavras que escolheu a cada circunstância, e de fumos, assinalados, de textos de G. Steiner, H. Michaux, I. Vallejo, J. Tolentino de Mendonça, M. António Pina, O. Sacks, Patti Smith, R. Caeiro, R. Riemen. As palavras do título são de G. Ungaretti e as dos subtítulos Dias azuis, Sob céus estranhos e Luz da noite são respectivamente de Doc. António Machado, I. Losa e P. Citati.

desta arte como Cartier-Bresson, J. Benoliel ou F. Capa. Começa a fotografar e ficará definitivamente cativo deste gesto de registo visual, um complemento de memória das suas anotações em caderninhos e blocos que para todo o lado o acompanham. Uns anos mais tarde, já em Lisboa, monta um espaço de revelação e alarga esse seu mundo com a frequência assídua da Galeria Ether e dos encontros anuais de Braga e de Coimbra que lhe deram a conhecer a obra de fotógrafos de eleição.

A vida na cidade decorria com aparente normalidade, contudo pairava no ar uma agitação geral e estranha. Em casa a situação política era calada ou abordada em falas ciciadas. Na Associação Académica começavam as perseguições e a mobilização compulsiva dos dirigentes associativos que se faziam ouvir contra a guerra colonial. É o tempo em que o Henrique "reconhece em si um certo número de resistências, perplexidades e mal-estar". Lembro-me bem de ele chegar a casa vindo das aulas e permanecer durante largos períodos na cama de olhos fechados a cofiar a barba. Falava pouco, dormia mal, pesavam-lhe os cada vez maiores constrangimentos e confrontos familiares. Decide cortar amarras, desagarrar-se "da terra em que passei a infância e a juventude até aos vinte anos, e a que certamente muito devo aquilo que sou". Precisa da sua independência e resolve deixar Moçambique para prosseguir o curso no Instituto Superior Técnico. A sua vida ainda mal começara.

SOB CÉUS ESTRANHOS

Tinha chegado à cidade de outros céus tornada sua até ao fim da vida. Lisboa, cidade branca, desmazelada e pobre, das ruas estreitas, das tascas com matraquilhos, das manhãs de bom acordar, que o Henrique, jovem adulto inquieto, curioso, irá calcorrear à sua descoberta.

Com o agravamento da situação política a família parte definitivamente rumo à Metrópole. A alegria do reencontro não permanece, porém, por muito tempo. A greve de estudantes está para durar e, com o nosso envolvimento nas lutas estudantis, começam a surgir tensões em casa que sensatamente os nossos pais contornam, indo viver para a Póvoa de Varzim. Quanto a nós, passaríamos a morar numa república estudantil, aprendendo a viver em comunidade e o que isso implica em termos de partilha, independência e respeito pelo outro. A fotografia que agora me prende o olhar é destes tempos, na manifestação do 1.º de Maio de 1975, nos tempos conturbados e instáveis do PREC. À noite, em casa, lá falaríamos sobre eles ou sobre outra coisa qualquer pois tudo servia de pretexto para discussões e divagações. Nas horas livres, o Henrique envolve-se no debate político, participa em dinamizações culturais, integrando o Grupo de Teatro 4 Tábuas, teatro amador da Comuna, de que também faz parte a sua futura mulher. O presente era risonho e o futuro promissor.

E assim se vai fazendo homem, em tempos de tudo fazer epifanias, em dias sem fim onde na poesia, por instinto, se apercebe do que, verdadeiramente, tem a ver com ele. Com vinte e poucos anos, experimenta o abalo da leitura de Paul Valéry, Baudelaire, Rimbaud ou Lautréamont que o conduziram a A. Breton e a outros escritores surrealistas. Paul Éluard, o 'poeta total', é de entre todos o eleito, pelos seus poemas que "como de nenhum, ficavam a ruminar dentro de mim". Todos eles, preconizando a libertação do Homem, apelando à poesia e ao sonho, foram referências indeléveis. Outros havia também que trazia para dentro de casa e que o Henrique dizia, seguindo Steiner, darem 'vida à linguagem', como Herberto Hélder ou os "seus poetas da Consolação", Rui Belo, Joaquim M. Magalhães e João M. F. Jorge. Uma década mais tarde, descobre M. Tsvétaieva, A. Akhmátova e, principalmente, Paul Celan, seu suporte e companheiro de meditação até ao fim da vida, cujos poemas, como dizia uma vez mais com Steiner, 'são cantos esplendorosos' que releu, anotou, parafraseou.

FAZER O CAMINHO, CAMINHANDO

O adulto que se fez ouvia cada vez mais clara 'a linguagem dos grandes Imóveis'. Preocupava-se em fixar os olhos, que tinha voltados para os sonhos, naquelas rochas ali 'à sua esquerda, do lado fraco, do coração'. Constituiu família, foi e fez-se pai. No exigente e gratificante exercício da paternidade, o Henrique percorreu caminhos de amor, mas também de dúvidas, medos e tempestades. Vibrou com sucessos, segurou falhanços e consolou tristezas dos seus dois filhos, André e Daniel, que tanto amava.

A articulação da família com a profissão não foi tarefa fácil. Com a docência no ensino superior a partir de 1985, muitas horas do seu dia eram ocupadas na preparação das aulas, mas também na correcção de trabalhos e na avaliação dos alunos, tarefas que "não gostava mesmo nada, cada vez mais gostava menos, e muitas vezes eram, realmente, um sacrifício". Valia-lhe a imensa satisfação que retirava da profissão: "por boa sorte, ou privilégio, gostava de dar aulas". "Dar? Gostava do frente-a-frente que as minhas aulas, em regra, me proporcionavam e do que, como um desafio, muitas vezes me exigiam", "despertar nos alunos um não sei quê, o gosto e interesse pelo que tinham em mãos para fazer, e em o fazer bem feito, por si próprios, entre eles, ou comigo". Valia-lhe o entusiasmo e a militância com que se entregava a causas que a sua consciência cívica e o seu humanismo lhe ditavam e a que, até morrer, se dedicou de alma e coração. A APM, uma casa que fez sua e que ajudaria a fundar, crescer e consolidar, foi uma delas. Uma casa que queria dos professores, com os professores, para os professores.

Ao fechar do milénio a morte do nosso pai, com quem sempre mantivera uma ligação profunda, e problemas irresolúveis de instabilidade familiar fizeram precipitar uma forte crise interior. Desviando-se do vazio, mas desarrumado pelo novo real, demorou tempo excessivo até à retoma da sua marcha. Indiferente ao ruído e aos ventos que não corriam de feição, o trabalho aperta e o sofrimento cresce pela falta de tempo também para os outros interesses e paixões: "Quantas vezes não sonhei estar noutro sítio, ser outra pessoa".

Os anos que se seguiram, para além do crescente envolvimento na profissão, foram particularmente orientados para a valorização profissional e sempre para o crescimento pessoal. Na vida académica prepara o doutoramento, participa em projectos de investigação, publica artigos, organiza e realiza conferências e comunicações em congressos e encontros dentro e fora do país que o levam a conhecer pessoas e a viajar.

Nas viagens procura recompor-se do excesso de constrangimentos, da fadiga e da rotina do quotidiano. Não o move a aventura mas antes a exploração de espaços, buscando sensações de verdadeira experiência sensorial que sabia detectar como ninguém. No seu vaguear, qual flâneur, deixando-se levar pela criatividade, passeia pela história dos locais e de quem os habita, registando as imagens e fixando as memórias. Outras visitas que organiza relacionam-se com os livros que leu. Assim foi com o poeta Taras Shevchenko e as viagens à Ucrânia — onde o vemos nesta outra fotografia com a Lurdes, sua companheira. Assim foi, igualmente, com o Manifesto do Surrealismo e a viagem a Paris. São caminhos 'da vida mais que da superfície da terra' onde a necessidade de reter os instantes esteve sempre presente, constituindo a origem do seu enorme arquivo fotográfico que, pela sua excelente qualidade, tornou possível a realização de várias exposições em Portugal, França e Ucrânia.

A partir de 2008, sentindo-se cada vez mais assoberbado, a situação agrava-se pela ocupação com a nossa mãe que passa a viver alguns meses do ano em sua casa. Náufrago da sua própria sensibilidade, é com este sentimento que tem de trabalhar, num terreno de poucos sorrisos, incómodo e com um ritmo, demasiado acelerado, cada vez mais desajustado à sua forma de ser: Arrumado, meticuloso, não condescendia distrair-se de fazer bem o que tinha de fazer, um fazer cuidadosamente pensado e ponderadamente decido. De ser crítico, diferenciar o bom do melhor, valorizar o novo e o difícil, com um sentido de responsabilidade não poucas vezes tomado por pretensioso e elitista.

Com Lurdes Figueiral, em Dnipro (Ucrânia), agosto de 2016

Homem sem Deus, não resignado a limitar-se a cumprir a vida, é no Homem e na Arte que procura a continuidade do sagrado. As paredes da sua casa vão-se enchendo com fotografia, Arte Africana e pintura, 'criando uma convivência única entre as peças', como referiu a artista Maria Capelo quando ele a visitou no seu atelier, um hábito seu nos pintores cujas obras escolhia para habitar com ele. Não menos seminal no caminho da sua própria humanidade é a música. A partir de 2005, os concertos da Temporada de Música da F. C. Gulbenkian passaram a fazer parte das opções para as suas noites. Especialmente nestes anos sombrios, a música foi para ele indispensável e capital. Os seus dias mais felizes eram os de concerto, sempre que o estado físico lhe permitia ir. Lembro-me de dizer, em Março, enquanto aguardávamos o início daquele que foi o seu último concerto, "Se não tivesse tido a música, principalmente nesta fase, seriam muito mais difíceis os meus dias."

A LUZ DA NOITE

O luto é lamento, privação e ausência, mas também evocação, narrativa escrita ou falada. E, mesmo sabendo que 'sobra sempre vida à história que contamos dela', vencendo o silêncio, na recordação é preciso voltar a 'eleger a elegia'.

Estávamos em 2015, quando o Henrique nos disse da sua doença e do seu péssimo prognóstico. Os seus olhos perscrutadores viram as nuvens escuras que se aproximavam. Porém, pouco propício a demorar-se na desgraça e determinado a de tudo fazer caminho, durante os sete anos que se seguiram, "atravessando rios e montanhas e coisas mais duras", da sua 'força amazónica' arranca uma desmesurada determinação em viver. O tempo do relógio passa e nem as noites ele queria "desperdiçar com o dormir". Ainda trabalha durante quatro anos, ao mesmo tempo que avança nos projectos que tinha em mãos, na organização dos seus registos diários, na arrumação da sua casa.

O Henrique gostava muito de estar com os outros nas palavras. Quando finalmente se reformou e passou a ter tempo para o fazer, foi "uma espécie de alívio, e digo 'espécie' como eufemismo, ou por precaução... uma alegria interior, a chegada de um ar de felicidade, uma quase libertação...". Homem de vasta cultura e múltiplos interesses, movia-se nas conversas, com grande à-vontade, estabelecendo relações entre os vários mundos, da história das ideias à literatura, da música à arte. Dono de uma memória excepcional, pormenorizava com uma minúcia admirável as esbatidas reconstruções de eventos passados e, como na escrita, abordava os assuntos de forma articulada, fundamentada, com razão e coração, procurando sempre a clareza e a concisão. Entregava-se totalmente à conversa e qualquer assunto era conversável desde que não se caísse na "conversa fiada", na tagarelice, que o desviasse do "falar homem", agastando-se quando, na sua perspectiva, a indiferença ou falta de cuidado maltratavam os assuntos. Ouvinte atento, não retinha a palavra nem deixava a resposta por dar, mesmo quando esta surgia demorada pela procura da "palavra certa", gerando pausas que, se porventura fossem interrompidas, provocavam momentos de desconforto e impaciência. As conversas estimulantes e substanciais, normalmente longas, fluíam de forma lógica. A morte, retomada repetidamente, era fonte de conhecimento do seu próprio eu, uma oportunidade de olhar a vida mais profundamente: "A minha situação tornou-me mais focado… deu-me uma perspectiva mais clara sobre as coisas. Tudo se me abriu? Tudo. Tudo ficou mais claro."

Era com um enorme sentimento de gratidão e felicidade melancólica que exaltava "o privilégio de ter tido uma vida boa e cheia". Como tantas vezes o Henrique dizia, "estou frente a frente com a morte mas não acabei a vida" e de "corpo e de alma" resistia sempre, lutando para "permanecer inteiro" para, como conseguiu, "entrar vivo na morte". Embora muito debilitado e com enormes limitações, na fotografia à minha frente, vemo-lo, com filhos e netos, na Barragem de Montargil no aniversário do seu filho Daniel. Foi tirada uns dias antes de dar entrada no hospital, de onde sairia para, de acordo com a sua vontade, morrer em casa. Nos últimos meses tinha havido uma progressão galopante da doença impossível de travar. O cansaço era cada vez mais incapacitante e qualquer actividade exigia dele um esforço hercúleo. Sabíamos que estava a morrer.

Montargil, 8 de maio 2022, com os filhos, noras e netos

FOI ENTÃO QUE CHEGOU AGOSTO.

Naquele tempo parado, as horas voam. A dor dorme, a morte desperta. As montanhas ficam para trás e as pedras que carrega deixam de pesar. Alimenta-se dos desejos dos vultos destroçados que vê à sua volta.

O coração continua a bater. Os olhos voltam-se para dentro, procurando os sonhos que já não são.

E da voz se faz silêncio.

Começa a soltar as cordas que o prendem ao lugar que pertencia. O frio concentra-se nas mãos marmóreas, contraídas, aproximando-as do rosto.

O mar denso vai enegrecendo. Estava pronto, uma parte dele sabia que sim.

Naquela manhã o telefone tocou. Era cedo.

Tinha partido na Barca de Caronte.

E como um raio, um manto negro cobre a casa, a casa vazia.

E logo se faz noite.

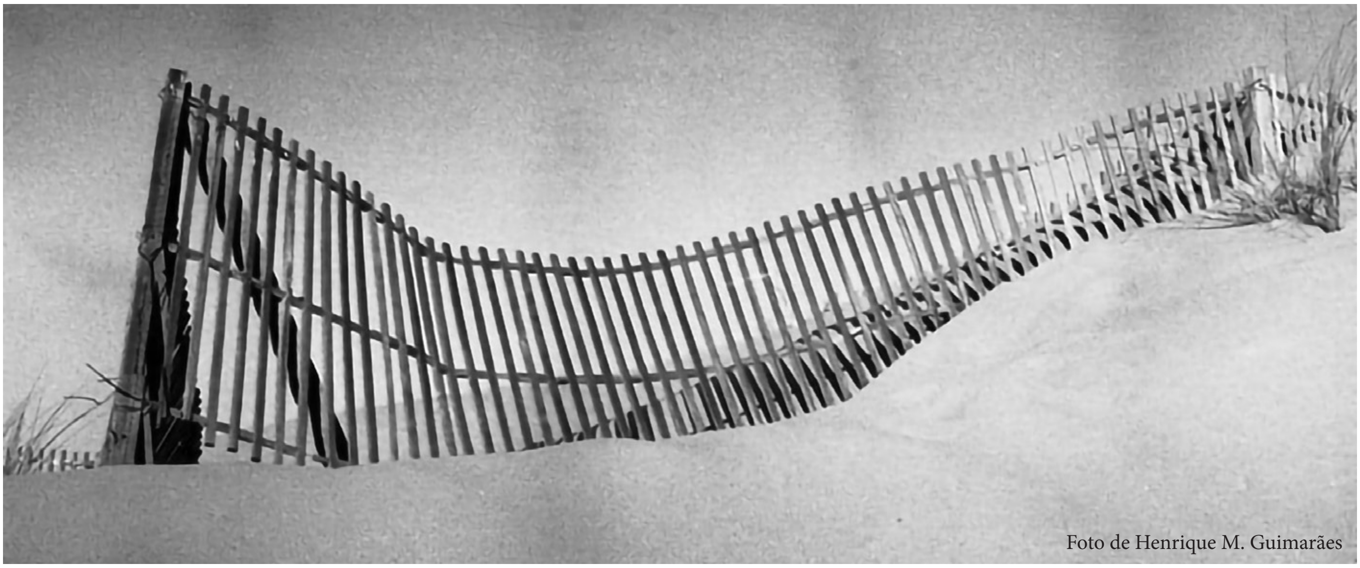


Foto de Henrique M. Guimarães

A APM, uma ideia boa

Mas tu cresces abundantemente como um ano bom
És uma bênção como um ano bom
Enches-nos a casa como um ano bom
Daniel Faria

Lurdes Figueiral

Como é difícil esta escrita!

Difícil pela saudade que ainda aperta. Difícil porque, que poderei dizer do Henrique e da sua relação com a APM que não seja património comum dos associados?

Dizer que o Henrique foi um dos fundadores, impulsionadores e sistematizador do pensamento e da organização da APM e dos ProfMat, todos o sabemos. Mas posso testemunhar que essa era uma das suas grandes alegrias, a APM, uma das suas grandes e permanentes causas e os ProfMat, um marco na vida de cada ano. Mas talvez nem todos saibam que era um guardião cioso de todos os rascunhos, apontamentos, documentos, fotos, das reuniões de preparação dos primeiros ProfMat e da criação da própria Associação. Para a história da APM temos, felizmente e a ele o devemos, documentos originais que atestam a dinâmica desses tempos. Em muitos momentos significativos da nossa vida associativa, o Henrique organizou exposições e sessões várias que todos recordamos e em que todos reconhecemos o seu gosto, a usa exigência, o seu rigor. Oxalá consigamos agora tratar deste acervo e da nossa memória primeira. Esse é um dos desafios que a sua fidelidade à nossa história nos exige.

Na APM, o Henrique fez de tudo e foi quase tudo: vice-presidente (1989/1990) e presidente da direção (1990/91), diretor da Quadrante (2004-2011), membro do Conselho Nacional, elemento da redação da Educação e Matemática (desde o número 1, em 1987, até ao número 63, em 2001) e seu colaborador assíduo — em nome próprio ou em colaboração, podemos encontrar na Revista 75 entradas de artigos (38), editoriais (9), secções (*Pense Nisto* (17) ou *Leituras e Memórias* (8)) e notas variadas (3). Participou na elaboração dos Estatutos e nas suas revisões e a sua marca está em todos os documentos de referência da APM, desde o seminário de Milfontes (1986) até às *Aprendizagens Essenciais do Ensino Básico* de 2018.

As suas intervenções nos ProfMat eram pautadas pela qualidade que todos lhe reconhecíamos e que enchiam as sessões que dinamizava. Quando integrava as comissões organizadoras, a sua presença era sinal de trabalho incansável para todos, acolhendo as suas exigências que passavam por todos os pormenores e que muitas vezes apetecia desvalorizar. Mas o resultado era sempre magnífico e garantia de encontros inolvidáveis. O Henrique empenhava-se na preparação e divulgação atempada e completa, na coerência do programa, na qualidade dos convidados, no impacto de algumas sessões e exposições, no bom e significativo ambiente e no apoio durante a realização, na avaliação cuidadosa depois de cada encontro. Participou em todos os ProfMat; em dois deles, onde estava inscrito, não chegou a participar presencialmente por questões já da sua saúde: no de Viseu em 2017 e no derradeiro, em julho passado, em Setúbal, pouco mais de um mês antes da sua morte. Em ambos estava hospitalizado. A ambos enviou mensagens que foram lidas no decorrer das Assembleias Gerais aí realizadas, lugar especialmente escolhido por ele, por serem o momento associativo por excelência, ainda que com uma plateia bem mais reduzida do que poderia ser uma sessão plenária de abertura ou clausura. Mas se os ProfMat eram a menina dos seus olhos no que toca a encontros, também foi igualmente imprescindível nos SIEM e em tantos outros encontros nacionais e regionais, temáticos, comemorativos...

O Henrique pautava a sua atuação pela qualidade e pelo rigor — o da coerência, da preparação, do estudo, da reflexão, não o do imobilismo ou da rigidez e da inflexibilidade. Não tolerava a ligeireza e a estreiteza intelectuais; custava-lhe lidar com elas, deixavam-no num desconcerto relacional e reativo às vezes difícil de associar à sua tolerância, afabilidade e abrangência de pensamento. Era essa marca que deixava também na sua presença e no seu contributo associativo. Por isso lhes dedicava tempo, muito tempo. Por isso lhe era tão difícil dar por terminado um trabalho, uma tarefa, uma realização. Nada estava suficientemente perfeito para a qualidade que queria imprimir à APM, à sua imagem, aos seus contributos e pronunciamentos em prol do ensino e da educação matemática. Nada era demasiado e todos sabemos que ele, sim, era em demasia e transbordava em tudo o que fazia.

O sentido e conhecimento estético, cultural, literário, histórico, matemático do Henrique, para além da sua profunda e contínua preparação na sua área de especialização, tornava-o um humanista, um renascentista nestes tempos polarizados e de conhecimentos parcelares e estanques. Também disso a APM sempre beneficiou. O que saía das suas propostas e realizações tinha essa *forma justa*, fruto da dedicação e do investimento pessoal. A sua escrita era desafiante, na forma e no conteúdo. Nunca o vi fazer nada de forma precipitada, imediatista, irrefletida. Fez-nos conhecer melhor George Polya e Sebastião e Silva; mas também Agostinho da Silva, Bertrand Russel, Jeremy Kilpatrick. Valorizava a investigação e com isso enriqueceu a Quadrante, o SIEM, o GTI; valorizava o ensino e a divulgação, sempre com o mesmo critério de busca incessante da qualidade. Iniciativas como a *Abertura à população* ou a *Outras artes dos Professores de Matemática*, levadas a cabo em alguns ProfMat, tiveram a sua inspiração e colaboração.

As pessoas, cada pessoa, interessavam-lhe muito. Os encontros — os encontros regionais encantavam-no — os trabalhos com outros eram oportunidades que ansiava, também pelo *encontro com as pessoas*. Pessoas que o marcavam, pessoas de quem sentia a falta, a distância, o silêncio. Pessoas cujas partidas definitivas lhe doíam. *Com o Paulo*, introdução (que ele redigiu) da separata da Revista em homenagem ao Paulo Abrantes (2003) e *Ubiratan convidava à paz* (2021), último artigo que escreveu para a Educação e Matemática em reação à morte de Ubiratan, sinalizam a dor dessas ausências. A do Paulo, manteve-se ao longo dos anos: dois artigos sobre o Paulo — *Paulo Abrantes e a experiência matemática, contributos na Educação e Matemática* (2005) e *Paulo Abrantes e a Educação e Matemática* (2007), dois encontros em sua memória (2005 e 2013) em que participou ativamente, exposições sobre a sua vida e obra que preparou com esmero, publicações que coordenou... e muitas vezes se interrogava, *o que diria o Paulo sobre isto*?

Era multiplicador de iniciativas e de energias. A sua dimensão internacional, o seu investimento na criação e na relação de e com instâncias internacionais, foi permanente. Ajudou a criar a FISEM (*Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática*) e participou em todos os seus congressos, os CIBEM, tendo integrado a comissão organizadora do V CIBEM, realizado no Porto em 2005, e a comissão científica do VIII CIBEM, realizado em Madrid em 2017, e no qual também já não pôde participar por questões de saúde; era o representante da APM nesta organização, onde fez amigos por todo o universo ibero-americano. Participou em vários ICME e em outros encontros internacionais. Partilhou e facilitou o acesso, através de traduções, estudos, divulgações, de muitos trabalhos internacionais, com destaque para os documentos do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) que a APM editou.


Foto de Henrique M. Guimarães

Foi um estudioso da Filosofia das Ciências e da Matemática em particular, e da História do Ensino da Matemática, quer na APM e em especial no *Grupo de Trabalho sobre História e Memórias do Ensino da Matemática* (GTHMEMat), quer na SPM no *Seminário Nacional de História da Matemática* (SNHM) do qual era membro, enquanto sócio da SPM que também era, embora totalmente distanciado das posições das suas direções nas últimas décadas, o que era para ele motivo de uma certa tristeza.

A intervenção que enviou para a última Assembleia Geral no ProfMat de Setúbal foi a sua última palavra à Associação: "APM (...) **A**, de Associação. Sim, é bem claro, a APM vale a pena a todos que a conhecem e onde têm trabalhado desde há 36 anos (...). **P**, de Passarinhos e Pensamentos (...) **P**, de professor — afinal quem somos nós? Professores, no nosso caso, associados da APM, nas escolas, com os alunos e outros professores. (...) **M**, de Matemática. (...) que queremos que os alunos trabalhem com cada vez mais mestria, iniciativa, autonomia e sentimento de auto-realização. (...)" E terminou dirigindo-se a todos os que "tornaram possível que a voz activa da APM se fizesse ouvir quando da melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática, em Portugal, se tratou."

Durante os dez anos que fui presidente da direção da APM, o Henrique foi o meu seguro de qualidade, o meu apoio; o meu confronto também, porque discordávamos em muitas coisas, sobretudo na forma de as fazer e dizer. Mas, no final, fosse qual fosse a minha opção (e era sempre, de facto, a minha...), o resultado foi inquestionavelmente melhor por causa dele, do que me ensinava, do que discutíamos, do que divergíamos, daquilo em que concordávamos. Tornou-me mais difícil o exercício deste cargo, mas a APM ficou a ganhar. E esse era (é) o nosso objetivo comum.

Obrigada, Henrique!

CIBEM, Uruguai, 2013

O olhar do Henrique Guimarães pela resolução de problemas

A experiência matemática, como qualquer outra experiência, não se transmite.
Cabe-nos como professores proporcionar condições para que os nossos alunos vivam,
adquiram, desenvolvam, essa experiência.
Para que resolvam problemas, pois claro.
Henrique Guimarães (Em Editorial EeM 130, 2014)

Isabel Vale

O Henrique foi um académico e profissional que se interessou ao longo da sua carreira por grandes questões da educação matemática, mas uma das suas principais áreas de interesse foi a resolução de problemas (RP). Estudou grandes educadores, sobretudo George Pólya, tornando-se um exímio conhecedor da sua obra, pelo que será difícil sintetizar em poucas palavras o seu trabalho, assim como dissociá-lo das ideias de Pólya.

Revendo o que escreveu, é notório o interesse pela RP e a importância que lhe dava pelas várias contribuições em artigos, editoriais e outro tipo de textos, focando-se nas práticas de sala de aula, no currículo, na formação de professores ou na história da matemática, que foram publicados de forma continuada ao longo dos anos, sobretudo na Educação e Matemática (EeM) e na Quadrante, onde foi editor e colaborador. Não só se preocupou em analisar e estudar as ideias de Pólya, mas também em discutir essas ideias com quem o conheceu mais de perto, dando a conhecer este matemático que revolucionou o ensino e a aprendizagem da matemática e deu um lugar de destaque à RP que passou a ser tema central na Matemática e na Educação Matemática, sendo ainda hoje uma das áreas de investigação mais produtivas.

O seu interesse na Educação Matemática e em particular na RP tem dois momentos marcantes, um em 1988, quando participa no Seminário de Vila Nova de Milfontes, do qual resultou a publicação (*O livrinho amarelo*) intitulada *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988), onde surge a recomendação da RP como orientação curricular e objetivo para o ensino da Matemática escolar; outro mais recentemente, como membro da equipa do *Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007* (ME-DGIDC, 2007) onde a RP aparece destacada como uma das três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática, conjuntamente com o raciocínio e a comunicação, constituindo um grande objetivo do programa: "Os alunos devem ser capazes de resolver problemas"(pp.5-6). Esta visão do que é a matemática no ensino básico e em particular a RP, foi desvirtuada com o *Programa de Matemática e Metas Curriculares para o Ensino Básico de 2013*. Sempre atento, Henrique num Pense nisto, rúbrica em que colaborou regularmente durante várias edições da EeM, convida o leitor a *Descobrir as diferenças* (EeM, 131, 2015) no que refere aos Objetivos relacionados com a RP nos referidos documentos. A este respeito, o pensamento dos autores do Programa de 2013 está muito longe das ideias do Henrique e do programa no qual participou. Em particular, destaca a desvalorização à abordagem da RP por descoberta. Ideia esta que contrapõe no Editorial de uma EeM (EeM, 130, 2014), recorrendo às ideias de Sebastião e Silva, matemático que estudou e admirava, ao salientar a importância da aprendizagem por descoberta onde o aluno deverá, sem ajuda, resolver exercícios não rotineiros, com caraterísticas de um problema novo.

Um aspeto interessante da atividade do Henrique Guimarães sobre a RP foi a sua divulgação, partindo do trabalho de Pólya, da qual destaco uma exposição temática e quatro textos, que passo a descrever sucintamente.

Henrique concebe e organiza, para a APM, uma *Exposição sobre Pólya - GEORGE PÓLYA (2.º, 3.º ciclo e secundário)* (https://www.apm.pt/georgepolya) apresentada no ProfMat2011 para assinalar os 25 anos da sua morte. A exposição tem cerca de duas dezenas de pósteres, distribuídos por 13 temáticas, propondo uma viagem sobre a vida e obra de Pólya, que ilustram o seu contributo não só para a RP, mas para a Educação Matemática.

Um dos textos (Quadrante, 19(2), 2010; EeM, 130, 2011) resulta de uma visita que o Henrique fez, como bolseiro da FCT, à Universidade da Georgia, para fazer algumas pesquisas e estudos sobre Pólya, onde Jeremy Kilpatrick era professor. Entre os seus diferentes interesses, Kilpatrick era também um estudioso da RP e de Pólya, com quem trabalhou. Nas conversas tidas com Kilpatrick descobrem uma entrevista que este tinha feito a Pólya, intitulada *Pólya e as capacidades matemáticas*, tendo Henrique traduzido esse texto "inédito" onde são discutidas várias das ideias de Pólya, do seu conhecimento e experiências, muitas já expressas em trabalhos publicados anteriormente. Também gostaria de acrescentar que, decorrente desta visita, será publicado, a título póstumo, um livro do Henrique sobre a RP e Pólya, informação amavelmente cedida pela Lurdes Figueiral.

Outro texto, intitulado "Conversa escrita com Jeremy Kilpatrick" (EeM, 130, 2014), resulta também de uma entrevista que Henrique fez a Kilpatrick, com o subtema *Como vamos de resolução de problemas?* Nesta entrevista, coloca um conjunto de questões sobre o pensar de Pólya e de Kilpatrick, com as quais Henrique se confrontava na sua relação com a RP, e que estão relacionadas com o papel da RP no currículo, nas aulas de matemática e na formação inicial de professores, mas também na relação com a matemática-ciência, aspeto este também muito caro ao Henrique, como são as questões filosóficas e científicas relacionadas com a natureza e história da matemática e da ciência. Para além das suas opiniões pessoais, Kilpatrick também revela alguns aspetos da prática em RP por Pólya.

O terceiro texto é uma tradução inédita de Pólya (EeM, 130, 2014) com o título *O ensino por meio de problemas*, publicado em 1967 na revista L'enseignment Mathematique. Aqui são revisitadas muitas das suas ideias e outras menos conhecidas, como é a centralidade da aprendizagem ativa. Henrique destaca dessa publicação "A matemática não é um desporto para espectadores: não a podemos apreciar, nem aprender, sem uma participação ativa", ideia que permeia muito dos escritos do Henrique, também defendida por Sebastião e Silva e que ele destaca no editorial da EeM (EeM, 130, 2014). Este matemático já defendia em 1966 que é necessário alterar as práticas de sala de aula, de modo a combater o excesso de exercícios no ensino, pelo que não bastava mudar só os programas, mas também os métodos que se praticavam e que deveriam ser sustentados no "método activo". Este princípio também está muito claro numa intervenção do Henrique num painel intitulado *Aprender matemática: porquê e para quê?* realizado no ProfMat2013 (EeM, 125, 2013) no qual são visíveis as suas preocupações sobre o ensino da matemática, mas onde expressa uma ideia muito semelhante que é "Enquanto nós não conseguirmos transportar para a aula momentos de experiência matemática vivida de forma independente e autónoma por parte dos nossos alunos ela não lhes chega, e porquê? Porque a experiência é intransmissível, a gente pode transmitir muita coisa, mas a experiência não se transmite." (p.73).

O último texto, *A resolução de problemas na Educação em Matemática: uma conversa sobre ensino, formação de professores e currículo desde Pólya* (Ifes Ciência, 1, VI, 2015), é uma entrevista ao Henrique realizada por uma das suas pós-doutorandas, Maria Alice Veiga. Um texto longo e interessante que retrata o seu pensar de forma fluida e descontraída, com certezas, dúvidas e hesitações, pelo que destacaria algumas ideias ainda não referidas: 1) Sobre a opinião de Pólya de que a capacidade para RP é despertada e não desenvolvida. Henrique acredita que todos temos um conjunto de capacidades, entre as quais, em alguma medida, a capacidade de resolver problemas, havendo alguns com essa capacidade mais desenvolvida; 2) Sobre as famosas etapas do modelo de RP de Pólya, considera que "arrumam, razoavelmente, bem, digamos o processo..., mas acho que só por si é pouco" (p.118-119). Para ele, o grande contributo é o questionamento e os exemplos ilustrativos sugeridos em cada uma das etapas, que considera ricas, para desencadear e alimentar o processo de RP. Tal questionamento é também adotado pelo Henrique nas suas aulas, com a preocupação de criar um percurso autónomo que gere autoconfiança nos seus alunos, para que não precisem continuadamente da confirmação do professor e para que seja um exemplo a seguir pelos futuros professores; 3) Sobre a preparação dos futuros professores considera que apesar da RP, na perspetiva de Pólya, em algumas instituições ter uma presença importante, não é suficiente para que seja utilizada no futuro. Considerando que as abordagens do professor não se esgotam com a RP, mas deve ter uma presença significativa; 4) Sobre o uso de modelos matemáticos na aprendizagem e na formação de professores que Pólya defende, Henrique refere que a modelação assim como a RP não teve grande visibilidade na formação inicial. Com uma agravante, apesar de muitos dos problemas que usamos serem de modelação (e.g. equação, função), quando se trabalham problemas no contexto de outras áreas, como seja da física ou da geografia, é necessário saber física ou geografia, pelo que a modelação tem outro problema — a interdisciplinaridade.

Não poderia deixar de referir outra faceta sobre o Henrique que extrapola a RP. O Henrique foi um colega e amigo, de quem guardo gratas recordações, pessoais e profissionais, e que tive o privilégio de conhecer. O Henrique assumiu ao longo dos anos um papel muito presente e relevante em atividades relacionadas com os ProfMat, em particular, em dois que se realizaram na ESE de Viana do Castelo, o de 1989 e o de 2009. Nestes dois encontros, sobretudo as reuniões da Comissão de Programa pautaram-se pela boa disposição, e as suas contribuições foram sempre muito significativas. Ideias pertinentes, atentas, cuidadas, atuais, procurando constantemente perceber o que poderíamos melhorar, diversificar e inovar, que pudesse interessar e ser útil a quem neles participava. Ao Henrique, "o guardião das memórias da APM" (https://www.apm.pt/HMG), dedico duas memórias fotográficas do Profmat2009. Uma, numa das reuniões de trabalho realizada no Porto, em Serralves, onde almoçamos e trabalhamos. O envolvimento foi tal que quando nos apercebemos o espaço tinha ficado completamente despido de gente e mobília, ficando sozinhos no restaurante, que como devem calcular foi uma experiência bastante inusitada.

Outra, retrata o convívio no jantar.

E então Henrique? Resolução de problemas, pois claro!

Ser Professor

"O professor, 'o que faz profissão de', 'que se entrega ao' ensino, deixa, ao ensinar, uma 'marca', a marca daquilo que ensina, naquele a quem ensina" – Henrique Guimarães, 2010 (p. 81).

Hélia Oliveira

Vivemos tempos em que a relevância da profissão do professor tem vindo a ser reafirmada. Por um lado, pelo reconhecimento do seu papel crucial no momento da inusitada pandemia que recentemente atravessámos e, por outro, pela tomada de consciência do efetivo problema da escassez de professores no momento e no futuro próximo, no nosso país, mas não só. Esta última tem suscitado muita discussão acerca dos motivos pelos quais a profissão se tem revelado pouco apelativa para os jovens e também aparentemente menos motivadora para muitos professores.

Afinal o que é *ser professor?* Para aqueles que se iniciam na profissão, ou que nela já se encontram, pensar no que representa ser professor pode conduzir às mais diversas respostas. "O professor, 'o que faz profissão de', 'que se entrega ao' ensino, deixa, ao ensinar, uma 'marca', a marca daquilo que ensina, naquele a quem ensina", dizia-nos o Henrique[1] (Guimarães, 2010, p. 81). É sobre o fazer profissão de professor, a marca do ensino da matemática e a marca indelével que um professor pode deixar de que vos falo no meu diálogo com as ideias de Henrique Guimarães.

O PROFESSOR ENQUANTO PROFISSIONAL

Quem é o professor enquanto profissional? Qual a natureza do conhecimento profissional do professor? Como se desenvolve profissionalmente? Da minha leitura de alguns dos textos e intervenções do Henrique e do nosso contacto direto em tantos momentos, surgem-me questões como essas que foram por si ponderadas e refletidas, com forte influência de autores como Donald Schön, Freema Elbaz ou John Dewey.

Destaca-se na forma de perspetivar o professor como profissional, a rejeição de uma certa racionalidade técnica em que este é encarado meramente como um técnico que aplica o conhecimento que é produzido nas universidades no contexto escolar. De facto, as situações com que o professor se confronta são reconhecidamente complexas, não são estáticas, mudam constantemente e são marcadas pela incerteza (Guimarães, 2008a) e, como tal, não estão asseguradas respostas padrão para os problemas da prática.

É atribuído, por esses autores, um valor epistemológico à prática na medida em que é nessa arena que os professores desenvolvem uma importante componente do seu conhecimento profissional. O conhecimento do professor é assumido como tendo um caráter eminentemente prático, mas ao contrário de se perspetivar a profissão como "um exercício técnico no qual o professor é um mero veículo para a aplicação instrumental de um conhecimento que outros produzem" (Guimarães, 2008a, p. 838), este é valorizado "enquanto possuidor de um conhecimento próprio, específico da sua profissão" (idem) que é experiencial, situacional e pessoal.

Das leituras do Henrique sobre as ideias de Donald Schön relativamente ao professor, destaca-se também a noção de reflexão, associada quer ao conhecimento em ação (reflexão *na ação)*, como a reflexão que ocorre após a ação em que este reflete sobre a sua atuação e que "pressupõe a sequência: ação/observação – reconstrução (da ação) – reformulação" (p. 826). A reflexão *sobre a ação* é seguramente uma dimensão que, para o Henrique, estava intrinsecamente associada a um bom professor e essencial para o seu desenvolvimento profissional.

Num momento em que o Henrique defendia um movimento por "uma matemática escolar mais viva", a sua posição evidenciava justamente como via o professor como um profissional reflexivo e não mero aplicador de orientações curriculares. Este afigurava-se também para ele como um profissional que coopera e discute e pensa com os seus pares, ao defender "Um movimento pela instituição e reforço de práticas de colaboração e cooperação entre professores e escolas, pela abertura e comunicação, pela afirmação das ideias e partilha de experiências, pelo seu confronto e discussão" (Guimarães, 2012, p. 1).

SER PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Se procurei anteriormente destacar a valorização que considero o Henrique ter feito do conhecimento próprio do professor, devo agora salientar a importância que atribuía ao conhecimento matemático necessário ao professor para ensinar e que permite estabelecer *a marca daquilo que ensina*. No entanto, tal conhecimento requerido vai muito para além do conhecimento de factos e procedimentos matemáticos, sendo que defendia que o "professor deve assumir-se como um transmissor de cultura" (in Figueiral et al., 2013, p. 67), na medida em que transmite "às gerações futuras o património cultural adquirido" (idem). Para tal, o professor precisa de conhecer bem a matemática, valorizá-la e ter uma verdadeira *experiência matemática* (como o Henrique gostava de dizer).

Recordo a relevância que atribuía à reflexão sobre a natureza da matemática, sempre presente nas suas aulas da formação inicial de professores de matemática. A leitura e discussão com os

[1] O meu contacto de mais de 25 anos com o Henrique, com quem partilhei durante quase duas décadas o gabinete de trabalho, conduz a que para mim seja o "Henrique" e não recorra ao tratamento formal como um (qualquer) autor. Acredito que o Henrique gostaria que o evocasse dessa forma.

futuros professores de textos como a *Invenção Matemática* ou *Intuição e Lógica*, de Henri Poincaré, remetem para a construção de um entendimento daquilo que efetivamente caracteriza a atividade matemática e que é fundamental para que o professor possa assumir o tal papel de *transmissor de cultura matemática*.

Naturalmente que a resolução de problemas como atividade central na matemática está também na essência da visão do Henrique sobre o ensino da matemática. Tal requer do professor que seja ele próprio um bom resolvedor de problemas e que dê a esta atividade um lugar destacado na sua sala de aula, para que os alunos a possam experimentar. Como refere: "a experiência é intransmissível, a gente pode transmitir muita coisa, mas a experiência não se transmite" (in Figueiral et al., 2013, p. 73).

SER O PROFESSOR HENRIQUE

As palavras de Robert Bullough "no ensino o meio é a mensagem e a mensagem é quem e o que é o professor como pessoa" (1997, p. 96) ecoam-me ao recordar o Henrique. Como colega numa instituição que forma (futuros) professores, a sua identidade como professor tem sido omnipresente. Pude testemunhar como tantas gerações de estudantes lhe reconheciam as suas enormes qualidades como professor. É muito significativo desse seu *ser professor* como o seu entusiamo e dedicação ao ensinar foram realçados pelos seus alunos ao observarem a sua fragilidade na doença.

O que era *ser professor* Henrique? Era aquele olhar inquiridor e curioso, um sorriso de satisfação, quase de criança, nos momentos em que se detinha com os outros a interpelar, questionar, a fazer pensar. Nada era dado como certo ou adquirido; todas as ideias deveriam ser alvo de escrutínio.

Esta atitude questionadora e inquiridora que o definiu como professor, relaciona-se também com uma dimensão do ser professor que foi por ele próprio afirmada: "O professor deve assumir-se como um intelectual, e é com esse sentido que ele pode cumprir a sua missão" (in Figueiral et al., 2013, p. 67). É um profissional que encontra "tempo para estudar, para ler, para se cultivar" (Guimarães, 2008b, p. 2). Essa foi também uma marca que o Henrique deixou *naqueles a quem ensinou*.

A CONCLUIR

Uma nova mudança curricular na matemática está em marcha. É curioso que, quando envolvido na elaboração de um anterior programa, o Henrique interpelava-nos: "Como vai ser? Vai ser, tem que ser, com o professor, com os bons professores que temos, sobretudo. Mas é preciso mais tempo – (…) Tempo para as preparar [as suas aulas], para analisar e discutir o seu trabalho, para prosseguir com seriedade e profundidade a sua formação científica, didáctica, educacional" (Guimarães, 2008b, p. 2). Afinal não é isto que é ser professor (de matemática)? Estes períodos de mudança curricular, que sabemos serem muito desafiantes, vêm naturalmente mostrar a essência do ser professor de matemática tal como a interpreto nas ideias do Henrique. Trata-se de um profissional que desenvolve um conhecimento específico e único e que perante novas formas de perspetivar o por que se ensina, o que se ensina e o como se ensina matemática se dispõe a questionar e a se aventurar por novos caminhos para proporcionar aos seus alunos uma verdadeira experiência matemática.

Referências

Bullough, R. V. (1997). Becoming a teacher: Self and social location of teacher education. In B. J. Biddle, T. L. Good & I. F. Goodson (Eds.), *International handbook of teachers and teaching* (pp. 79-134). Kluwer Academic Publishers.

Figueiral, L., Martins, A., Guimarães, H., & Abreu, M. (2013). Aprender Matemática: Porquê e para quê?, *Educação e Matemática, 125*, 61-77.

Guimarães, H. M. (2012). Editorial. *Educação e Matemática, 118*, 1.

Guimarães, H. M. (2010). Concepções, crenças e conhecimento — afinidades e distinções essenciais, *Quadrante, 19*(2), 81–102. https://doi.org/10.48489/quadrante.22852

Guimarães, H. M. (2008a). Perspectivas sobre o conhecimento do professor. *Revista Diálogo Educacional, 8*(25), 819-839.

Guimarães, H. M. (2008b). Editorial. *Educação e Matemática, 98*, 1-2.

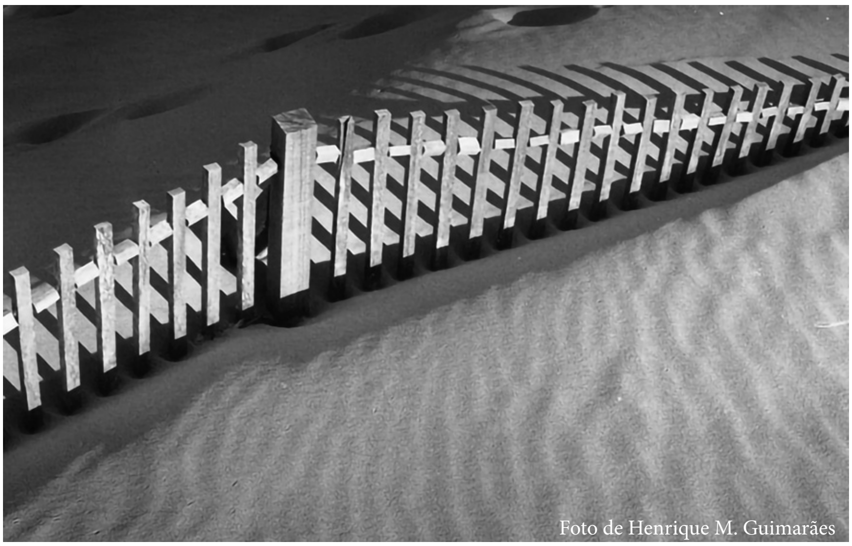


Foto de Henrique M. Guimarães

Henrique M. Guimarães — o currículo, no currículo

Ana Paula Canavarro
Leonor Santos

O currículo (de Matemática) foi certamente um dos temas a que Henrique M. Guimarães — o Henrique —, deu especial atenção ao longo de todo o seu percurso profissional. Foram mais de 30 anos os que a este tema dedicou, em vários domínios da sua intervenção enquanto educador matemático:

- Promotor de reflexão sobre o currículo;
- Produtor de investigação em torno do currículo;
- Criador de currículo/programas de programas de Matemática.

Enquanto **promotor de reflexão** sobre o currículo, o então ainda jovem Henrique foi co-autor do que viria ser uma obra emblemática sobre o currículo de Matemática em Portugal. Editado pela APM, com o título *Renovação do currículo de Matemática*, esta obra decorreu de um Seminário realizado em Vila Nova de Milfontes, em 1988 (figura 1). O Henrique foi autor de um dos textos que serviu de base à discussão de um dos temas centrais do seminário, o tema 4: "O estilo e a organização desejáveis para o currículo de Matemática nos vários níveis de ensino"[1]. Anos mais tarde, em 2009, é também o Henrique quem escreve um capítulo adicional: "Renovar o currículo de matemática – o seminário de Milfontes", quando a APM publica uma edição comemorativa deste que ficou chamado como *Livro Amarelo*.

Na revista Educação e Matemática, encontram-se mais de 30 textos assinados pelo Henrique que abordam aspetos curriculares diversos como: papel da Matemática no plano curricular, conteúdos dos currículos, papel do professor nos processos de desenvolvimento curricular. Destacamos também o prefácio à edição portuguesa, publicada pela APM em 2007, do livro editado pelo NCTM *Princípios e Normas para a Matemática Escolar,* que o Henrique escreve destacando, da sua lavra, dois princípios desafiadores: "Matemática com compreensão" e "Matemática para todos". A leitura dos textos do Henrique deixa emergir, de forma muito clara, a intencionalidade de promover o questionamento e a reflexão por parte de quem o lê acerca do currículo, e o mesmo tom reflexivo marcou as inúmeras conferências que dinamizou de forma continuada e a que muitos de nós pudemos, sempre com proveito, assistir.

Enquanto **produtor de investigação** em torno do currículo, o Henrique participou desde cedo, no início dos anos 90, em estudos desenvolvidos no âmbito do grupo de investigação Didática e Formação (DIF), sediado no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, quer sobre a experimentação dos novos programas de Matemática do ensino secundário (Matos et al., 1993; Ponte et al., 1991; 1993), quer sobre experiências de inovação curricular com forte ênfase no desenvolvimento curricular (Guimarães et al., 1993) (figura 2). Nos finais da década de 90, o Henrique integra a equipa de educadores matemáticos e professores de Matemática responsável pelo estudo de diagnóstico sobre a situação do ensino da Matemática em Portugal, o *Matemática 2001* (figura 3), tendo por objetivo elaborar um conjunto de recomendações pertinentes e fundamentadas para a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática (Precatado et al., 1998). Já em 2006, o Henrique foi co-autor de um estudo que analisa e compara os currículos de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico em Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal (Ponte et al., 2006) (figura 4). Curiosamente, foi o Henrique quem produziu as capas destas três publicações, à semelhança do que aconteceu com tantas outras, dando expressão ao gosto e apurada estética que colocava no trabalho com imagens.

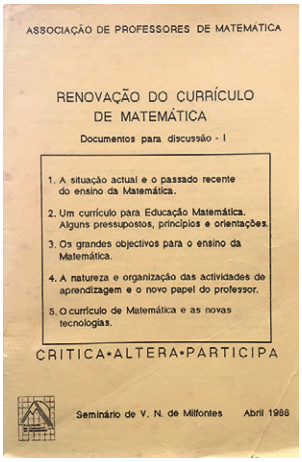


Figura 1. Livro amarelo (original, 1988)

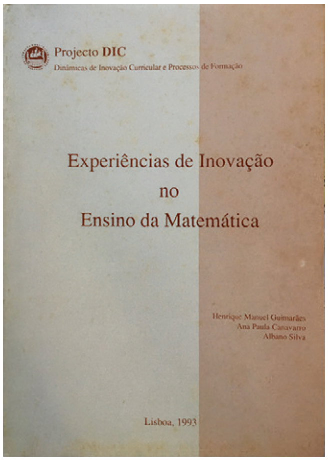


Figura 2. Experiências de Inovação no Ensino da Matemática

[1] Este livro teve também como coautores Eduardo Veloso, João Pedro da Ponte e Paulo Abrantes. O livro não indica a autoria de cada um dos textos que o compõem, mas na sua edição comemorativa, uma nota de rodapé (p. .81) no capítulo adicional escrito pelo Henrique ("Renovar o currículo de matemática – o seminário de Milfontes"), identifica o autor de cada texto original. No capítulo "Introdução", pela Direção da APM, é feita a correspondência entre cada texto e o tema central para discussão.

Figura 3. Matemática 2001

Figura 4. Programas de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Apesar de a sua dissertação de mestrado (Guimarães, 1993) e a sua tese de doutoramento (Guimarães, 2003a) não explicitarem nos títulos a ideia de currículo, elas procuram caracterizar práticas de ensino de professores de Matemática e associá-las às conceções que detêm sobre essa ciência e o seu ensino. A tese de doutoramento inclui um capítulo que detalhadamente analisa os movimentos internacionais de reforma curricular da Matemática, oferecendo uma perspetiva histórica e crítica.

Enquanto **criador de currículo**, destaca-se a sua participação na equipa de autores do programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em 2007 (Ponte et al., 2007) e, posteriormente, a sua participação nos textos das A*prendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico*, publicadas em 2018 (Ministério da Educação, 2018), sem que os seus autores tivessem sido devidamente identificados.

Nos diferentes domínios da sua intervenção, emerge um conjunto de **ideias-chave sobre o currículo** que o Henrique defendeu de forma consistente ao longo do tempo. Sistematizamos de seguida a nossa visão sobre essas ideias, recorrendo às próprias palavras do Henrique.

UM CURRÍCULO ASSENTA EM PRESSUPOSTOS GERAIS

Para o Henrique, um currículo não é ideologicamente neutro. Ele assenta num conjunto de pressupostos que "dizem respeito a concepções sobre Educação, sobre o Homem e a Sociedade, sobre o Saber e sobre a Aprendizagem" (APM, 1988, p. 20). Esta ideia mantém a sua atualidade em 2018 (ME, 2018), clarificando que os pressupostos são prévios à definição das outras componentes do currículo: objetivos, metodologias, conteúdos e avaliação.

UM CURRÍCULO VINCULA UMA CONCEÇÃO SOBRE A MATEMÁTICA

Para o Henrique, a conceção que se tem acerca da Matemática marca indelevelmente uma proposta curricular, podendo limitar a experiência matemática que propõe para os alunos:

> A Matemática é encarada, habitualmente, como um todo organizado, consistente, muito abstracto e formal: não parece ter nenhuma relação com a realidade, quer como fonte dos seus conhecimentos, quer como domínio de aplicação. O modo como a Matemática evoluiu historicamente, e o modo como os matemáticos procedem na sua investigação, dão crédito, no entanto, a uma outra visão da Matemática que não a restrinja a um sistema lógico, formal e abstracto.
>
> (…) muitos matemáticos testemunham, com a sua experiência, a importância dos "caminhos tortuosos" da tentativa-erro, o papel decisivo dos processos experimentais ou semi-experimentais, em suma, o valor dos aspectos informais e da intuição na investigação matemática.
>
> Assim, "ver" a Matemática, apenas, como um sistema formal, reduzir o raciocínio matemático à dedução, e, identificar a actividade matemática com a "manipulação" de símbolos sem significado, traduz uma concepção redutora que nos fornece uma visão incompleta, parcial, da Matemática (...) (APM, 1988, pp. 20-21)

UM CURRÍCULO MAIS CONCEPTUAL E MENOS MECANICISTA

Para o Henrique, são múltiplos os argumentos que podem ser convocados para justificar a importância da aprendizagem da Matemática. Desde sempre defende que a ênfase do ensino da Matemática deve incidir nos aspetos mais conceptuais, e não nos mais mecânicos:

> (…) a importância desde sempre atribuída à Matemática, quer para o dia-a-dia das pessoas e para a sua vida profissional, quer para o desenvolvimento das outras ciências, das técnicas e outros ramos da atividade humana (...) naquilo que existe de comum na vida das pessoas [é] cada vez mais aprendida fora da escola (e, porque não, antes da escola), do mesmo modo que aprendemos outros conhecimentos que nos são essenciais (…) Por outro lado, ensinar a matemática necessária à prática profissional futura de cada um, obrigaria, ao nível da escolaridade básica, ou a um currículo mínimo constituído pela Matemática comum a várias profissões (que dificilmente, justificaria uma escolaridade longa em Matemática), ou a uma sobrecarga excessiva e em muitos casos inútil, nos programas da disciplina (…) No que diz respeito à relação da Matemática com a realidade e, em particular, com as outras ciências, do ponto de vista do seu ensino, pressupõe-se, em geral, que é preciso primeiro aprender Matemática para depois a aplicar no estudo dessa realidade, na aprendizagem dessas ciências. Esta perspetiva traduz uma conceção segundo a qual a Matemática é vista como uma ferramenta de que as outras ciências se socorrem no estudo a que se dedicam. Aprende-se Matemática apenas porque ela é precisa para o estudo em outras áreas científicas. Reserva-se-lhe, assim, um papel meramente instrumental, encarando-se essa disciplina como uma

linguagem das ciências ou como um conjunto de técnicas de que estas necessitam (...) (Guimarães, 1989, p. 11, itálico no original)

Muito possivelmente, as regras e técnicas matemáticas, bem como os aspetos simbólicos da Matemática, terão que ser sempre contemplados, de uma forma ou de outra, no ensino dessa disciplina. Não são, no entanto, os únicos nem, certamente, os mais importantes. O desenvolvimento da tecnologia, em particular a existência dos computadores e das calculadoras, (…) dão hoje mais razão, e proporcionam mais e melhores meios, para que a ênfase no ensino incida nos aspectos mais conceptuais da Matemática em detrimento dos seus aspectos mais mecânicos. (Guimarães, 1989, p. 12)

UM CURRÍCULO INTEGRADOR DE CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES

Para o Henrique, em sintonia com a sua visão alargada do papel formativo da Matemática, constituem conteúdos de ensino da Matemática conhecimentos, capacidades e atitudes, que devem surgir de forma integrada. Em 1991, ao analisar o então novo programa de Matemática, afirma: "Não podemos, finalmente, deixar de sentir satisfação ao constatar, no texto dos programas, uma preocupação em diversificar os conteúdos de aprendizagem, alargando-os a três domínios – Atitudes, Capacidades e Conhecimentos (…)" (Guimarães, 1991, p. 1). Nos dois programas de Matemática do Ensino Básico de que foi coautor (Ponte et al, 2007; ME, 2018) os conteúdos de aprendizagem sempre incidiram no trio referido, não como três elementos separados mas interrelacionados. Contudo, o Henrique alerta: "Integrar equilibradamente conteúdos e processos (conhecimentos e capacidades) é ainda uma dificuldade, um outro ponto crítico se quiserem, no ensino da Matemática" (Guimarães, 2003b, p. 6).

UM CURRÍCULO INCLUI ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS, MAS ...

Para o Henrique, a metodologia de ensino é uma componente integrante de um currículo, mas muito suscetível de ser relativizada ou mesmo não adotada pelos professores. Considerando que pode constituir um ponto crítico no ensino e aprendizagem da Matemática, tem sobre a metodologia de trabalho uma perspetiva não normalizadora, assumindo que por si só não é garante de aprendizagem matemática:

Um determinado método de ensino pode ser mais favorável do que outro para determinadas aprendizagens matemáticas ou de outra natureza que se pretendam promover no aluno. Isto, todavia, "nem sempre é óbvio e claro e, para além disso, sabemos bem que o método não é por si só garantia dessas aprendizagens, sobretudo quando é identificado com os aspetos mais concretos e técnicos do ensino. Por outro lado, as escolhas metodológicas do professor estão muito relacionadas com as suas conceções relativas à Matemática – por exemplo, sobre a sua natureza e valor, sobre a forma como se produz e desenvolve o conhecimento matemático – mas também relativas ao seu ensino e aprendizagem – sobre que devem estes incidir? com que finalidades? Estas são algumas razões por que, em meu entender, eventuais mudanças metodológicas, por um lado, são susceptíveis de serem relativizadas com alguma facilidade e, por outro, caso choquem com as concepções mais profundamente enraizadas no professor, são dificilmente adoptadas (Guimarães, 2003b, pp. 5-6).

UM CURRÍCULO FAZ-SE COM PROFESSORES

Para o Henrique, o papel do professor é decisivo — como afirma na última frase do excerto anterior. Por diversas vezes exorta para o papel essencial do professor no processo de renovação curricular: "(…) o professor é sem dúvida um elemento decisivo que desde o início precisa estar presente, em todos os sentidos, na concepção, implementação e avaliação de uma proposta de renovação curricular; sem o professor nada mudará, pelo menos significativamente (APM, 1988, pp. 34-35, sublinhado no original).

Elenca as necessidades que devem ser acauteladas para apoiar os professores nestes processos — tempo para o desenvolvimento curricular, tempo para o desenvolvimento profissional, formação de professores e materiais de qualidade para todos:

Nenhum programa, por si só, melhora o ensino e melhora as aprendizagens. E não há programa algum que torne um mau professor num bom professor.

Mas é preciso tempo – já era preciso antes – mais tempo de aulas para os alunos, mais tempo do professor para as aulas. Tempo para as preparar, para analisar e discutir o seu trabalho, para prosseguir com seriedade e profundidade a sua formação científica, didática, educacional. Tempo para estudar, para ler, para se cultivar.

E é preciso mais formação de professores – já era preciso antes – no 1.º ciclo, no 2.º ciclo, no 3.º ciclo. Formação com os programas, não para os programas, alargando e aperfeiçoando a que está em curso, para manter sustentada e continuadamente um processo de acompanhamento que valorize a intervenção nas escolas e a acção do professor em aula. E materiais ricos e diversificados, para o professor, para as aulas, para os alunos. (Guimarães, 2008, p. 2)

Este alerta do Henrique foi escrito em 2008 mas, à semelhança de outros processos em Educação, mantém a sua atualidade nos dias de hoje. Estamos, em 2022, num processo de mudança curricular. Se é verdade que parte destas recomendações estão a ser contempladas, o Henrique, com o seu jeito frontal e inconformado, ainda teria muito a reclamar.

Referências

Associação de Professores de Matemática [APM] (1988). Renovação do currículo de Matemática. APM.

Guimarães, H. M. (1999). *Ensinar Matemática: Conceções e Práticas* (dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). http://hdl.handle.net/10451/40954

Guimarães, H. (1989). Por uma visão não instrumentalista da Matemática. *Educação e Matemática, 12*, 11-12 e 40.

Guimarães, H. (1991). A pretexto da reforma. Editorial. *Educação e Matemática, 19*/20, 1-2.

Guimarães, H., Canavarro, A. P., & Silva, A. (1993). E*xperiências de Inovação no ensino da Matemática*. APM.

Guimarães, H. M. (2003a). *Conceções sobre a Matemática e a atividade matemática* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). http://hdl.handle.net/10451/42666

Guimarães, H. (2003b). Pontos críticos no ensino e aprendizagem da matemática: algumas dicotomias. *Educação e Matemática, 75*, 3-6.

Guimarães, H. (2008). Dois anos depois, vinte anos depois…. Renovar o currículo, melhorar o ensino, melhorar a aprendizagem. Editorial. *Educação e Matemática, 98*, 1-2.

Guimarães, H. M. (2019, 11 maio). *Aprendizagens essenciais em Matemática – de que falamos?* [Conferência plenária]. IV Encontro de professores APM-IE.

Matos, J., Ponte, J. P., Guimarães, H., & Leal, L. (1993). *A aplicação do novo programa de Matemática do 11.º ano*. Instituto de Inovação Educacional.

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais. 8º ano, 3.º ciclo do ensino básico Matemática*. http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_8a_ff_18julho_rev.pdf

Ponte, J. P., Matos, J., Guimarães, H., Leal, L., & Canavarro, A. P. (1991). *O processo de experimentação dos novos programas de Matemática*. Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Guimarães, H., Leal, L., Canavarro, A. P., & Silva, A. (1993). *Viver a inovação, viver a escola*. Projeto Didática e Formação & Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Boavida, A., Canavarro, A. P, Guimarães, F., Guimarães, H., Brocardo, J., Santos, L., Serrazina, L., & Saraiva, M. (2006). *Programa de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico. Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal*. CIEFCUL e APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães. H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. DGIDC, ME.

Precatado, A., Lopes, A., Baeta, A., Loureiro, C., Ferreira, E., Guimarães, H., Almiro, J., Ponte, J. p., Reis, L., Serrazina, L., Pires, M., Teixeira, P., & Abrantes, P. (1998). *Matemática 2001 Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. APM.

Henrique Guimarães e a leitura longa do tempo

José Manuel Matos

Pede-me a redação da Educação e Matemática um pequeno artigo sobre a relação do Henrique Guimarães com o estudo do passado do ensino e da aprendizagem da matemática e assim o farei. No entanto, a minha amizade com o Henrique durou mais de 50 anos, pelo que peço licença ao leitor para, no início, gastar alguns caracteres rememorando esse passado, não por saudosismo, mas porque essas vivências talvez expliquem o nosso gosto comum pela cultura e por uma apreciação longa dos fenómenos, modos de estar que se vão refletir no modo como o Henrique se envolvia com o estudo e divulgação do passado da matemática escolar.

Ambos frequentámos os bancos do Instituto Superior Técnico no curso de engenharia eletrotécnica, ele mais avançado um ano do que eu. Isto "dos bancos" é um eufemismo, pois no Técnico aprendia-se muito mais do que engenharia. O ambiente naquele final dos anos 1960 e princípios dos 70 era de efervescência provocada pelo maio de 68, a invasão da Checoslováquia, as guerras do Vietname e colonial, a música rock e a canção de protesto. Conhecemo-nos nos inícios da década de 1970 num coro transformado em grupo de teatro, o Orfeão Académico de Lisboa, que então se dedicava a encenar peças criadas coletivamente que eram representadas clandestinamente em coletividades populares da zona da Grande Lisboa. Éramos um pequeno grupo de jovens que vivia intensamente o seu trabalho cultural e o enriquecia com debates e leituras sobre o papel social da arte, novos modelos de sociedade, as desigualdades sociais e outras coisas que nos inquietavam. Além disso, participávamos da turbulenta vida da academia lisboeta onde o fecho de escolas, o confronto com as forças policiais, incluindo com a polícia política e as prisões faziam parte do quotidiano. Reencontrámo-nos em 1982 num almoço em Sintra dos antigos participantes do grupo e, desde essa altura, nunca mais perdemos o contacto. Aproximava-nos não só o gosto pelas tertúlias prolongadas, muitas vezes centradas em temas culturais, mas também os filhos que foram colegas de escola durante a infância.

Na nossa última conversa deste ano, disse-me que eu o tinha desafiado a participar na preparação do primeiro ProfMat. É possível. Esse primeiro congresso foi um agregado de grupos e tendências que se preocupavam com o ensino da matemática e o Henrique tinha então uma relação muito intensa com o núcleo de formação de professores ligado ao Ciclo Preparatório. Certo é que, desde então, nunca mais deixámos de contactar sobre os problemas do ensino e da aprendizagem da matemática. Eventos relacionados com o Grupo de Trabalho sobre Investigação, a fundação da Quadrante, a criação da Coleção de Teses ou o projeto Matemática 2001, ocorreram durante esses nossos contactos.

Seria em janeiro de 1992 que criámos com colegas de várias escolas o GruPo TEM (Grupo Português de Teoria da Educação Matemática) inspirado nas propostas de Hans-Georg Steiner.

Deliberadamente afastámo-nos do tradicional estilo de trabalho académico e adotámos o formato de um grupo de estudos que se encontrava a cada dois meses durante um dia inteiro, privilegiando a reflexão longa, profunda e sem pressas, tão ao gosto do Henrique, mas difícil hoje de entender num tempo em que o trabalho académico está refém de todo o tipo de métricas.

O grupo afastou-se da abordagem hermenêutica de Steiner, e preferiu explorar o tema dos fundamentos da matemática e do seu ensino segundo uma perspectiva sociológica e cultural abrangente, e portanto também histórica. Pode-se dizer que procurávamos entender a matemática segundo o que hoje se designaria de uma história cultural. Embora a produção material do grupo se limite a um livro sobre sociologia da matemática (Boavida et al, 1998), pessoalmente, é a esta experiência coletiva de seis ou sete anos que devo a capacidade de entender radicalmente as dimensões sociais e culturais do conhecimento matemático e atrevo-me a considerar que o mesmo aconteceria com o Henrique.

O Henrique publicou diversos textos relacionados com o passado dos quais destacarei dois. O primeiro faz parte da sua tese de doutoramento e constitui, na minha opinião, o seu melhor trabalho histórico. Talvez possamos encontrar as suas raízes num projeto comum falhado de escrever um livro para a Universidade Aberta que refletisse sobre a natureza da matemática, em particular, da matemática escolar. Era algo que nunca tinha sido tentado no nosso país, mas tínhamos esperança que o lastro teórico adquirido nas tertúlias do Grupo TEM nos permitisse escrever algo de inovador sobre o tema. Infelizmente, havia ainda muito que aprender, e os tempos editoriais não permitiram que concluíssemos o projeto.

O Henrique persistiu e, poucos anos depois, conseguiu levar a bom porto esse projeto através da sua tese de doutoramento (Guimarães, 2003). Contrastando concepções e práticas da matemática escolar e da matemática ciência (suas palavras), ele vai conseguir, apoiado em argumentos formais e empíricos, ilustrar os pontos de contacto e de divergência entre estas duas matemáticas. Não conheço ninguém que o tenha conseguido fazer com tal perspicácia e precisão argumentativa.

Para levar a cabo tal projeto, uma fundamentação histórica foi fundamental e está condensada no capítulo IV da sua tese intitulado "A Matemática e a actividade matemática". Do meu ponto de vista, este capítulo é um texto de leitura obrigatória para quem queira aprofundar o tema da natureza da matemática escolar e das suas relações com a matemática da academia. O trabalho, que deveria ter merecido uma publicação em inglês, é referido por diversos autores, nacionais e estrangeiros, que nele encontraram uma profundidade e uma clareza de análise do movimento internacional da matemática moderna que não se encontram noutros textos sobre o tema.

O mesmo detalhe e rigor pode ser encontrado num segundo texto, "A resolução de problemas no ensino da Matemática — Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal" (2005). Desta vez são procurados vestígios da proposta curricular envolvendo a resolução de problemas no passado da matemática escolar. O texto descreve como o entusiasmo pela resolução de problemas ocorreu em Portugal desde a década de 1980 e foi influenciado pela renovação curricular proposta pelo NCTM. Baseado numa análise documental cuidadosa, este trabalho consegue, tal como o capítulo da sua tese, sair do âmbito do nosso país e efetuar um estudo original do que ocorreu nos próprios Estados Unidos.

O envolvimento do Henrique com o estudo do passado não está apenas nos seus trabalhos académicos. Refiro-me à elaboração de exposições, tarefa efémera onde ele conseguia aliar o entusiasmo de contar uma história com a criação estética. E não foram poucas as exposições em que se envolveu. Recordo, em particular, a do ProfMat de Évora de 2005 que comemorava os 20 anos do encontro e que exibia (recordava) muitos documentos originais relacionados com os primeiros anos da associação. No ano seguinte, durante o ProfMat de Setúbal, participa ativamente no que foi a primeira exposição de livros de texto portugueses de matemática.

A partir de 2009, com a fundação do Grupo de Trabalho sobre História e Memórias do Ensino da Matemática da APM, cuja proposta de criação foi acordada precisamente numa reunião dos seus fundadores em casa do Henrique e que foi depois aprovada durante o ProfMat de Viana do Castelo, foram regularmente elaboradas exposições sobre temas do passado: o Projeto Minerva, o Ciclo Preparatório de Ensino Secundário, José Sebastião e Silva, Educação Financeira, António Augusto Lopes, etc. Em todas elas, o Henrique colaborou, quer nos conteúdos, quer na forma, onde frequentemente tinha a última palavra. De sua iniciativa foi ainda elaborada uma exposição sobre George Pólya.

Tentei neste texto ilustrar um mosaico da personalidade polifacetada do Henrique Guimarães, precisamente aquela que se relaciona com a apreciação e estudo do passado, em particular do da matemática escolar. Dessa personalidade, procurei ressaltar a sua busca do substantivo, em particular a de um terreno firme onde ancorar uma visão da matemática escolar, como veio a materializar nos programas em cuja elaboração participou. E o seu tempo sempre foi um tempo longo. Faz-nos falta essa forma de estar.

Referências

Boavida, A. M., et al (Eds.). (1998). *Sociologia da Matemática*. APM.

Guimarães, H. M. A. C. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática - Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário.* (Tese de doutoramento), Universidade de Lisboa.

Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática — Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação e Matemática: caminhos e encruzilhadas — Actas do encontro de homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 145-166). APM.

Recordando Henrique Guimarães

O legado do Henrique é muito maior que os contributos que nos deixou em Educação Matemática e na Educação e Matemática. A sua dimensão humana imprimiu uma marca em cada de nós que queremos aqui lembrar. Nesse sentido, terminamos este caderno com um conjunto de pequenos testemunhos de amigos, colegas e antigos alunos.

Lurdes Serrazina

Conheci o Henrique em 1985, pouco antes do primeiro ProfMat, onde se constituiu um movimento que viria a culminar na criação da APM no ano seguinte em Portalegre. Discutia-se então a necessidade de alterar o ensino da Matemática, para que ela deixasse de ser aquela disciplina que "marcava negativamente" muitos alunos. Com essa perspetiva, dinamizámos em conjunto, no ProfMat1985, uma sessão prática sobre a utilização do geoplano no ensino da geometria. Tratava-se de um material inovador que acabava de ser divulgado em Portugal e no qual víamos muitas potencialidades, numa época em que a geometria, embora sendo parte integrante dos programas dos diferentes anos de escolaridade, era normalmente relegada para o final do ano letivo constituindo demasiadas vezes aquela parte do programa a que não se chegava.

A partir daí foram múltiplas as ocasiões em que tive o privilégio de trabalhar com o Henrique, desde logo em diferentes tarefas no seio da APM. Trabalhámos juntos na direção da APM. Na altura os estatutos da APM determinavam que o presidente era eleito como vice-presidente e no ano seguinte passava a presidente. Assim, o Henrique exerceu as funções de vice-presidente no ano em que fui presidente (1990/91), sendo presidente no ano seguinte.

Como membro da direção ou não, o Henrique sempre dedicou muito do seu tempo à APM, nomeadamente participando ativamente em diferentes grupos de trabalho ou nas comissões organizadoras do ProfMat ou do SIEM. Por exemplo, o Henrique integrou o grupo de trabalho de investigação (GTI) estando na organização do I Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM) que se realizou nos dois dias que antecederam o ProfMat de 1990 nas Caldas da Rainha, foi diretor da revista Quadrante e membro da redação da Educação Matemática. Representou a APM em diferentes instâncias nacionais e internacionais, como nos CIBEM (Congresso Iberoamericano de Educação Matemática), tendo sido membro das comissões organizadora e científica do único CIBEM que se realizou em Portugal, em 2005, no Porto. Aqui, mais uma vez, tive o privilégio de trabalhar com ele na organização do programa científico e na edição das publicações inerentes.

Seria fastidioso enumerar todas as causas relativas à educação e, em particular, à Educação Matemática, que o Henrique foi abraçando ao longo da vida. Não posso deixar de referir a sua valiosa participação na equipa responsável pela elaboração, divulgação e concretização do programa de Matemática para o ensino básico, homologado em 2007.

Para terminar, quero realçar o rigor que o Henrique imprimia em tudo o que fazia, a exigência que impunha a si próprio e aos outros, o seu cuidado com os pormenores que resultavam normalmente numa melhoria no produto final.

Obrigada, Henrique!

João Pedro da Ponte

Conheci Henrique Guimarães em 1985, quando se realizou o primeiro ProfMat e se começou a preparar a fundação da APM. Ele era nessa altura professor do 2.º ciclo, ciclo que se destacava na altura por ter muitos professores que refletiam sobre os problemas do ensino e se empenhavam em encontrar formas de os ultrapassar. Henrique era um dos professores que se destacava nesse grupo e teve um papel muito importante no movimento que levou à fundação da APM. No ProfMat em que esta associação foi finalmente criada, em 1986 em Portalegre, apercebemo-nos já durante o encontro, que a associação, para ser constituída, precisava de ter estatutos. Havia tanta coisa a pensar que, no grupo organizador, ninguém se tinha lembrado disso. Assim, na véspera da Assembleia Geral, ao serão, constitui-se um grupo ad hoc que, com base nos estatutos de outra entidade (já não sei dizer qual era), formulou uma proposta de estatutos, que viria a ser aprovada, no decurso de uma animada discussão, no dia seguinte. Henrique Guimarães fez parte deste grupo dos estatutos, dando sempre excelentes contribuições. Na sequência deste envolvimento na criação da APM, Henrique Guimarães integrou a primeira direção da associação, tendo desde logo um papel destacado, nomeadamente na revista Educação e Matemática. Anos mais tarde, viria a ser Presidente da Associação e Diretor da revista de investigação Quadrante da APM, fundada no início dos anos 90.

Tive depois muitas oportunidades de trabalhar com o Henrique. Ele foi aluno do primeiro curso de mestrado no campo do ensino da Matemática. O curso tinha um nome estranho, dadas as complicadas negociações institucionais na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e no Departamento de Educação. Mas foi um curso memorável, com excelentes alunos, que não só percebiam muito bem a "matéria", como, ainda por cima, tinham ótimas iniciativas de aprofundar e sugerir desenvolvimentos. Por exemplo, a propósito da disciplina de Metodologia de Investigação, lembro-me de um interessante trabalho feito pelo Henrique e outra colega sobre "effect size" ("medida do efeito"), que foi depois usado como material de estudo para alunos de anos posteriores.

Havendo uma oportunidade para corrigir o nome do curso, tivemos diversas discussões e concordámos na designação de Mestrado em Didática da Matemática. Foi uma aposta arriscada, pois "didática" tem alguma conotação negativa, como um assunto muito prático e, por consequência, pouco interessante. Mas pareceu-nos que esta designação, muito usada em países de língua francesa, Alemanha e países nórdicos, era a que podia caraterizar melhor o campo de estudos que estávamos a desenvolver em Portugal. A designação tem funcionado muito bem. Embora o curso de mestrado em Didática da Matemática já não exista (foi inviabilizado pela existência dos Mestrados em Ensino como cursos de formação inicial de professores), a designação passou para o Doutoramento em Educação, onde Henrique Guimarães, já integrando o corpo docente da Faculdade de Ciências e, mais recentemente, o Instituto de Educação, foi professor, lecionando diversas disciplinas, orientando alunos e contribuindo para o seu desenvolvimento e projeção nacional e internacional.

Luís Saraiva

Conheci o Henrique na Faculdade de Ciências de Lisboa nos anos 80, éramos os dois docentes da mesma instituição, com bastantes interesses comuns, e daí nasceu uma amizade que perdurou uma vida. Colaborámos em projetos de interesse mútuo, o Henrique participou em eventos do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) e da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), eu participei em colóquios e reuniões da Associação de Professores de Matemática (APM). Muitas vezes comentávamos com tristeza como era possível duas instituições como a SPM e a APM, que têm objectivos que se completam, estarem tantas vezes em conflito. Muitas e de qualidade foram as participações do Henrique em Encontros e publicações do SNHM. Algumas estão mencionadas na nota sobre ele incluída no sítio da SPM.

Durante todo o período de doença, que se arrastou por vários anos, com múltiplas e complicadas operações, nunca lhe vi um momento de desânimo, antes houve sempre nele uma visão realista e positiva do futuro, nunca tendo deixado de tentar fazer o que achava importante. A doença existia e era bem real, mas havia muita coisa mais importante que o motivava. Muito conversámos telefonicamente e muitos projetos foram delineados — e alguns passados à prática. Outros não foram para a frente, mas eu comprometo-me a continuá-los.

Henrique foi uma pessoa de cultura, tinha uma atitude crítica sobre tudo o que enfrentamos, uma perspectiva global sobre a complexidade da vida. Os seus interesses cobriam uma vasta paleta de assuntos, desde o desporto, o cinema, a fotografia, a música, a literatura, as artes plásticas, aos temas sociais e políticos. Devo-lhe, entre outras coisas, a descoberta das maravilhosas missas de Joseph Haydn, bem como dos escritos de Paul Ceylan, considerado pelo New York Times Book Review possivelmente um dos maiores poetas europeus da 2.ª metade do século XX.

Fazem falta pessoas como ele, cuja personalidade e valor se impunham em si, sem vaidades, sem ostentações, sem organizações por detrás a empolar a sua ação e valor, contando apenas com o seu trabalho, e sempre com uma palavra amiga, sempre com uma sensata apreciação da situação analisada, por mais complexa e delicada que fosse. Pode dizer-se em relação a ele que, como Bento de Jesus Caraça, não receava o erro, pois estava sempre disposto a corrigi-lo.

É um exemplo que nos deve ficar de referência, nestes tempos conturbados que vivemos.

Será sempre lembrado com saudade e carinho por todos os que o conheceram.

Com Luís Saraiva (ao meio) e José Manuel Matos (à direita) no Complexo Interdisciplinar, Lisboa, 2013

Hugo Almeida

Só posso começar por referir-me à estima que por ele tenho – gosto do Professor Henrique! Conheci nele uma pessoa verdadeira e, com ele, tive o privilégio de aprender, trabalhar, conversar e refletir. O Professor gostava de refletir – chegar aos porquês das coisas ou aprofundar até onde conseguisse, fosse o tema um indivíduo, um conceito ou uma sociedade inteira.

Foi uma pessoa com "o coração no sítio", recordo-me que, em uma das primeiras aulas com o Professor, houve uma colega a queixar-se das pessoas – desabafava que ninguém ajudava ninguém. O Professor de sorriso largo e olhos brilhantes interveio, disse que ele tinha muita sorte porque, nos mais diversos acasos da vida, havia sempre alguém que lhe dava a mão! Identifiquei-me de imediato com aquela verdade, pensei que só assim seria porque o Professor, certamente, era daqueles que não olhava para o lado quando alguém precisava de ajuda. Homem bom, com o coração no sítio!

Nas aulas, transmitia-nos sempre o seu amor ao ensino, à Matemática, à descoberta e aos ensinamentos dos Mestres como Polya, Poincaré ou José Sebastião e Silva. Tinha orgulho no nosso papel de professores, considerava que a nossa missão é digna e nobre! Interessava-se pelos detalhes – certa vez questionou-me sobre quem eram o Marco e a Alice (nomes de personagens de uma tarefa que criei) e disse-me: — se os alunos não os conhecem de lado nenhum porquê criar esse ruído adicional? A tarefa já não tem desafio suficiente? Discutimos sobre isso e ficou-me a marca, a marca do que realmente era importante para o Professor: o Aluno! O que iria o aluno pensar? Como iria o aluno receber os desafios que lhe colocávamos?

O Professor Henrique Manuel Guimarães foi uma pessoa justa e corajosa! Certo dia, numa aula sua de Didática da Matemática do Mestrado em Ensino da Matemática, contei-lhe que, nas aulas de uma determinada cadeira na Faculdade de Ciências, o titular dessa cadeira costumava pedir-nos para prepararmos um conteúdo e apresentá-lo à turma e, aula após aula, com os seus comentários a quem ia ao quadro, humilhava os mestrandos – as minhas colegas costumavam terminar as apresentações a chorar e eu, quando foi a minha vez, a coisa ia correndo ainda pior… o Professor Henrique ficou chocado, sensibilizado e revoltado. Diligente e justo, o Professor pediu-nos que reduzíssemos a escrito os factos objetivos que ocorriam naquelas aulas, fez a ponte entre nós e os docentes com responsabilidade de coordenação no mestrado, levou a situação ao diretor da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e, em pouco tempo, aquele titular foi afastado e, no semestre seguinte reiniciámos a cadeira com outra Professora (Maria Cecília Ferreira), também ela uma Mestre.

Várias vezes ouvi o Professor Henrique a elogiar-nos, coletiva e individualmente valorizava o empenho e a qualidade, não tinha reservas em reconhecer o mérito alheio, foi um verdadeiro Mestre! Além de tudo isto o Professor era bem-disposto, afável e divertido, tinha curiosidade genuína pelo outro e pertencia aquela rara casta dos que sabem escutar. Identifico-me em muitas coisas com o carácter do Professor — concordámos que jogávamos na mesma equipa, com a reserva que eu colocava às suas preferências clubísticas duvidosas...

Exupéry escreveu algo como: quem parte nunca parte só, deixa um pouco de si, leva um pouco de nós… Obrigado Professor por deixar tanto de si em nós, mais fossem assim e menos nos sentiríamos sós…

Um Grande Abraço!

Foto de Henrique M. Guimarães

Cláudia Regina Flores

Escrever sobre Henrique é o que se espera. Henrique, como pessoa, como professor, como professor de professores e de matemática, como educador.... Henrique em tanto, entre tantos, entretanto. Não consigo falar do Henrique representado, imaginado, desejado, esperado, idealizado. Henrique que, em mim, sempre me foi tão de fora, tão de dentro, tão mistério, tão múltiplo... Escrevo, assim, sobre Henrique com aquilo que dele está em mim, com o que dele vejo em mim, com o que em mim guardo dele. Diz-me, Henrique:

Aqui Henrique. E eu Henrique, como posso eu Henrique saber de ti, como posso eu saber de ti, saber de tu Cláudia?*

Tanta tainha, que lembro amanhada no belo mercado de peixe. Tainha escalada tão boa, também me lembro bem. Lá no Pântano do Sul, julgo que foi. Em mesinha pequena de restaurante

As frases contendo o símbolo * são ditos escritos, trocados por mim e pelo Henrique, ao longo de nosso tempo vivido.

agradável e comida bonita. Tu à frente ou ao meu lado, não lembro bem.*

O prometido é devido, diz o povo que nunca se engana, dizem, não é bem assim digo eu, mas que há boa sabedoria em falas do povo, isso há. Digo eu e muita gente. E como nós também somos povo, também às vezes dizemos e sabemos, às vezes.*

E sendo bom, vou ver se hoje vou dar uma caminhada um pouco mais para tarde, num bom parque que se chama 'Quinta das Conchas' e que é muito perto da minha casa. E tem gente, crescida e pequena, para cima e para baixo, a passear e a brincar, entre as árvores, ou na relva, nas ruínas do parque, a subir ou a descer. É o tempo a passar, é como o tempo passa, neste caso na Quinta das Conchas.*

Hoje só o pequeno texto "quero que me chore, me chore, que me ria e me ria...*

Um professor que não é apenas professor-professor, mas um professor-etc. Henrique não é um professor em tempo integral; Henrique questiona a natureza e a função de ser professor, mas também do humano, a vida do humano e a vida das coisas, dos sentidos e dos sentimentos, a vida dos animais, das plantas. Daí que, parafraseando Ricardo Basbaum , a mim, o que reverbera é o etc.: Henrique-etc.

Que em um dia ensolarado de inverno brasileiro, convidativo a uma caminhada, eu agradeci por ter partes do Henrique em mim. Ele se despediu, agradeceu também, e se fez invisível.

Saudades que tenho também, que enchem mais que uma bola de estrelas pra soltar, a brilhar. Saudades, como a sede, são coisa pra matar, "matar saudades".*

Serhii Wakúlenko

Se se me pedisse para dizer o nome do meu melhor amigo de sempre, eu não teria hesitado nem um único segundo, porque a resposta já está dentro de mim desde há muito tempo: foi o Henrique Manuel Guimarães.

À pergunta: porquê? — já não seria tão fácil dar uma resposta razoável. Eram muitas as coisas que nos afastavam um do outro: ele, Português, eu, Ucraniano (ainda por cima oriundo quase da extremidade oriental do país, isto é, da outra beira da Europa); ele matemático, eu linguista e filólogo… Para cúmulo, ficámos amigos aos tantos anos da idade, quando as amizades com mais frequência se desfazem, não se fazem novas…

Foi a nossa amiga comum, a filósofa Olga Pombo da Universidade de Lisboa, quem nos proporcionou uma oportunidade para nos conhecermos, convidando-nos, junto com várias outras pessoas, a passar alguns dias do Verão de 2004, na sua Casa do Monte, perto de Mafra. Uns dias imensamente ricos em conversas, em discussões, em prazeres partilhados, entre os quais o principal foi aquele de mútuo entendimento.

Foi o Henrique, raramente separável da sua máquina fotográfica, quem documentou para todos nós esta experiência única, inspirada nos modelos de convívio já quase completamente extintos na nossa época mecano-computorizada. Ele, enquanto matemático, seria natural que devesse estar como peixe na água nesta espécie de admirável mundo novo que vai enchendo o nosso ambiente. E assim não foi. Tanto na matemática, sua profissão, como em todas as coisas da vida, desde as mais rudimentares até as mais complicadas, era o lado estético que lhe era, invariavelmente, o mais caro. Daí a sua paixão pela fotografia, daí a sua rara mestria no cozinhar, daí — parece — também o seu amor da Ucrânia, irrazoável e infatigável.

Não sei como lhe veio a ideia, em 2004, de ir dar, sozinho, uma grande volta à Ucrânia. A única explicação seria que a ânsia dos descobrimentos, entre os portugueses, nunca acaba. Depois de voltar a Portugal, contou-me as suas impressões e as suas experiências durante horas e horas na pequena casa à beira-mar, na Parede, onde eu então morava. Gosto de pensar que como eu em Portugal, também ele encontrou no meu país elementos daquela harmonia intrínseca que distinguem as coisas verdadeiras e genuínas das invenções falsas e estúpidas. Nos anos seguintes, fizemos já juntos várias viagens fantásticas nos nossos dois países natais. Na Ucrânia, o Henrique Manuel viu tantos lugares e tantos pormenores da vida e da civilização, como é raro ocorrer entre os próprios ucranianos. É um motivo de orgulho para mim ter-lhe assistido na organização de uma exposição das suas fotografias numa pequena cidade ucraniana com grande história e uma prestigiosa universidade, Ostrih, cidade de que se apaixonou logo à primeira vista. A exposição chamava-se Comboios vivos, era um testemunho vibrante da sua penetração no modo da vida dos ucranianos, colhida nas longas deslocações ferroviárias através das vastas planícies tão típicas do meu país.

Haverá também comboios celestes?

Com Serhii Wakúlenko, envergando camisas típicas ucranianas, na inauguração da exposição "Living trains" em Ostrih, 2018

APM 2023 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Faça-se sócio da APM! Atualize a sua quota!

Para se fazer sócio ou esclarecer qualquer dúvida contactar através de ***encomenda@apm.pt*** ou ***socio@apm.pt***

Modalidade de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP

e duas modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

A APM e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.º de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de associado da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos quatro números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF da Revista Educação e Matemática no nosso portal; todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas.

A revista Quadrante é publicada *online* (https://quadrante.apm.pt) e é de acesso livre.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem duas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Centro de Formação

O Centro de Formação da APM dinamiza e coordena ações de formação acreditadas como cursos, oficinas, seminários e projetos de formação, com **preços especiais para os sócios**. É também responsável pela organização de ações de formação de curta duração e outras ações não acreditadas. Procura ainda dar resposta a diversas solicitações dos sócios e das escolas.

Quotas anuais para 2023

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil: **as quotas, quando não são pagas por débito direto, deverão ser liquidadas durante o mês de janeiro.**

Modalidades de associado individual	2023
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio (residente em Portugal ou no estrangeiro)	42,50 €
Associado regular residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.° CEB)	50,00 €

** Poderão inscrever-se nestas modalidades, estudantes em formação inicial (licenciatura ou mestrado profissionalizante)*

Modalidades de associado institucional	2023
Modalidade I (1 exemplar da EeM)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da EeM)	95,00 €

Atualização de quota

Atualize a sua cota por transferência bancária usando o **IBAN: PT50003503250000664993010.** No descritivo da transferência coloque o seu número de sócio(a) e envie comprovativo de transferência para ***encomenda@apm.pt.***

Assinatura da revista *Educação e Matemática*

		3 números + 1 número duplo temático
Associado individual	Portugal	....
	Estrangeiro	....
Não associado individual	Portugal	50,00€
	Estrangeiro	70,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€
	Estrangeiro	95,00€

Preço de capa da revista *Educação e Matemática*

		Educação e Matemática
Associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€
Não associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€

índice

Editorial

01 **Representações múltiplas numa perspetiva de *matemática para todos***
Nélia Amado

Artigos

02 **Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática**
Nélia Amado

07 **O poder das representações múltiplas e suas conexões: teoria e prática no 3.º ano do novo programa de matemática**
Ana Paula Canavarro, Lina Brunheira, Manuela Vicente, Susana Brito

13 **Polígonos inscritos: do papel e lápis ao GeoGebra**
Carla Faneco, Nuno Valério

19 **As representações: escolhas eficazes na resolução de problemas**
Ana Barbosa, Isabel Vale

25 **Boas representações para uma boa comunicação**
Jaime Carvalho e Silva

30 **A derivada da função inversa – uma abordagem gráfica**
Carlos Albuquerque, Susana Carreira

33 **Novas aprendizagens essenciais no 1.º ano de escolaridade: representações múltiplas, números e pensamento computacional**
Célia Mestre, Cristina Martins, Cândida Tourais, Isabel Guerra

39 **Representações e raciocínio na aula de matemática**
João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Paula Gomes

47 **Descodificar e produzir diferentes representações**
Leonor Santos, Sandra Raposo, António Cardoso, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro

57 **Representações no ensino e aprendizagem da geometria – potencialidades e desafios**
Lina Brunheira

62 **Preparar e realizar aulas usando diversas representações matemáticas: um processo colaborativo**
Isabel Velez, João Pedro da Ponte, Maria de Lurdes Serrazina

67 **Representações no estudo das frações no 5.º ano de escolaridade**
Elvira Santos, Cristina Martins, Irene Martins, Susana Serra

76 **Representar para resolver!**
Sandra Nobre

79 **O poder das representações matemáticas na resolução de problemas de contagem**
Mónica Valadão, Nélia Amado, João Pedro da Ponte

Secções

17 **Pontos de vista, reações e ideias ...**
As representações em educação matemática, *Lurdes Serrazina*

29 **Materiais para a aula de matemática**
Dobragens numa folha de papel, *Nélia Amado*

38 **O problema deste número** *José Paulo Viana*
Lances livres

44 **Caderno de apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*
Representações dinâmicas e interativas com o GeoGebra — construir, ver, transformar, pensar e discutir, *Cristina Loureiro, Helena Moreira, Sónia Fernandes*

52 **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*
Diferentes representações no estudo de equações diferenciais *Nélia Amado, Maria Madalena Dullius, Jaime Carvalho e Silva*

71 **Espaço GTI - Grupo de trabalho de investigação da APM**
Processos de raciocínio espacial na articulação entre representações 3D e 2D *Joana Conceição, Margarida Rodrigues*

82 **Leituras**
A Representação nos "Princípios e Normas para a Matemática Escolar" *Cristina Martins, Manuel Vara Pires*

85 **Henrique Guimarães**
Ana Paula Canavarro, Cláudia Regina Flores, Fátima Alonso Guimarães, Hélia Oliveira, Hugo Almeida, Isabel Vale, João Pedro da Ponte, José Manuel Matos, Leonor Santos, Luís Saraiva, Lurdes Figueiral, Lurdes Serrazina, Serhii Wakúlenko.