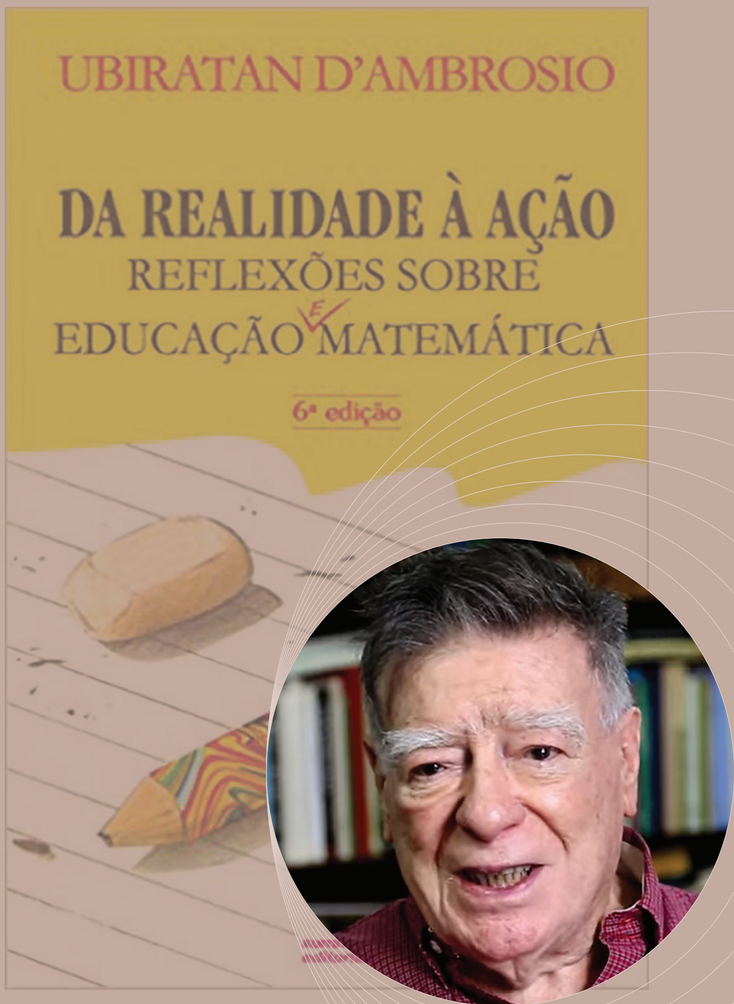
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



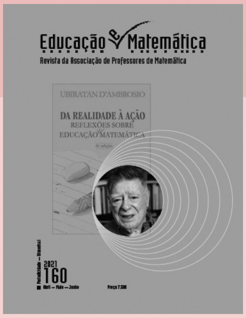
Periodicidade ∞ Trimestral

2021

160

Abril ∞ Maio ∞ Junho

Preço 7.50€



ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Editores	Ana Isabel Silvestre
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Elvira Santos
	Filipa Machado
	Helena Gil Guerreiro
	Irene Segurado
	João Terroso
	Manuela Pires
	Sílvia Zuzarte
	Teresa Olga Duarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
José Paulo Viana **O problema deste número**
Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Junho de 2021
Tiragem 1000 exemplares
Periodicidade Trimestral

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560-401 Silveira

Depósito Legal n.o 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871 – 7222
Porte Pago

Sobre a capa

A capa deste número não podia deixar de ser dedicada a Ubiratan. Ubiratan D' Ambrosio, claro, mas em Portugal tratamo-lo carinhosa e simplesmente por Ubiratan. O respeito e a consideração que lhe devemos advém do seu enorme contributo para a Educação Matemática, em boa parte traduzido nos seus textos e refletido nos louvores que recebeu. Mas o contributo de Ubiratan é indissociável da sua pessoa e da sua presença física. Ouvi-lo era uma experiência quase espiritual. As suas ideias inspiravam-nos a fazer melhor, a ser melhor. E essa inspiração deixou várias marcas, entre elas o nome da nossa revista. Como lembra, no seu artigo, Henrique Guimarães, um dos sócios fundadores da APM e da *Educação e Matemática*, "desse modo, como pretendíamos, se enunciavam e realçavam as principais áreas de intervenção da revista — Educação, Matemática e, como o "e" em sobrescrito bem salienta, Educação Matemática. E assim, em Janeiro de 1987, se publica o N.º 1 da revista, com o nome colhido do (sub)título do livro de Ubiratan. Hoje, 35 anos passados, ainda assim se mantém como uma espécie de herança de Ubiratan, e como lembrança."

Lina Brunheira
Diretora da *Educação e Matemática*

Neste número também colaboraram

Ana Paula Canavarro, António Domingos, Eduardo Cunha, Graça Pereira, Graciosa Veloso, Helder Martins, Henrique Manuel Guimarães, Jaime Carvalho e Silva, Joana Latas, João Pedro da Ponte, José Costa, José Paulo Viana, Luís Menezes, Lurdes Serrazina, Manuela Pires, Maria de Fátima De Jesus Simões, Misleine Andrade Ferreira Peel, Patrícia Damas Beites, Pedro Almeida, Raul Aparício Gonçalves e Teresa Moreira

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.

Novos desafios para a Matemática na escola

Parecem aproximar-se tempos de mudança no ensino da Matemática em Portugal. Na sequência das Recomendações elaboradas pelo Grupo de Trabalho da Matemática (GTM) estão agora em discussão pública as Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o ensino básico, esperando-se que, em breve, o mesmo aconteça para as do ensino secundário. Prevê-se que o documento "Aprendizagens Essenciais de Matemática" resultante deste processo de consulta pública, se constitua, após homologação pela tutela, como o documento orientador do currículo de Matemática no ensino básico. Saúda-se esta clarificação que acabará com os atuais equívocos resultantes da existência, em simultâneo, de diferentes documentos curriculares, por vezes com perspetivas contraditórias e que tem deixado para os professores uma difícil tarefa.

O documento agora em discussão apresenta no início uma ideia forte e inclusiva, referindo expressamente que a aprendizagem da Matemática é para todos, justificando-a numa perspetiva pessoal e social. Assume que todos têm o direito de poder usufruir dos aspetos culturais que o saber matemática proporciona e ao seu desenvolvimento pessoal e cognitivo resultante das experiências que a aprendizagem da matemática propicia. Acrescentando que a vivência numa sociedade cada vez mais tecnológica exige que todos os cidadãos desenvolvam aquilo que a OCDE refere como literacia matemática, indispensável para uma vivência em sociedade no século XXI. Realça-se ainda a articulação, ao longo do documento, das propostas apresentadas com o Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória.

A preocupação com uma aprendizagem significativa por todos os alunos reflete-se também quando o primeiro dos oito objetivos gerais enunciados para a aprendizagem da Matemática, que todos os alunos devem atingir, refere o desenvolvimento de uma predisposição positiva perante a disciplina. É ainda assumido o desenvolvimento de uma atitude de autoconfiança e do gosto por aprender Matemática, que é de realçar numa sociedade onde ainda se considera a Matemática como uma disciplina só acessível a alguns. Crença esta que foi reforçada nos últimos anos.

Para além dos tópicos matemáticos, às capacidades de resolução de problemas, de raciocinar e de comunicar matematicamente são agora acrescentadas as do pensamento computacional, utilização de representações múltiplas e de conexões matemáticas que vêm colocar novos desafios.

O documento dá um grande relevo às tecnologias designadamente às diferentes propostas sobre a sua inclusão no processo de ensino e aprendizagem, em todos os ciclos, a que não será indiferente a assunção que vivemos num mundo cada vez mais tecnológico. É disso exemplo, o facto do pensamento computacional ser apresentado como uma capacidade matemática, mas também as muitas referências à utilização de softwares específicos que vão aparecendo ao longo do texto. A apropriação do papel das tecnologias não apenas como um recurso, mas para fazer aprender é mais um desafio para os professores, acrescido pela ênfase que é dada ao desenvolvimento do pensamento computacional.

Para que o documento agora apresentado não seja mais um documento curricular e seja efetivamente o programa de Matemática, os responsáveis educativos (a diferentes níveis) e os professores têm grandes desafios pela frente. Desde logo, cabe aos responsáveis educativos responderem em tempo útil à criação de condições físicas objetivas para que o currículo proposto possa ser concretizado, nomeadamente a ligação das escolas a uma rede estável e robusta da Internet, a disponibilidade efetiva de recursos tecnológicos e outros. Também tem de acontecer a reorganização do trabalho dos professores na escola libertando-os de tarefas burocráticas, para poderem trabalhar, de modo colaborativo, com os seus pares. A apropriação de um novo documento curricular exige tempo e disponibilidade quer em termos individuais quer coletivos e todos os professores que ensinam Matemática têm de ter esse tempo. O ano letivo que se aproxima será fundamental para que em 2022 o novo currículo de Matemática efetivamente aconteça.

Experiências anteriores e resultados de investigação mostram a importância de contemplar no horário do professor um espaço semanal, comum ao restante grupo com quem mais diretamente trabalha, para planificação das aulas, nomeadamente seleção de tarefas, reflexão sobre a sua concretização e sobre as aprendizagens realizadas ou não pelos alunos. Este trabalho em colaboração é essencial, mas não suficiente. Mais uma vez, as lições do passado mostram a importância de haver estruturas de apoio supra escolas/agrupamentos, pois cada grupo de professores não pode ficar isolado. Neste processo todos os recursos existentes devem ser potenciados, daí ser fundamental o envolvimento das instituições de ensino superior que formam professores, à semelhança do que aconteceu em situações anteriores.

Como referido, a concretização de um currículo com a ambição do atualmente proposto implica colaboração a diferentes níveis. A existência de um programa nacional e universal de formação e acompanhamento do trabalho desenvolvido pelos professores nas escolas parece imprescindível.

Lurdes Serrazina

Questões de escolha múltipla

Escolher uma das quatro alternativas (A, B, C ou D) para cada uma das cinco afirmações seguintes de modo que todas elas sejam verdadeiras.

1. O número de afirmações com resposta D é:
   A) 3 B) 2 C) 1 D) 0
2. A resposta a esta questão é:
   A) A B) B C) C D) D
3. Esta afirmação tem a mesma resposta que a questão
   A) 5 B) 4 C) 1 D) 2
4. A primeira resposta B aparece na pergunta:
   A) 5 B) 4 C) 2 D) 3
5. As duas únicas questões consecutivas com a mesma resposta são:
   A) 3 e 4 B) 4 e 5 C) 2 e 3 D) 1 e 2

(**Respostas até 10 de setembro**, para *zepaulo46@gmail.com*)

DIFERENTES CLASSIFICAÇÕES

O problema proposto no número 158 de E*ducação e Matemática* foi o seguinte:

> *Aquele teste foi feito por 11 alunos. As classificações, na escala de 0 a 200, foram todas diferentes, sendo 51 a mais baixa e 182 a mais alta. A média foi exatamente 110.*
> *Se ordenarmos as classificações, qual é o intervalo de valores em que pode estar a nota do aluno que ocupa a posição central?*

Recebemos 14 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carla Faria (Guimarães), Carlos Dias (Silveira), Eduardo Oliveira (Guimarães), Gonçalo Rodrigues (Guimarães), Isabel Viana (Porto), João Oliveira (Ponte da Barca), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Paulo Ferreira (Espinho), Pedro Faria (Torres Novas), Susana Dias (Torres Novas) e a equipa Sara Raquel & Carmen Silva (Torres Novas).

As estratégias usadas pelos nossos leitores foram muito semelhantes e todos começaram por calcular a soma das classificações desconhecidas.

Como a média é 110, o total das onze notas é

$$110\times11=1210$$

A soma das nove classificações desconhecidas é

$$1210-51-182=977$$

Representemos por C a classificação central, que corresponde à mediana de todas as notas (tem cinco classificações abaixo dela e outras cinco acima).

Se as classificações abaixo de C forem as menores possíveis (51, 52, 53, 54, 55) o valor mínimo de C será 56.

Se as classificações acima de C forem as maiores possíveis (178, 179, 180, 181, 182) o valor mínimo de C será 177. Ou seja, C poderá estar entre 56 e 177.

Valor mínimo

Poderá ser realmente 56? – pergunta o Mário Roque. – *A resposta é sim.*

Sendo as classificações abaixo de C as menores possíveis, para as quatro desconhecidas acima da mediana sobram:

$$977-52-53-54-55-56=707$$

Temos de distribuir estes 707 pontos por quatro valores diferentes entre 57 e 181, inclusive. Há várias possibilidades. Uma delas é fazer três deles "encostados" à nota máxima e completar com o que falta para 707:

$$707-181-180-179=167$$

Portanto, uma solução será:

51-52-53-54-55-**56**-167-179-180-181-182

Valor máximo

Poderá ser realmente 177? A resposta é não.

Se fosse 177, as quatro notas desconhecidas abaixo dela teriam um total de

$$977-177-178-179-180-181=83$$

Ora, não se consegue arranjar quatro valores, todos superiores a 51, com esta soma.

Como sugere o João Oliveira, as cinco classificações abaixo da mediana têm de ser as menores possíveis (51, 52, 53, 54, 55) para que C seja a maior. A mediana e as quatro notas desconhecidas terão um total de:

$$977-52-53-54-55=763$$

Como mostrou o Gonçalo Rodrigues, a mediana 151 não serve porque 151+152+153+154+155 ultrapassa 763, mas 150 já dá. Uma das soluções possíveis é:

51-52-53-54-55-**150**-151-152-153-157-182

O intervalo de variação do valor central é $56\leq C\leq150$.

O Paulo Ferreira fez depois um programa de computador em Python para testar um número astronómico de possibilidades de distribuição das classificações e, claro, apenas confirmou o que já sabia.

Novas orientações curriculares de Matemática do Ensino Básico

Ana Paula Canavarro

ENQUADRAMENTO

Em março de 2020, o Grupo de Trabalho em Matemática (GTM) constituído[1] com a missão de produzir um estudo sobre a evolução dos currículos de Matemática em Portugal, produziu 22 recomendações dirigidas à melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática em Portugal. A primeira destas recomendações apontou a necessidade urgente de racionalização da situação dos atuais documentos curriculares em Matemática, recomendando a existência de um novo currículo de Matemática, global e alinhado:

> "É urgente a elaboração de um novo currículo de Matemática para todos os ciclos de escolaridade (do 1.º Ciclo do Ensino Básico até ao final do Ensino Secundário). Este currículo deverá substituir todos os Programas de Matemática em vigor, em particular o Programa e as Metas Curriculares, bem como as Orientações de Gestão Curricular e as Aprendizagens Essenciais que deles decorreram.
>
> A elaboração deste currículo deve tomar em consideração a experiência curricular adquirida em Portugal nas últimas décadas. Por tal, é imperioso que o novo currículo mantenha o alinhamento com as orientações nacionais naquilo em que estas evoluíram consistentemente, em especial na valorização de conhecimentos, capacidades e atitudes, ficando assim em sintonia com o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, proposta curricular basilar que aponta um horizonte nacional adequado.
>
> O novo currículo deve ainda considerar orientações curriculares internacionais inspiradoras de países cujos alunos apresentam resultados elevados nos estudos comparativos em Matemática.
>
> A elaboração de um novo currículo permitirá criar condições para garantir a qualidade de um currículo nacional de Matemática e, subsidiariamente, eliminar a profusão e a disparidade de documentos curriculares nacionais dirigidos ao ensino da Matemática que atualmente coexistem." (GTM, 2020, p. 293)

As razões de tal proposta estão amplamente explicadas no relatório do GTM, que pode ser consultado no site da Direção Geral de Educação (DGE).

Uns meses depois, a tutela decidiu dar sequência a esta proposta. Para o efeito, e no que diz respeito ao Ensino Básico, constituiu um Grupo de Trabalho com a missão de realizar a revisão curricular em Matemática. Esta revisão consiste, numa primeira fase, em elaborar novas orientações curriculares em sintonia com as recomendações do GTM, totalmente independentes do programa de Matemática em vigor e autossuficientes, de modo a poderem vir a constituir-se como único normativo curricular no que à Matemática diz respeito. Quis a tutela que estas novas orientações curriculares fossem expressas na forma dos documentos das *Aprendizagens Essenciais* (AE), radicando a opção por este formato na valorização da ligação com o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017).

É a esta proposta de novas orientações curriculares de Matemática que se refere este artigo. Espera-se que, após a revisão resultante da discussão pública[2] em curso no momento em que este artigo é escrito, os documentos finais sejam homologados e entrem em vigor no ano letivo de 2022/23. Este calendário permitirá não só a produção dos novos manuais escolares, respeitantes a estas novas orientações curriculares, como também a formação de professores que sempre se revela necessária em qualquer processo de renovação curricular. A produção de manuais escolares adequados e a formação de professores focada no desenvolvimento curricular das novas orientações curriculares corresponderá à segunda fase prevista do processo de revisão curricular agora em andamento.

O Grupo de Trabalho que procedeu à elaboração destas novas orientações de Matemática para o Ensino Básico é constituído[3] por onze elementos, com perfis diversificados. Importa referir que este novo Grupo de Trabalho inclui quatro elementos que pertenceram à equipa do GTM, facilitando a mobilização, para o trabalho em curso, do saber produzido para a elaboração do relatório de 2020. Importa também clarificar que, no seu conjunto, este novo Grupo de Trabalho combina, em número equilibrado, professores com experiência de ensino de Matemática nos diferentes ciclos de escolaridade do Ensino Básico, educadores matemáticos que atuam na investigação e formação inicial/contínua de professores dos diferentes níveis de escolaridade e matemáticos especialistas em diferentes áreas em que se ancoram estes documentos curriculares (Álgebra, Estatística e Geometria). A diversidade de formações e experiências profissionais dos elementos da equipa foi assumida como critério fundamental na sua constituição e revelou o seu valor na produção do trabalho.

1Despachos n.º 12 530/2018 e n.º 7269/2019

2Discussão pública entre 2 e 25 de junho de 2021

3 Ana Paula Canavarro (Coordenadora), Célia Mestre, Dulce Gomes, Elvira Santos, Leonor Santos, Lina Brunheira, Manuela Vicente, Maria João Gouveia, Paulo Correia, Pedro Macias Marques, Rui Gonçalo Espadeiro.

PRINCÍPIOS E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Os princípios que orientam estas orientações curriculares devem ser expostos, pois são eles que permitem perceber a racionalidade das opções curriculares tomadas a diversos níveis.

"Matemática para todos/as" corresponde ao primeiro princípio assumido nesta proposta. Por um lado, todas as crianças e jovens têm o direito a aprender Matemática, um património científico e cultural indispensável para melhor conhecer, compreender e atuar no mundo em que vivem, prosseguir estudos, aceder a uma profissão e exercer uma cidadania democrática. Por outro lado, as sociedades precisam de indivíduos matematicamente literados, capazes de raciocinar matematicamente e formular, empregar e interpretar a Matemática para resolver problemas numa variedade de contextos do mundo real, e assim viver e atuar de modo informado, contributivo, autónomo e responsável.

Assumir o princípio da Matemática para todos/as tem consequências a nível da proposta curricular. A possibilidade de aprendizagem é em grande medida acompanhada pelo desenvolvimento de uma predisposição positiva para essa aprendizagem. Para que todos os alunos possam desenvolver uma predisposição positiva para aprender Matemática, existem três condições essenciais que devem ter: 1) acesso a uma experiência matemática a que possam dar sentido, construída com base na compreensão das ideias; 2) oportunidade de desenvolverem o gosto e a autoconfiança na capacidade de lidar com situações matemáticas, que desejavelmente deve aumentar (e não diminuir, como revela o TIMSS 2019 para a Matemática em Portugal) à medida que aprendem mais; 3) oportunidade de reconhecerem o valor do saber matemático que aprendem.

Por isso nestes documentos curriculares se encontra a preocupação com a exploração de situações que promovam a compreensão da Matemática pelos alunos, com a abordagem aos conceitos por aproximações sucessivas e com progressivos níveis de formalização que se vão aprofundando em diferentes anos/ciclos, tirando partido quer das conexões internas que permitem ver a Matemática como um todo coerente, quer das conexões externas com contextos que permitem expor e evidenciar a relevância da Matemática. Os alunos não aprendem melhor quando se quer que aprendam tudo de uma só vez, nem em tópicos isolados que se treinam até à suposta/temporária consolidação.

"Matemática é única, mas não é a única" corresponde a outro princípio assumido nesta proposta. Por um lado, a Matemática possui características específicas que fazem com que se distinga de todas as outras ciências, proporcionando aprendizagens específicas aos alunos, nomeadamente no que diz respeito ao desenvolvimento de determinados tipos de raciocínio. Por outro lado, em especial na educação básica, o valor da aprendizagem da Matemática é tanto maior quanto mais ela conseguir contribuir para uma educação integral do indivíduo. A Matemática deve servir o currículo global, tal como todas as outras áreas disciplinares, numa lógica de diálogo interdisciplinar.

Assumir este princípio tem também consequências a nível da proposta curricular apresentada. Ele implica que a Matemática seja perspetivada considerando o desenvolvimento que se deseja que todos os alunos atinjam. Para tal, a Matemática precisa de considerar o referencial do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017) e identificar como melhor para ele pode efetivamente contribuir. Precisa também de se pôr em relação com as outras áreas curriculares, tirando partido das conexões que reforçam a relevância dos saberes múltiplos para uma educação integral e global.

Por isso nestes documentos curriculares se encontra a preocupação com o desenvolvimento de capacidades e atitudes transversais (não disciplinares) que decorrem da identificação de áreas de competência do *Perfil dos Alunos* que de forma natural e produtiva se podem associar ao trabalho em Matemática, como é o caso do pensamento crítico, da criatividade, da colaboração e da autorregulação, no que diz respeito às capacidades transversais, ou da autoconfiança, perseverança, autonomia e valorização do papel do saber (matemático), no que diz respeito às atitudes transversais. A Matemática não presta melhor serviço se for encarada como uma bolha dourada, com um estatuto de deferência, independente do contributo que possa proporcionar a uma educação global dos alunos.

"Matemática no século XXI" corresponde ao terceiro princípio adotado nestas orientações curriculares. Como alertam diversas entidades internacionais ligadas à Educação, como a OCDE, a atualidade assiste ao aparecimento constante de novos desafios e problemas, num mundo marcado por acentuadas mudanças impulsionadas sobretudo pelo desenvolvimento tecnológico, tendo por certeza o incerto. Neste cenário, a educação matemática tem de conseguir eleger como focos privilegiados de aprendizagem dos alunos aqueles que melhor contribuem para a sua preparação para lidar com a complexidade dos desafios atuais.

Assumir este princípio tem também consequências a nível da proposta curricular apresentada. Por um lado, o domínio, per si, de conhecimento meramente declarativo e a execução de procedimentos que podem ser atualmente desempenhados, com vantagem, por máquinas está diariamente a perder relevância. Por outro lado, torna-se cada vez mais premente ser capaz de lidar com situações complexas, destacando-se o valor da Matemática como ferramenta para "descrever, explicar e prever fenómenos" e na ajuda a "formular juízos e decisões bem fundamentados, como se espera de cidadãos do século XXI participativos, empenhados e reflexivos" *(https://pisa2021-maths.oecd.org/pt/index.html).*

Por isso nestes documentos curriculares se valorizam as capacidades matemáticas e os conhecimentos matemáticos que as assistem para interpretar as situações do mundo real e outras áreas de conhecimento diversas. Designam-se por capacidades matemáticas a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, as representações matemáticas e as conexões matemáticas. Esta enunciação corresponde aos cinco processos matemáticos (NCTM, 2007) que em Portugal temos vindo a designar por capacidades transversais pelo facto de se poderem usar em quaisquer domínios de conhecimento matemático, como a Geometria ou Álgebra. A opção de nas presentes orientações curriculares se designarem estas capacidades por capacidades matemáticas procura sublinhar que correspondem, de facto, a conteúdos matemáticos que não podem deixar de se considerar seriamente — e, além disso, permite reservar o termo transversal para as capacidades anteriormente referidas, incluídas no referencial do *Perfil dos Alunos*. Ao leque de capacidades matemáticas referidas, estas orientações curriculares acrescentam o pensamento computacional, que recorre a práticas matemáticas que permitem resolver problemas por processos computáveis, favorecendo o contacto dos alunos com o que subjaz à opacidade da realidade tecnológica, num mundo onde se tornou tão relevante a literacia digital.

O princípio da "Matemática no século XXI" implica também selecionar criteriosamente os conhecimentos matemáticos a abordar, sendo necessário ter a coragem de deixar para trás alguns que eram vistos como imprescindíveis e de destacar outros que antes pareciam secundários. Importa que os alunos consigam compreender e usar, de forma fluente e rigorosa, com significado e em situações diversas, conceitos, procedimentos e métodos dos domínios dos Números, Álgebra, Dados e Probabilidades, Geometria e Medida. A Matemática não presta melhor serviço se persistir no ensino de conhecimentos cuja relevância está ultrapassada, seja pela existência de recursos tecnológicos disponíveis, seja pela transformação da forma como se vive e das situações a que tem de se dar resposta.

Estes três princípios, combinados, têm naturalmente consequências nas orientações metodológicas globais que esta proposta curricular apresenta. Destas orientações, que se preconizam em todos os conteúdos e ciclos/anos de escolaridade, destacam-se as seguintes: 1) abordagem articulada aos conteúdos que mobilize, em simultâneo, conhecimentos de diversos domínios, potenciando as aprendizagens em momentos diversos e rentabilizando o tempo de ensino; 2) exploração de tarefas desafiantes, no contexto matemático ou exterior a ela, que motivem o interesse dos alunos e proporcionem uma experiência matemática significativa, diferenciada e relevante; 3) recurso a tecnologia potente, que amplie a atividade matemática que os alunos podem ter e a torne compatível com os dispositivos que os alunos usam diariamente fora da sala de aula; 4) implicação dos alunos nos processos de construção de conhecimento de modo a incentivar a sua agência, autonomia e possibilidade de autorregulação. Por isso esta proposta curricular apresenta múltiplas indicações sobre abordagens aos conteúdos, tipos de tarefas a explorar, modos de trabalho e dinâmica da sala de aula a promover, uso de recursos, papel dos alunos.

CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS E SEU FOCO

Esta proposta curricular procura eleger, como indicado, os conhecimentos matemáticos que são relevantes na atualidade. A maioria dos conhecimentos permanecem em continuidade com programas anteriores, embora possam ver alterada a ênfase com que são abordados.

O domínio *Números* apresenta a valorização do sentido de número, do cálculo mental e do saber lidar criticamente com estimativas e valores aproximados, dando relevância ao conhecimento dos números e das operações para resolver problemas matemáticos em contexto e com tecnologia. Por isso, por exemplo, se exclui desta proposta curricular a realização manual de algoritmos que envolvam valores adequados ao uso de recursos tecnológicos, embora se inclua a compreensão de como funcionam algoritmos.

O domínio *Álgebra* valoriza a compreensão da variação em situações diversas, a identificação de relações matemáticas, o expressar a generalidade por representações adequadas e o uso do processo de modelar para descrever e fazer previsões. O pensamento algébrico surge desde o 1.º ciclo, com ênfase numa abordagem de aritmética generalizada. Por isso, por exemplo, se inclui nesta proposta curricular que sejam os alunos a reconhecer e explicar as propriedades das operações, que devem conseguir usar com fluência para agilizar o cálculo mental.

O domínio *Dados e Probabilidades* valoriza o desenvolvimento da literacia estatística e do raciocínio probabilístico desde os primeiros anos. Propõe a realização de investigações estatísticas por parte dos alunos (usar dados para conhecer o que nos rodeia e/ou interessa, fundamentar decisões e colocar novas questões, lidar com a incerteza), em contextos da realidade e usando tecnologia. Por isso, por exemplo, se inclui nesta proposta curricular a análise crítica de infográficos ou a sua produção criativa e rigorosa para comunicar e discutir os resultados de um estudo.

O domínio *Geometria e Medida* valoriza o raciocínio espacial, com ênfase na visualização e na orientação espacial, a partir das explorações dos alunos e inclusão de novos objetos geométricos habitualmente não tratados. Propõe a comparação, estimação e determinação de medidas em vários contextos em que adquiram utilidade. Por isso, por exemplo, no que diz respeito ao 1.º Ciclo, esta proposta curricular prescinde do tópico de conversões entre unidades diversas de medida de grandezas que não são praticamente usadas hoje em dia.

ORGANIZAÇÃO DOS DOCUMENTOS CURRICULARES

As orientações curriculares foram expressas, como explicado, no formato dos documentos das Aprendizagens Essenciais. Existe, portanto, um documento por ano de escolaridade, embora tenham sido produzidos respeitando a lógica de ciclo de escolaridade e a articulação vertical entre os mesmos. Sendo produzidos para se constituírem, repito, como documentos autónomos e autossuficientes, implicaram a inclusão de um conjunto de elementos, os mesmos que normalmente estão contemplados em programas disciplinares, nas diversas partes que os compõem. A parte inicial dos documentos corresponde a uma introdução, comum a todos os ciclos/anos de escolaridade (a menos de detalhes e exemplos). Nela se expõem o racional da proposta, incluindo-se os objetivos da aprendizagem da Matemática, os respetivos conteúdos de aprendizagem, as orientações metodológicas globais e as orientações para a avaliação das aprendizagens dos alunos.

Segue-se a segunda parte dos documentos, organizada em quatro colunas (figura 1), formato em que se concretizam cinco secções que se repetem em cada ano. A primeira diz respeito às capacidades matemáticas, afirmando assim que estas constituem objetos de aprendizagem que se detalham, e as quatro seguintes dizem respeito a cada um dos domínios de conhecimento matemático anteriormente referidos. Os conteúdos adotados para as quatro colunas seguiram de perto a proposta inicial do Mistério da Educação para os documentos das *Aprendizagens Essenciais* lançados em 2018, uma vez que se considerou servirem bem os propósitos de um programa. Assim, a primeira coluna discrimina os conhecimentos, tópicos e subtópicos, relativos a cada uma das cinco secções. A segunda coluna define os objetivos de aprendizagem para todos os alunos, considerando capacidades/conhecimentos matemáticos interligados. A terceira coluna indica ações estratégicas de ensino que se consideram adequadas ao(s) objetivo(s) correspondente(s), correspondendo a orientações metodológicas mais finas. É também nesta coluna que se contemplam as referências às capacidades e atitudes transversais do *Perfil dos Alunos*, cujo desenvolvimento se torna possível essencialmente através da forma como se trabalha em sala de aula com os alunos — por isso esta opção. Esta coluna, sem dúvida a mais extensa de todos os documentos, inclui também exemplos para clarificação e ilustração das orientações metodológicas a que diz respeito. A quarta coluna explicita, por tópico, diferentes áreas de competências do *Perfil dos Alunos* que podem ser mobilizadas se forem adotadas as indicações metodológicas da proposta. Esta explicitação pretende dar visibilidade a como a Matemática se pode relacionar com *Perfil dos Alunos* e prestar o seu contributo para uma educação mais integral e global.

Certamente que estes documentos curriculares constituem um desafio. Sendo a sua versão final homologada, será necessário um investimento por parte de todos, apoiado por formação e trabalho em colaboração, que favoreça que as crianças portuguesas tenham acesso a uma educação matemática ajustada aos atuais requisitos que o século XXI está a impor. Uma nota final para dar conta de que diversos países têm presentemente em progresso processos de revisão curricular em Matemática. Se tudo está a mudar, como poderiam não evoluir as orientações curriculares para a Matemática?

Comunicação e divulgação do estudo			A, B, E, F, H, I
Público-alvo e recursos para a comunicação oral e escrita	Decidir a quem divulgar o estudo realizado e elaborar diferentes recursos de comunicação de modo a divulgá-lo de forma rigorosa, eficaz e não enganadora. Divulgar o estudo, contando a história que está por detrás dos dados e levantando questões emergentes para estudos futuros.	Apoiar e acompanhar o desenvolvimento, em grupo, do estudo estatístico, nomeadamente a sua divulgação, reservando momentos de trabalho na sala de aula para este fim. Promover a discussão com toda a turma sobre a quem divulgar as conclusões e novas questões que emergem do estudo, incentivando a curiosidade. Dar autonomia aos alunos para escolherem o modo de comunicação/divulgação dos seus resultados apoiando-os na preparação dessa comunicação que incluirá a realização de um documento de apoio [Exemplo: Escrita de um relatório, elaboração de um poster, criação de um infográfico]. Sensibilizar para aspetos centrais, como a relevância da informação selecionada. Promover a discussão coletiva sobre os elementos indispensáveis a considerar na comunicação, ouvindo as ideias dos alunos e valorizando o espírito de síntese e o rigor para uma boa comunicação. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, a acontecer na sala de aula ou em outros espaços da escola/agrupamento, incentivando o gosto e autoconfiança na atividade matemática e promovendo a capacidade de trabalhar em equipa.	
Análise crítica da comunicação	Analisar criticamente a comunicação de estudos estatísticos realizados nos media, desenvolvendo a literacia estatística.	Propor a análise, em grupo, de notícias relativas a estudos estatísticos acessíveis que surjam nos media, incentivando a autonomia dos alunos, e suscitar a discussão da história que contam, a identificação de elementos omissos, o levantamento do que deixam por contar.	

Figura 1. Excerto de documento curricular do 3.º Ciclo/9.º ano de escolaridade.

Referências

GTM (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática.* https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Estudos_Relatorios/gtm_27_03_2020_relatorio_final.pdf

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.* Lisboa: Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

[NCTM] National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Tradução portuguesa dos *Principles and Standards for School Mathematics,* 2000). Lisboa: APM.

Ana Paula Canavarro

Universidade de Évora

Propagação da doença

Manuela Pires

A PRIMEIRA AULA

Durante vários anos, na aula de apresentação nas novas turmas, 7.º ou 10.º anos, levávamos o saco das calculadoras gráficas (no 7.º ano, a codocência da Margarida era imprescindível para tudo correr bem), cada aluno ficava com uma e experimentava a instrução *rand int (1, n.º total de alunos, 1)* para obter um número aleatório. Dentro do saco havia sobretudo TI 83 e 84 e acontecia que em algumas saía a mesma sequência de números. Para obviar este problema, cada aluno inseria um número diferente, normalmente o número de telefone e armazenavam esse número em *rand*. Atualmente no modelo *TI-Nspire CX* usam o comando *randseed*, seguido de um número. Assim, o gerador de números já dá origem a sequências diferentes. Quando todos dominavam a instrução, a experiência começava a sério. Como uma grande parte não se conhecia entre si, quando era tirado o número de um aluno, este fazia uma pequena apresentação: nome, escola de onde vem, turma. No último 10.º ano que tive, perguntei também o que mais tinham gostado de fazer nas férias de verão. Vários referiram a praia com os amigos, três alunas o encontro nacional de escuteiros, muitos as viagens com os pais… O convívio bem no alto das preferências. É o que perdem os nossos jovens nestes tempos de pandemia. No 12.º ano repetia a simulação com o objetivo de trabalhar a função logística.

Começava por dizer que íamos fazer uma simulação sobre a propagação de uma doença num espaço fechado como o da sala de aula em que, a cada minuto, um aluno doente infeta um e um só colega. Para saber quem é o primeiro doente, o professor obtém aleatoriamente um número. O aluno com esse número de ordem levanta-se, faz a apresentação que se combinar, sendo ele o primeiro a contrair a doença.

O aluno doente obtém um novo número aleatório que corresponderá a um novo doente, o qual também ficará de pé. Em cada simulação, cada aluno doente tira aleatoriamente um único número, que corresponderá ao colega que ele irá contaminar, repetindo-se o procedimento anterior. Pode acontecer que o número obtido corresponda a um aluno já contaminado, não dando origem a um novo doente.

Antes de começar a experiência, temos que preparar bem os registos, pois às tantas fica uma grande animação. Costumo também perguntar qual é a estimativa que fazem de quantos minutos são necessários para ficarem todos doentes, para no final discutir o que os levou a pensar naquele valor.

Num dos lados do quadro desenha-se uma tabela com 3 colunas: Minutos; Número de novos doentes e Número total de doentes (figura 1) e, no outro lado, escrevem-se os números de todos os alunos da turma (figura 2).

Em cada uma das simulações, cortam-se os números na lista e registam-se os dados na tabela. A tabela da figura 1 corresponde a uma das simulações feita numa turma do 12.º ano com 28 alunos. Ao fim de 5 minutos estão 9 alunos infetados, que estão de pé e tiram 9 números aleatórios, mas alguns dos alunos já estavam doentes, pois no 6.º minuto temos apenas 4 novos doentes: os números 8; 9; 17 e 26. Depois de fazer o registo na tabela não nos podemos esquecer de traçar os números para, em cada simulação, ser sempre visível o número de novos doentes.

minutos	N.º de novos doentes	N.º total de doentes
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	3	6
5	3	9
6	4	13
7	6	19
8	6	25
9	2	27
10	0	27
11	1	28

Figura 1. Tabela com os dados da experiência

~~1~~ 2 3 ~~4~~ ~~5~~ 6 7

8 9 10 11 12 ~~13~~ 14

~~15~~ 16 17 18 ~~19~~ 20 ~~21~~

22 23 ~~24~~ 25 26 27 ~~28~~

Figura 2. Números dos alunos da turma

Usualmente a recolha direta de dados permite uma melhor compreensão das situações. Neste caso, é visível que no início o aumento do n.º de doentes é lento e que há uma altura em que esse crescimento é rápido. Mas, quando já há muitos doentes, a contaminação é mais difícil. Há muitos números que correspondem a alunos já contaminados e o n.º de novos doentes começa a ser menor. Nessa altura é usual os alunos trocarem de posição e os alunos sãos levantam-se, enquanto os doentes se sentam. Nesta turma aconteceu que ao 10.º minuto nenhum novo aluno foi contaminado e estavam todos a tentar contaminar o único aluno que estava são e de pé. Ninguém esquece quem foi o resistente.

Terminada a experiência, introduzem-se os dados das duas primeiras colunas na folha de cálculo da calculadora. Na 3.ª coluna faz-se a soma acumulada, que corresponde ao n.º total de doentes em cada minuto, dando a instrução da calculadora que se vê na figura 3.

Depois fazem-se os gráficos de dispersão do n.º de novos doentes e do n.º total de doentes, separados e juntos (figura 4) para melhor se ver a relação entre o que acontece no ponto que corresponde ao máximo do n.º de novos doentes, com o ponto em que muda a forma como cresce a curva do n.º total de doentes. A projeção dos gráficos no quadro permite a discussão conjunta sobre as variáveis e as caraterísticas dos gráficos.

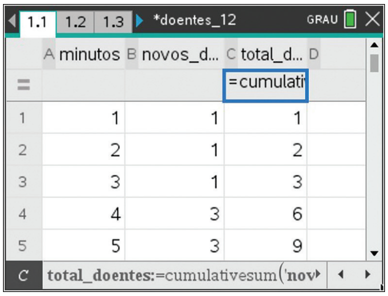


Figura 3. Listas de dados na calculadora

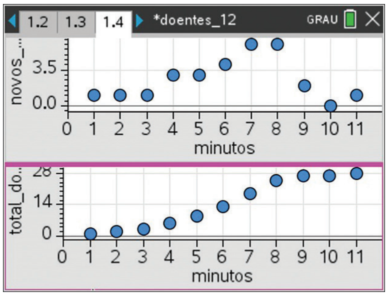


Figura 4. Gráficos do número de novos doentes e do número total de doentes

PROPAGAÇÃO DE UMA DOENÇA

Considera o número total de alunos na aula. Supõe que no primeiro minuto adoece um aluno e que, em cada um dos minutos que seguem, cada aluno doente contamina um outro.

Simulação:

1. Todos os alunos têm uma calculadora para obter números aleatórios com a instrução **rand int (1, nº total de alunos, 1).**
2. Num lado do quadro escrevem-se os números dos alunos. No outro lado faz-se uma tabela com 3 colunas: Número de minutos; Número de novos doentes; Número total de doentes.
3. O professor tira o primeiro número aleatoriamente. O aluno com esse número de ordem levanta-se, sendo ele o primeiro a contrair a doença.
4. Esse aluno tira um novo número aleatório que corresponderá a um novo doente, o qual também ficará de pé.
5. Cada aluno doente tira aleatoriamente, em cada simulação, um novo e único número, que corresponderá ao colega que ele irá contaminar, repetindo-se o procedimento anterior. Pode acontecer que o número obtido corresponda a um aluno já contaminado, não dando origem a um novo doente.
6. Em cada uma das simulações, corta-se o(s) número(s) na lista do quadro e registam-se os dados na tabela.

Tratamento de dados

1. Introduz os dados em duas listas, número de minutos e número de novos doentes em cada minuto.
2. Numa 3.ª lista faz a soma acumulada do número de novos doentes.
3. Visualiza graficamente os dados correspondentes ao número de novos doentes em cada minuto.
4. Ao fim de quantos minutos estariam todos doentes?
5. Que tipo de distribuição observas?
6. Considera agora o número total de alunos doentes em cada um dos minutos.
   6.1. Representa graficamente os dados.
   6.2. Encontra uma função que modele a situação.

Procurando uma equação para os dados

Os dados podem ser modelados com uma equação logística da forma $y=\dfrac{A}{1+B^{x-C}}+D$, sendo B um número real tal que $0<B<1$.

1. O valor de D representa o deslocamento vertical. Como os nossos dados começam basicamente próximo do zero, não temos deslocamento vertical. Com base nesta informação, regista o valor de D.
2. O valor de A representa a diferença entre os valores inicial e final. Regista o valor de A correspondente à simulação que fizemos. Qual o seu significado no nosso contexto?
3. C representa o valor para o qual se verifica um aumento mais rápido. A partir do gráfico, estima o valor de C e regista-o.
4. Substituindo A, C e D pelos valores que encontraste e atribuindo a B um valor entre 0 e 1, visualiza o gráfico da função $y=\dfrac{A}{1+B^{x-C}}+D$. Ajusta o valor de B e, quando te parecer adequado, regista-o.
5. Faz a regressão logística do conjunto de dados desta simulação e compara as duas expressões que obtiveste.

Figura 5. Tarefa proposta no 12.º ano

Quanto maior for o grupo em que se faz a simulação, mais perfeitas ficam as curvas, com o gráfico do n.º de novos doentes a ficar com uma bela forma de sino, mas esta é uma boa experiência com o número de alunos que usualmente temos nas turmas.

Nas aulas de apresentação, pretendia passar a mensagem de que algumas vezes iriamos fazer experiências de formas simples e interpretá-las e que a calculadora iria estar presente na aula de matemática, pois é um bom auxiliar. No 12.º ano pretendia trabalhar a modelação com a função logística (figura 5), como se vê em seguida.

ENCONTRAR UMA FUNÇÃO PARA OS DADOS

A procura manual de uma função que se adeque aos dados permite compreender o seu significado.

Consideremos o modelo:

$y=\dfrac{A}{1+B^{x-C}}+D$, sendo B um número real, tal que $0<B<1$.

Neste caso, podem-se determinar os valores dos parâmetros D, A e C, seguindo as sugestões da proposta de trabalho. Como a turma tem 28 alunos, esse será o valor da amplitude A. Sem grande perda de significado podemos considerar para D o valor zero e para C, o valor 6, número de dias que são necessários para o número de doentes ser metade e valor para o qual se verifica um crescimento mais rápido. Determinar o valor de B, que representa o crescimento mais ou menos acentuado da curva, requer experimentação para ajustar a curva aos dados. Para isso, utilizamos as capacidades da calculadora.

Numa página de gráficos, inserimos um gráfico de dispersão (menu - introdução/edição de gráficos – gráfico de dispersão) e procuramos em **vars**, a variável 'minutos' para x e a variável 'total_doentes' para y (figura 6). Adequamos o zoom (menu-janela/zoom-dados) para visualizar os pontos. Queremos agora introduzir a função que se ajuste melhor aos dados. Como, por defeito, quando acedemos à linha de edição de gráficos surge o gráfico de dispersão s2, temos de voltar ao menu - introdução/edição de gráficos – gráfico de uma função. O mais prático é introduzir o modelo com os valores encontrados para os parâmetros A, C e D e escrever a letra B na fórmula, pois ao fazer-se enter, aparece uma janela para criar o seletor que nos permite variar o B (no seletor, os parâmetros aparecem sempre escritos com letra minúscula, mesmo que se digite uma letra maiúscula. Daí o parâmetro B da fórmula aparecer b nos écrans da calculadora) e obter as tão atualmente famosas curvas mais ou menos achatadas. O crescimento vai sendo mais lento, quanto mais b se aproxima de 1. O ponto de inflexão de coordenadas (6,14), foi estimado, mas parece adequado aos dados. Nesta função podemos confirmar o valor da abcissa do ponto de inflexão, calculando o maximimizante da 1.ª derivada (figura 7).

O trabalho realizado com a recolha direta de dados e a estimativa de valores para os parâmetros do modelo permite, no âmbito da física ou da biologia, fazer uma interpretação do papel de cada um dos parâmetros. A construção da função logística através das transformações geométricas permite uma melhor compreensão do modelo logístico.

O MODELO DA CALCULADORA

Em muitas situações de modelação utilizamos as regressões da calculadora que, ao longo dos anos, também têm aperfeiçoado os modelos. Por exemplo, a calculadora TI-Nspire CX tem agora dois modelos de logística, um com D=0 e a outra com D ≠0. Tal como no exemplo manual, optamos pelo modelo em que D=0. A análise do gráfico de resíduos mostra que o modelo se adequa aos dados (figura 8). Partir da experiência e encontrar os valores dos parâmetros que traduzem a situação permite um tipo de compreensão do modelo, mas a regressão da calculadora permite outro tipo de análise com a interpretação do coeficiente de determinação (noutras regressões) e a análise dos resíduos.

Com um pouco de álgebra podemos relacionar os dois modelos apesar de terem aparências diferentes.

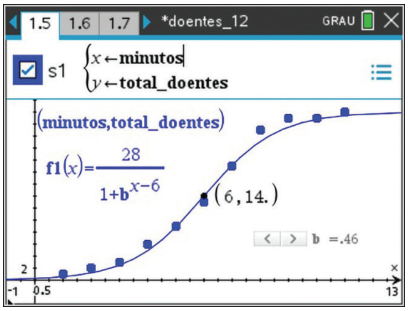


Figura 6. Gráfico de dispersão do número total de doentes e função logística

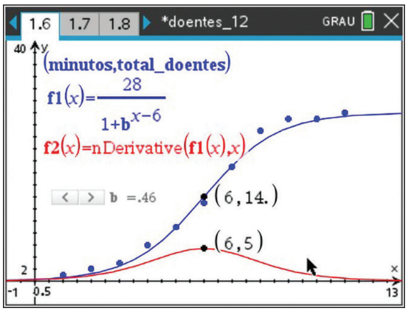


Figura 7. Relação entre as curvas do número total de doentes e dos novos doentes

No modelo manual, obtemos

$$0.46^{x-6}=0.46^{x}\times0.46^{-6}=105.55\times0.46^{x}$$

No modelo da calculadora, obtemos $85.48\times e^{-0.73x}=85.48\times0.48^{x}$

AINDA AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA CHEGAR À FUNÇÃO LOGÍSTICA.

Durante alguns anos iniciei o estudo da logística com esta experiência. No entanto, o trabalho com as transformações geométricas que fazemos ao longo do secundário tem um papel fundamental na compreensão do modelo logístico. Tenho sempre dúvidas se será melhor começar com a experiência ou com as transformações, mas ambas as abordagens fazem falta e que bonitas, elucidativas e poderosas são as transformações da exponencial até à logística.

Duas transformações simples, subir de uma unidade a função exponencial de base inferior a 1, e depois fazer o inverso, permite-nos obter a função logística cujo contradomínio é o intervalo]0,1[e o ponto de inflexão é I de coordenadas $(0, \frac{1}{2})$ (figura 9).

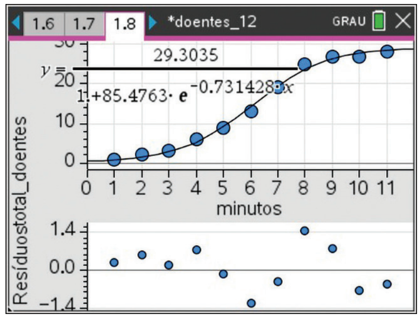


Figura 8. Regressão logística da calculadora e gráfico de resíduos

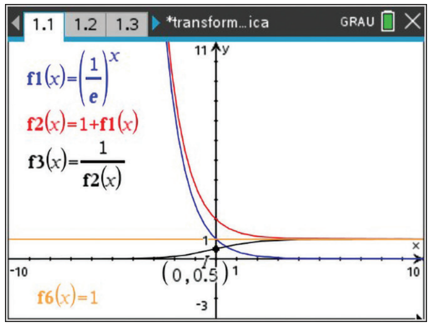


Figura 9. Transformações geométricas da função exponencial

Em seguida aumenta-se a amplitude, multiplicando-se a função *f3* por um determinado valor, neste caso 8, e obtém-se a função que tem como contradomínio o intervalo]0,8[. Depois desloca-se o gráfico da função para a direita, por exemplo 5 unidades.

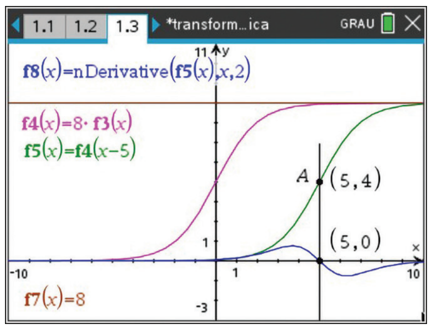


Figura 10. Transformações geométricas da função logística e ponto de inflexão

Determinar a abcissa do ponto de inflexão, por exemplo a partir do zero da segunda derivada permite relacionar o ponto de inflexão obtido por deslocamento horizontal com o ponto obtido através da análise (figura 10). E cá temos de uma forma compreensiva as belas curvas que todos os dias entram pela nossa casa dentro, nos dias de hoje por maus motivos, mas que são indispensáveis para os cidadãos compreenderem o mundo em que habitamos.

Manuela Pires

Recuperação e consolidação das aprendizagens

Entrevista a João Pedro da Ponte

Em março deste ano foi criado pelo Ministério da Educação um grupo de trabalho com uma composição diversificada e multidisciplinar para apresentar sugestões e recomendações relativas a medidas a considerar na preparação dos anos letivos 2021/2022 e seguintes. O plano, destinado aos alunos dos ensinos básico e secundário, tem como objetivo a recuperação e consolidação das aprendizagens e de mitigação das desigualdades decorrentes dos efeitos da pandemia da doença COVID -19. O grupo de trabalho teve cerca de dois meses para apresentar o plano, após o que se extinguiu.

João Pedro da Ponte (JPP), professor catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa é um dos membros da comissão e prontamente acedeu ao convite da Educação e Matemática (EM) para nos falar sobre o trabalho realizado.

EM: A composição diversificada da comissão certamente permitiu olhares complementares sobre a definição das recomendações ao nível da recuperação das aprendizagens, da socialização e do bem-estar dos alunos. João Pedro, quando aceitou integrar este grupo de trabalho, que expectativas tinha do ponto de vista da sua colaboração face às possíveis orientações recebidas?

JPP: Quando recebi o convite para participar no grupo de trabalho, ainda não sabia quem seriam os outros participantes. Só tive conhecimento na primeira reunião. Pareceu-me natural que o grupo incluísse pessoas com diferentes tipos de formação e diferentes sensibilidades em relação às questões educativas. A minha expetativa, naturalmente, era que fosse possível produzir um conjunto de recomendações relevantes para atender aos problemas nas aprendizagens, na socialização e nos aspetos emocionais criados ou agravados pela pandemia.

EM: A que dados tiveram acesso? Que aspectos das aprendizagens tiveram em conta?

JPP: Reuniu-se a informação sobre as aprendizagens dos alunos a partir de dois elementos, o desempenho escolar, com base nos juízos avaliativos dos conselhos de docentes e de turma do final do 1.º período letivo do ano de 2020/21 e os resultados do Estudo Diagnóstico das Aprendizagens realizado pelo IAVE em janeiro de 2021 relativos ao 3.º ano de escolaridade, entretanto divulgados. Foram ainda considerados estudos na área da saúde psicológica e bem-estar, qualitativos e quantitativos, realizados no nosso país a crianças, jovens e adultos antes e durante a pandemia.

EM: Do conjunto das recomendações, quais são as que considera que terão um impacto mais imediato na preparação do próximo ano letivo?

JPP: Destaco duas recomendações. A primeira diz respeito a pôr em ação um plano emergencial de apoio ao desenvolvimento das aprendizagens e competências, bem-estar físico e emocional a alunos em risco. O trabalho a realizar deverá ter por base um roteiro de acompanhamento de cada aluno em risco, com reforço ou criação de programas de apoio individual e/ou de pequeno grupo com continuidade temporal entre o atual e o final do próximo ano letivo e contrariando a lógica de penalizar esses alunos desde já com a não transição entre anos letivos.

A segunda recomendação diz respeito a definir programas específicos de apoio ao desenvolvimento das aprendizagens em diversas literacias (leitura, matemática, científica, socioemocional e outras). Especial atenção é sugerida para a área da literacia emergente, em contexto de educação pré-escolar, e da leitura-escrita e da oracia para os alunos do ensino básico e, em particular, dos primeiros anos de escolaridade.

EM: A sua resposta evidencia uma grande preocupação com não deixar nenhum aluno para trás. Que condições pensa serem necessárias relativamente à matemática?

JPP: Penso que serão necessárias sobretudo duas condições. A primeira é novas práticas pedagógicas na sala de aula, com aulas mais dinâmicas, capazes de proporcionar um maior envolvimento dos alunos, com base em tarefas interessantes e cuidadosamente escolhidas. A segunda é a possibilidade de se dar atenção individual a cada aluno com dificuldades, através de tutorias realizadas em espaços extra-aula e da existência de professores coadjuvantes nas salas de aula onde isso seja necessário.

EM: Que programas específicos de apoio ao desenvolvimento da literacia matemática espera que venham a surgir?

JPP: O documento elaborado pelo grupo de trabalho dá importância ao desenvolvimento da literacia matemática dos alunos, a par de outras literacias como referi. Penso que este desenvolvimento terá de vir sobretudo do novo documento curricular de aprendizagens essenciais em Matemática e da mudanças das práticas pedagógicas que dele venha a decorrer.

EM: Qual o contributo das recomendações e medidas propostas por este grupo de trabalho a longo prazo?

JPP: Foram solicitadas ao grupo recomendações para um período mais alargado, para além do próximo ano letivo. As sugestões efetuadas incluem aspetos diversos, dos quais destacaria a dotação de recursos necessários à realização de medidas de apoio à aprendizagem e ao desenvolvimento socio-emocional e do bem-estar dos alunos, incluindo recursos tecnológicos, a contratação de pessoal docente e não docente, e a formação de professores e outros profissionais. De salientar, também, a valorização da capacidade da organização escolar para identificar as necessidades educativas prioritárias dos alunos, a formação e desenvolvimento de lideranças escolares e a definição de uma política de produção de informação válida e fiável.

GEOMETRIA COMO PATRIMÓNIO CULTURAL IMATERIAL EM ANGOLA!

Todos os povos e culturas desenvolvem ideias matemáticas. Esta é uma afirmação consensual entre etnomatemáticos, educadores matemáticos e matemáticos sensíveis quer à relevância social da educação matemática, quer a um entendimento da matemática como património da humanidade.

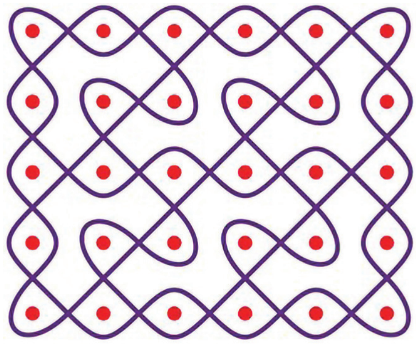
Os sona (singular: lusona) são desenhos geométricos na areia para ilustrar histórias, lendas e adivinhações utilizados pela comunidade Cokwe (tchokwe), do Nordeste de Angola. São formas de transmitir conhecimentos, valores sociais e culturais entre gerações.

Desde o final da década de 80 do séc. XX que Paulus Gerdes, um matemático e etnomatemático naturalizado em Moçambique, empreendeu uma profunda exploração desta tradição, numa vertente histórica como forma de reconstrução de elementos matemáticos da tradição "sona", numa vertente de investigação matemática, estabelecendo conexões com conceitos matemáticos como as matrizes cíclicas e também numa vertente didática com propostas de utilização dos sona em sala de aula e mesmo em divulgação para que todos possam "viver a Matemática".

Recentemente esta prática foi elevada a património cultural imaterial nacional em Angola, a partir de uma proposta da Universidade Lueji A'Nkonde, por iniciativa do educador matemático Jorge Dias Veloso, docente da Escola Superior Pedagógica da Lunda-Norte.

Assinalar este feito é relevante para a província de Lunda-Norte, para Angola, para África, para a Comunidade de Países de Língua Portuguesa (CPLP) que veem assim o reconhecimento de uma singularidade cultural tchokwe como parte integrante da cultura a diferentes escalas locais, desafiando que cada um estabeleça relações com os sona sob diferentes olhares matemáticos.

O lusona abaixo representa uma galinha em fuga. Convidamos a (re)interpretar, pelo seu olhar matemático, o trajeto percorrido por uma galinha quando perseguida. Sentiu *algo dum ritmo* do desenho?



Legenda. Uma galinha em fuga (Gerdes, 2013, p. 30)

Referências:

Agência Angola Press (2021, Maio 6). *Académico considera inquestionável o valor cultural do Sona*. https://www.angop.ao/noticias/educacao/lunda-norte-academico-considera-inquestinavel-o-valor-cultural-do-sona/

Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática: Reflexões sobre Matemática e Diversidade Cultural.* Edições Húmus.

Gerdes, P. (2013). *Desenhos de Angola.* Edições Húmus.

Novo Jornal. (2021, Abril 27). *"Sona" a arte etnomatemática foi elevada a património cultural imaterial nacional - a conquista é da Universidade Lueji A'Nkonde.* https://novojornal.co.ao/sociedade/interior/sona-a-arte-etnomatematica-foi-elevada-a-patrimonio-cultural-imaterial-nacional---a-conquista-e-da-universidade-lueji-ankonde-101984.html?fbclid=IwAR1sQF4wUmRN3QvhQQ-Glm1jS6wjhrZs4zJIGscMuL8zrwV1ozOlqwibt2c

Veloso, J. (2020). Sona, património imaterial: uma abordagem extensionista. *Revista Angolana De Extensão Universitária, 2*(2), 39-52.

https://www.portalpensador.com/index.php/RAEU-BENGO/article/view/128

Joana Latas
Universidade de Coimbra, Instituto de Investigação Interdisciplinar,

Jaime Carvalho e Silva
Universidade de Coimbra, CMUC, Departamento de Matemática,

Sobre as distâncias à superfície da Terra

José Paulo Viana

Do último número da *Educação e Matemática* faz parte o artigo *Proposta do uso de tecnologias digitais no ensino da matemática: equações do 1.º grau para as séries finais do ensino fundamental,* de Daniel Amâncio e Daniel Sanzovo, onde se propunha aos alunos que calculassem a distância entre dois pontos da Terra. Fiquei logo com curiosidade porque encontrar as distâncias à superfície de uma esfera não é um problema nada fácil.

O mais curto caminho entre dois pontos da superfície esférica não é uma linha reta no sentido euclidiano do termo. Por exemplo, o segmento de reta que une Faro com Monção vai por baixo da superfície e, ali pelos lados de Abrantes, está a uma profundidade de 5,8 quilómetros. Na esfera, a "reta" que passa por dois pontos é o círculo máximo (ou talvez melhor, a "circunferência máxima") que tem centro no centro da Terra e que contém esses dois pontos. Logo, a distância entre os dois pontos é o comprimento do menor dos arcos desse círculo máximo.

Relembremos que, para definir uma localização à superfície da Terra, temos de considerar: os paralelos, que são circunferências paralelas ao equador e com centro no eixo da Terra (linha que une os dois polos); e os meridianos, que são círculos máximos que passam nos dois polos.

A posição de um ponto é definida por duas coordenadas: a *latitude*, que mede o "afastamento" em graus do paralelo em relação ao equador e varia entre -90° (Polo Sul) e +90° (Polo Norte); a *longitude*, que mede o arco do equador entre o meridiano de referência (ou primeiro meridiano) e o meridiano do local; pode variar entre -180° e +180°.

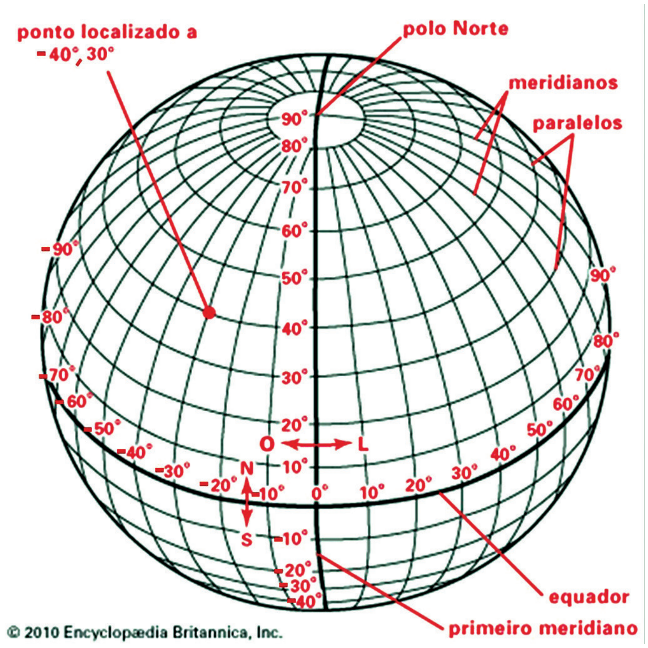
O cálculo da distância complica-se muito porque a esfera não é planificável e os paralelos não são círculos máximos. A fórmula mais utilizada para este cálculo é a de Haversine (ver caixa). Se olharem para ela percebem por que não vamos deduzi-la aqui.

Fórmula de Haversine

para a distância à superfície da Terra entre dois pontos de latitudes φ_1 e φ_2 e longitudes λ_1 e λ_1 (em radianos)

$$D = 2R\ arcsen\left(\sqrt{sen^2\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)+\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)sen^2\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)}\right)$$

em que R é o raio da Terra (≈6371 km)



No artigo atrás referido, é proposto que os alunos calculem a distância usando um referencial cartesiano, com as longitudes no eixo horizontal e as latitudes no vertical. As distorções introduzidas vão dar valores maiores que podem diferir muito da realidade. Estes só serão exatos se os dois pontos estiverem sobre o equador ou se tiverem a mesma longitude. No caso exemplificado no artigo, pedia-se a distância entre as cidades de Jacarezinho (Brasil) e Paris (França) e obtinha-se 9891 km, mas o valor real é 9531 km.

Usando o método ali exposto, quanto maior for a diferença entre as longitudes e quanto mais afastados do equador estiverem os pontos, maior vai ser o erro. Por exemplo, para a distância Lisboa-Washington os alunos obteriam 7544 km em vez de 5737 km reais. Indo mais para norte, maior o erro: de Oslo a São Petersburgo são 1093 km, muito menos que os 2178 a que se chegaria pelo método proposto no artigo.

José Paulo Viana

Oportunidades para a comunicação escrita na aprendizagem da matemática

Luís Menezes

Neste texto, propõe-se refletir sobre a importância da comunicação escrita na aula de Matemática, discutindo-se a sua articulação com a comunicação oral, os seus contributos para a aprendizagem, as estratégias para a desenvolver e as formas que pode assumir. A partir de algumas destas estratégias e tirando partido das potencialidades das tarefas matemáticas construídas a partir de humor gráfico, analisam-se produções escritas de alunos do ensino básico, focando-se a compreensão do humor, o uso de conceitos matemáticos, vocabulário e notação específicos, a organização do texto e a relação entre o texto escrito e a resolução de problemas.

A comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática

Em sentido lato, a comunicação é aquilo que nos permite participar e estabelecer comunidade, aquilo que nos permite partilhar entendimentos, aquilo que nos permite pôr em comum conhecimentos e pensamentos. Quando comunicamos, sabemos que do outro lado está alguém com o seu próprio conhecimento, que o usa para interpretar e dar sentido ao que dizemos. Por isso, e dependendo de para quem comunicamos, temos de garantir que o que comunicamos é efetivamente compreendido. Todos temos a experiência de comunicar em diversos contextos, sejam eles do domínio pessoal e privado ou do domínio profissional. Essas experiências mostram-nos que o sucesso dos atos comunicativos em que estamos envolvidos depende muito do conhecimento que temos do outro, nomeadamente de sabermos que partilhamos, num determinado campo temático, um conjunto razoavelmente elevado de conhecimentos. Quando essa partilha é elevada, meias palavras são suficientes para haver entendimento. Este fenómeno é emergente quando um observador exterior a uma interação comunicativa não encontra sentido no que está a ser trocado, mas os próprios entendem-se. Isso explica, em grande parte, o facto de os alunos terem mais facilidade em compreender a explicação de um colega do que a do próprio professor. Pelo contrário, quando comunicamos com alguém menos familiar, ou sendo familiar nos propõe um tema novo, muitas e reiteradas palavras parecem às vezes não chegar.

Os professores, nomeadamente os de Matemática, no exercício da sua profissão, têm na comunicação uma das suas principais ferramentas de trabalho. Nessa medida, é importante que tomem consciência de que no ensino, especialmente de novos tópicos, estão perto da segunda situação, ou seja, a comunicação de novas ideias deve passar por sucessivas interações, recorrendo a diversas formas de comunicação, verbais e não verbais.

Na aprendizagem da Matemática, a comunicação é uma ferramenta (meio) e uma capacidade a desenvolver (fim). A comunicação é uma ferramenta porque é através dela que os alunos acedem às ideias dos outros e partilham as suas. A comunicação é um objetivo curricular, pelo que os alunos devem aprender a comunicar e isso passa por ser capaz de interpretar, de representar, de se expressar e de discutir.

Na aula de Matemática, alunos e professor recorrem a diversas formas de comunicação, verbal e não verbal, sendo a verbal claramente prevalente: alunos e professor falam, ouvem, leem e escrevem. Sabemos, historicamente, que o falar e o ouvir precederam o escrever e o ler. Também no desenvolvimento da criança, sabemos que a comunicação através do falar e do ouvir precede o ler e o escrever. Desde que nascem, as crianças começam a ter experiências comunicativas de ouvir e algum tempo depois de falar. O ler e o escrever vêm mais tarde e, por norma, grande parte da responsabilidade por esse desenvolvimento é da instituição escolar. A disciplina de língua materna tem nesse desenvolvimento um papel central, mas ele não se esgota nela. Todas as outras disciplinas do currículo, nomeadamente a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento das competências comunicativas dos alunos, não devendo ter da língua materna uma visão puramente instrumental. Cada disciplina escolar contribui com termos e símbolos, que correspondem a ideias que fazem parte de redes de conhecimento, que devem ser utilizados de forma concertada para comunicar e partilhar entendimentos sobre as realidades que nos rodeiam.

Escrever em matemática: formas e propósitos

A experiência de escrever em Matemática, tanto na aula como fora dela, pode assumir diversas formas e ter em vista diferentes propósitos. Os alunos podem escrever em Matemática para, por exemplo, resolverem um exercício ou um problema, para realizarem uma exploração ou uma investigação e para fazerem sistematizações de aprendizagens. A natureza destes registos escritos é muito diversa: nos exercícios, os registos são muito estandardizados, havendo pouco espaço para a criatividade. Já nos problemas, e mais ainda nas explorações, os registos têm uma natureza mais divergente, escalando dos problemas para as investigações. Nestas tarefas matemáticas, podemos distinguir o escrever-processo do escrever-produto. O primeiro ocorre durante o processo de pensamento e apoia esse processo, sendo, por isso, habitualmente pouco organizado, testemunhando avanços e recuos. Este escrever sedimenta-se num produto final que é depois partilhado, desejavelmente no coletivo da turma. Este registo é, por norma, organizado e muitas vezes segue uma sequência que não é igual à sequência da resolução. Os registos escritos das sistematizações das aprendizagens, frequentemente construídos pelos alunos com o apoio do professor, são registos organizados de definições, regras e procedimentos.

Na literatura, encontramos razões para criar momentos de escrita em Matemática, assumindo-se que, por este processo ser mais lento do que o falar, permite ao aluno colocar numa folha de papel ou num ecrã de computador, tablet ou telemóvel informação que, de outra maneira, o aluno teria que guardar na sua memória (Morgan, 2002; Planas et al., 2018). Esta exteriorização da informação através de registos escritos, com possibilidade de revisão sucessiva, facilita o estabelecimento de relações e o surgimento de novas ideias matemáticas. Dessa forma, a escrita permite elevar o nível de reflexão sobre essas ideias e a conexão entre elas, melhora a sua compreensão, facilita a sua avaliação e o seu estudo (Flores & Brittain, 2003; Morgan, 2000). Este apoio da escrita ao estudo ocorre no momento da escrita, mas também, posteriormente, quando se fazem leituras desses registos. A escrita em Matemática mostra-se também decisiva no apoio à discussão coletiva de resoluções de tarefas matemáticas: no momento de comunicação à turma, os registos escritos elevam a autoconfiança dos alunos, tanto quando expressam as suas opiniões individuais como quando apresentam as ideias do seu grupo. Por essa via, os alunos podem desenvolver uma atitude mais positiva face à Matemática. Sintetizam-se, a seguir, os principais contributos da escrita para a aprendizagem da Matemática:

- Desenvolve a compreensão matemática;
- Promove a reflexão;
- Incrementa a autoconfiança ao comunicar oralmente;
- Produz registros para estudo;
- Gera atitudes positivas em relação à Matemática;
- Apoia a avaliação da aprendizagem da Matemática (pelo aluno e pelo professor).

De modo a promover a comunicação escrita em Matemática, diversos autores apontam estratégias para o seu desenvolvimento (Martin et al, 2017; Morgan, 2002):

- Resolver problemas;
- Descrever imagens;
- Explicar por que razão algo funciona;
- Descrever o que alguém fez;
- Produzir reflexões;
- Escrever histórias sobre Matemática;
- Criar um jornal (de parede ou em suporte digital).

Estas estratégias têm em comum o facto de conduzirem os alunos a escrever com recurso a ideias matemáticas. Divergem no facto de algumas delas terem uma natureza mais descritiva e discursiva (descrever o que alguém fez, descrever imagens) e outras apelarem mais à elaboração e à criatividade (resolver problemas, produzir reflexões, escrever histórias sobre Matemática). Neste texto propõe-se refletir sobre as possibilidades que o humor gráfico oferece ao desenvolvimento da comunicação escrita em Matemática, tirando partindo das duas primeiras estratégias: Descrever imagens e resolver problemas.

POTENCIALIDADES DO HUMOR GRÁFICO PARA PROMOVER A ESCRITA EM MATEMÁTICA

Nesta secção apresentam-se e analisam-se produções escritas de alunos de diversos anos de escolaridade que resolveram tarefas matemáticas baseadas em humor gráfico. Todas as tarefas começam com um pedido de descrição e apreciação da ilustração: "Descreve a situação apresentada. Por que razão a situação apresentada pode ser engraçada?".

Para apoiar a descrição da ilustração, e dessa forma contribuir para a compreensão da tarefa, os professores sugeriram aos alunos a seguinte estrutura: "Ambiente (em que contexto/cenário ocorrem os eventos? quais são os elementos do desenho que nos fazem identificar esse cenário?); Sujeitos (quem são os personagens? o que se sabe sobre eles? o que representam?); Ação (o que acontece?); e Choque de expectativas/final inesperado (o que causa humor? qual é a circunstância que torna a situação engraçada?)" (Menezes et al., 2020, p. 6).

Na análise da comunicação escrita produzida pelos alunos, são considerados os seguintes aspetos: (i) Compreensão do humor; (ii) Uso de conceitos matemáticos, vocabulário e notação específicos; (iii) Organização e clareza do texto; e (iv) Relação entre a descrição da situação e a resolução de problemas.

Numa aula de 4.º ano, a professora propõe a tarefa intitulada "Quando o 2.º não é grande coisa" (Menezes et al. 2020), que parte da ilustração de natureza humorística da figura 1:

Figura 1. Tiras da autoria do gráfico norte-americano Ryan Kramer (Menezes et al., 2020).

A tarefa proposta tinha o seguinte enunciado:

1. Descreve a situação apresentada nas tiras. Por que razão a situação apresentada pode ser engraçada?
2. Se esta numeração continuar na forma que é sugerida na imagem, quantas pessoas ainda devem ser atendidas até chegar ao 1? E ao 2?
3. Explica o significado do título "Quando o 2.º não é grande coisa".

Esta tarefa, dada a conhecer na *Educação e Matemática* n.º 149/150 (Menezes & Ferreira, 2018), é aqui revisitada com outro foco, a comunicação escrita dos alunos.

Para facilitar a compreensão da tarefa e a reposta à primeira questão (descrição da situação), a professora tomou duas decisões: a primeira foi a de apresentar a ilustração vinheta a vinheta e fazer uma breve exploração coletiva inicial de cada uma delas; a segunda foi a realização da tarefa a pares, incentivando o diálogo como ponto de partida para a escrita. Apresentam-se, a seguir, registos elaborados por alguns pares de alunos (P) à questão 1:

> Nesta situação aconteceu um rapaz que foi a uma DMV tirar uma nova carta de condução. A senhora dá-lhe a senha com o número dois. O rapaz pensou que ia começar no 1 e ele iria logo a seguir. Mas quando ele viu em que número ia, viu que só ia na décima de milésia e faltavam muitos, muitos, muitos números até ao 2. Nós achamos esta situação engraçada e também muito surpreendente pois aparentemente o número dois era fantástico só que nem sequer estava ainda em um número inteiro. (P3)

> O senhor chegou e disse que queria tirar uma carta de condução. A senhora deu-lhe uma senha que era o número 2. O senhor ficou excitado, mas logo a seguir ficou triste porque ia no número 0, 1271. Consideramos que o número 0,1271 não poderia ser apresentado na vida real e achamos a situação engraçada. (P5)

> Um dia, um homem foi tirar a carta de condução e recebe um papel com o número dois e ficou bastante satisfeito. Ele olhou para o número em que estava e era o 0,1271 e viu que ainda faltavam 18 729 números. Nós achamos esta situação engraçada porque o senhor achava que só faltava 1 para o 2 mas faltavam 18 729". (P 7)

A análise dos registos escritos dos alunos revela que eles compreendem o humor matemático da situação, mobilizando para isso o seu conhecimento matemático (números naturais, números racionais na forma decimal, sistema de numeração, contagem, operação subtração). Os alunos compreendem que estes conceitos foram usados de uma forma inesperada ("surpreendente", "não poderia ser apresentado na vida real") e concluem que isso torna a situação engraçada. Apesar de algumas imprecisões, a escrita mostra-se organizada e clara, tendo nitidamente beneficiado da exploração coletiva inicial. A resolução, com sucesso, pela generalidade dos pares de alunos, das questões 2 e 3 foi muito suportada pela descrição da situação. Tendo em conta a idade dos alunos (entre 8 e 9 anos), seria pouco expectável que alcançassem sucesso semelhante se a tarefa tivesse sido colocada sem este pedido de descrição inicial.

As tiras da figura 2, da autoria de Bill Amend, foram utilizadas para criar a tarefa intitulada "Geometria, para que te quero!" (Menezes et al., 2020):

1. Descreve a situação da tira. Por que razão a situação apresentada pode ser engraçada?
2. Paige tem razão quanto à utilidade da Matemática?
3. O que pensas da solução encontrada por Paige para o problema da mãe?
4. Como resolver o problema colocado na última vinheta?

Esta tarefa foi proposta a alunos (A) do 6.º ano, que a realizaram individualmente. Correspondendo ao pedido para descrever a situação e apreciar o humor, um aluno escreve:

> 1. A Paige e a sua mãe são duas personagens que estão na cozinha porque a mãe está a tentar dividir uma tarte de acordo com o pedido que lhe foi feito e está de avental. Na tira, Paige reclama porque acha que a matemática que a obrigam a estudar na escola não será útil no futuro. A mãe nem dava atenção a Paige porque estava preocupada em tentar dividir a sua tarte. Para Paige, a Matemática não é importante e não se aplica, exceto numa profissão relacionada com a área. Mas sem querer, ela resolve para a

Figura 2. Tiras da autoria de Bill Amend.

mãe um problema de Matemática da vida quotidiana. Ela sem querer usou a Matemática e ajudou a mãe. Por isso, ela tenta disfarçar, mas logo em seguida ela tem outro problema que tem que resolver. A situação é engraçada porque sem perceber, ela já está a responder e a ajudar a mãe, usando a Matemática. (A9)

Apoiado nesta descrição, o aluno responde às outras questões:

2. A Paige não está certa porque a Matemática é importante na vida uma vez que estamos com ela em todos os lugares.
3. A solução está certa, pois se a tarte tem a forma de um círculo, tem 360° e se dividirmos em 5 partes iguais, cada parte tem 72°.
4. Para que a fatia de Peter tenha o dobro do tamanho das fatias dos outros, a mãe de Paige terá que dividir 360° por 6, que é 60° e depois multiplicar por 2. Assim, ela tem quatro fatias de 60° e a fatia de Peter tem 120°. (A9)

O registo do aluno, bastante detalhado, revela uma boa compreensão do humor gráfico, identificando o ambiente onde decorre a ação, as personagens e a incongruência entre o que diz e o que faz Paige relativamente à importância da Matemática no dia-a-dia. Para isso, mobiliza conceitos matemáticos como círculo, ângulo ao centro e amplitude de ângulo para dividir a tarte em 5 partes iguais e em cinco partes em que uma delas é o dobro das restantes. O texto é claro e organizado, o que denota que foi alvo de revisão cuidada, um aspeto que distingue o discurso escrito do discurso oral. O trabalho de descrição realizado na questão 1 mostrou-se importante para a resolução de todas as outras questões da tarefa.

A ilustração da figura 3, da autoria de Mark Parisi, serviu de base à criação da tarefa intitulada "Ficar na fotografia":

Figura 3. Ilustração da autoria de Mark Parisi (Menezes et al., 2020).

1. Descreve a situação da tira. Por que razão a situação apresentada pode ser engraçada?
2. Por que razão o 3 diz "não creio que saiam todos"?

A tarefa, de curta duração, foi realizada individualmente por alunos do 8.º ano de escolaridade. Um aluno escreveu o seguinte:

Na tira está representado o número π que é um número irracional, ou seja, é uma dízima infinita não periódica. O 3 que é a parte inteira está a tirar uma selfie e a afirmar que "não creio que saiam todos". Está a referir-se ao facto de ser um número infinito [uma dízima infinita] e que por isso não se consegue que fique totalmente registado na fotografia. (A11)

Este registo revela que o aluno compreende a razão pela qual o "Três" refere "não creio que saiam todos". O aluno reconhece o π como um número irracional que sendo representado por uma dízima infinita (não periódica) não sairá "todo" na fotografia (aqui reside o efeito humorístico da situação). Apesar de imprecisões na resposta, relativas à diferença entre número e representação de número, o aluno descreve a situação e "resolve" o insólito da situação.

NOTAS FINAIS

Neste texto refletiu-se sobre a comunicação escrita na aula de Matemática, identificando-se contributos para a aprendizagem e estratégias para a dinamizar. Destas estratégias, apresentaram-se exemplos a partir de tarefas matemáticas baseadas em humor gráfico, nas quais se convidaram alunos a descrever a situação ilustrada e a resolver problemas. Tal como apontado na literatura (Morgan, 2000; Planas et al., 2018), descrever imagens e resolver problemas, neste caso de forma articulada, incita os alunos a escrever, mais do que habitualmente fazem em Matemática, mobilizando e conectando conceitos matemáticos. O contexto humorístico, com suporte gráfico em tiras e ilustrações, contribuiu para uma boa adesão dos alunos às propostas, tendo os textos produzidos beneficiado a resolução de problemas.

Fica o desafio à dinamização da comunicação escrita em Matemática e, em particular, a partir do recurso ao humor gráfico para levar os alunos a desenvolver o seu conhecimento matemático e, articuladamente, as suas capacidades de raciocínio, de comunicação e de resolução de problemas.

Referências

Flores, A., & Brittain, C. (2003). Research, Reflection, Practice: Writing to Reflect in a Mathematics Methods Course. *Teaching Children Mathematics, 10*(2), 112-118.

Martin, C. S., Polly, D., & Kissel, B. (2017). Exploring the impact of written reflections on learning in the elementary mathematics classroom. T*he Journal of Educational Research, 110*(5), 538-553.

Menezes, L., & Ferreira, F. (2018). Humor no ensino da Matemática: Oportunidades para a aprendizagem. *Educação e Matemática, 149/150*, 53-59.

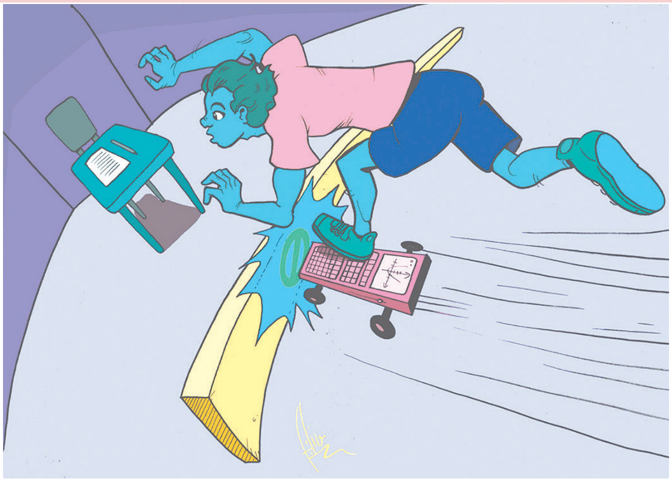
Menezes, L., Flores, P., Viseu, F., Gomes, H., Ribeiro, A., Martins, A. P., & Guitart, M. (2020). *Humor para aprender Matemática: Tarefas matemáticas para rir e aprender*. ESE_IPV. https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/6266/1/humor_2020_version_PORT.pdf

Morgan, C. (2002). *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation*. Routledge.

Planas, N., Morgan, C., & Schütte, M. (2018). Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210), Routledge.

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu

Maldito CAS



Começa hoje, no primeiro dia do ProfMat, a 1.ª fase dos Exames Nacionais. Este ano, todos os alunos que realizarem Exames Finais Nacionais de Matemática A, B e MACS terão novas regras de utilização das calculadoras gráficas - deverão ser portadores de calculadoras com a funcionalidade Modo de Exame, e tiveram conhecimento de tal alteração já no 3.º período deste ano. Porquê? O que fundamentou a Secretaria de Estado de Educação a proceder a tal alteração com carácter de urgência? No documento enviado às Escolas justifica-se com "... a atual possibilidade de instalação da funcionalidade Cálculo Algébrico Simbólico (CAS), (...), funcionalidade não autorizada em contexto de avaliação, nomeadamente externa (...)". Parece um motivo suficiente e plausível, principalmente quando se acrescenta que tal decisão é tomada "(...) por uma questão de equidade entre todos os examinandos (...)". A equidade! mas e a falta de equidade que há no acesso dos alunos socioeconomicamente mais desfavorecidos aos modelos com a funcionalidade Modo de Exame? Os alunos de Ciências e Tecnologias já o sabiam porque já existia o Modo de Exame em Físico-química A mas... e os alunos de Ciências-Socioeconómicas? E os de Línguas e Humanidades ou Artes Visuais que escolheram as disciplinas de MACS e Matemática B como bienais?

Será que a fundamentação apresentada não levanta outras questões ou contradições? A funcionalidade CAS já há vários anos que está disponível, já há vários anos que podia ser instalada pelos alunos que adquirissem determinados modelos de calculadoras e também já havia professores que exploravam esta funcionalidade em sala de aula com os seus alunos constituindo uma mais valia para a aprendizagem, como mostram Hélder Martins e António Domingos no artigo *Utilização de Calculadoras Gráficas no Ensino Secundário*, do n.º 159 da Educação e Matemática.

A situação pandémica atualmente vivida deu, de uma forma inédita nos meios de comunicação social, uma visibilidade à matemática e um protagonismo a quem com ela trabalha. Será que a tecnologia não esteve presente nos modelos apresentados de evolução e de previsão da pandemia? E se a resposta for sim então não podemos confiar nos resultados apresentados? Precisamos da publicação dos procedimentos intermédios em "papel e lápis" para a respetiva validação científica? Mas os alunos ainda não são "matemáticos", ainda estão a aprender e podemos argumentar que primeiro é necessário o domínio do procedimento para que se possa avançar na compreensão ou consolidação de determinados conceitos. Para além da funcionalidade CAS poder enriquecer o trabalho algébrico, como o mostram mais uma vez no artigo já referido, o Hélder e o António, são tantas as situações curriculares que contrariam este argumento: o cálculo do trabalho realizado por uma força é pedido aos alunos no 10.º ano de Físico-química A no entanto, o procedimento que permite o seu cálculo é dado em Matemática A, no 11.º ano. No 3.º ciclo, aquando da determinação do declive de uma reta conhecidas as coordenadas de dois dos seus pontos será que os alunos compreendem o porquê ou limitam-se a aplicar um procedimento "memorizado"? No 9.º ano, para a resolução de equações completas do 2.º grau os alunos aplicam a fórmula resolvente, mas quantos deles compreendem este tipo de equações e as respetivas soluções? De quantas mais situações nos poderíamos lembrar?

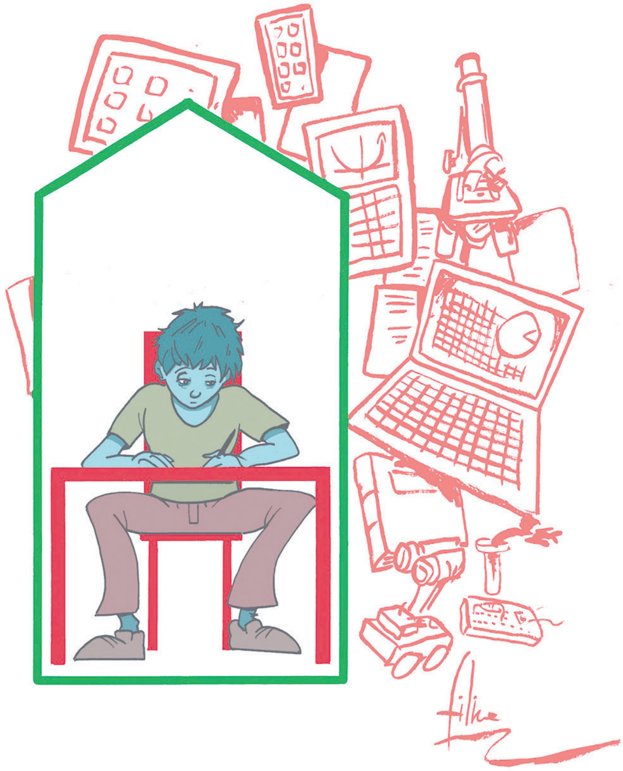
Este será o segundo ano em que os Exames Nacionais não serão obrigatórios para todos os alunos, realizando-se exclusivamente como Provas Específicas de Acesso ao Ensino Superior. Era conhecida por todos a impossibilidade de utilização da funcionalidade CAS na realização de Provas Externas, mas impor o Modo de Exame (ou Reset) será a solução? Será que é a funcionalidade CAS que coloca um número reduzido de alunos em vantagem perante outros no acesso ao ensino superior? Sabemos ou não que no acesso a determinados cursos a "equidade" é algo que não existe desde o início do percurso escolar de todos os alunos...? Não estará o Modo de Exame/Reset a contribuir para o agravamento das desigualdades?

A funcionalidade CAS permite, com recurso à tecnologia, a execução dos procedimentos intermédios na resolução de uma equação ou de uma situação problemática, mas a funcionalidade CAS não equaciona, não critica nem analisa soluções encontradas, não interpreta resultados no contexto da situação, não conjetura nem demonstra! A funcionalidade CAS é apenas uma ferramenta! Infelizmente, apesar de já terem passado mais de 20 anos desde que a tecnologia gráfica foi introduzida nos programas de Matemática do ensino secundário, ainda questionamos o seu papel na formação dos alunos. Ainda nos sentimos incomodados quando a tecnologia é "mais rápida do que nós", ainda não conseguimos aceitar que a tecnologia nos possa dar tempo e possibilidade de utilização do nosso cérebro para a resolução das outras questões, as tais que o CAS não faz...

No Perfil do Aluno refere-se que a utilização das tecnologias de informação e comunicação é um dos alicerces para aprender e continuar a aprender ao longo da vida. Tão boas as intenções e tão poucas as condições... E se, por exemplo, nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A, são consideradas práticas essenciais de aprendizagem "Tirar partido da utilização da tecnologia nomeadamente para experimentar, investigar, comunicar, programar, criar e implementar algoritmos" – tenhamos atenção: tal só faz sentido nos modelos de calculadoras que disponham de modo de exame porque os outros (os mais acessíveis economicamente) bem podem criar e desenvolver algoritmos que estão destinados ao RESET! Resta-nos esperar que não sejam os exames nacionais, os tais que continuam a ser a forma mais "rigorosa" de selecionar e seriar os "excelentes" que terão acesso ao ensino superior, ou pelo menos, a determinados cursos..., a fazer RESET nas aprendizagens dos alunos!

Apesar de continuar a haver muita discussão em torno da tecnologia, continuamos a ter um sistema de ensino fortemente "condicionado" pelo acesso ao ensino superior e opções programáticas, pedagógicas e didáticas que continuam a "esbarrar" com a avaliação externa. A propósito de possíveis alterações no currículo de Matemática, será que conseguiremos dar o salto e reconhecer a importância e o papel da algoritmia e da programação na resolução de situações matemáticas? E se assim for não fará todo o sentido integrar a tecnologia não só no currículo mas também na avaliação?

Pense nisto!



Um agradecimento especial ao Filipe Gonçalves, professor de Informática na Escola Secundária de Camões e ilustrador de BD que gentilmente cedeu as imagens aqui publicadas.

Teresa Moreira
Escola Secundária de Camões

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Geometria, para que te quero!

A tarefa matemática "Geometria, para que te quero!" faz parte de um conjunto de tarefas publicadas no livro "*Humor para aprender Matemática: Tarefas matemáticas para rir e aprender*" (Menezes et al., 2020), acessíveis em

https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/6266/1/humor_2020_version_PORT.pdf

No artigo "Oportunidades para a comunicação escrita na aprendizagem da matemática", publicado neste número da *Educação e Matemática*, descrevem-se resultados da sua realização em contexto de sala de aula.

No livro podem encontrar-se outras 26 tarefas matemáticas com as mesmas características desta que se apresenta, dirigidas a alunos de diversos anos de escolaridade e focando uma variedade de tópicos matemáticos.

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu

Geometria, para que te quero!

1. Descreve a situação da tira. Por que razão a situação apresentada pode ser engraçada?
2. Paige tem razão quanto à utilidade da Matemática?
3. O que pensas da solução encontrada por Paige para o problema da mãe?
4. Como resolver o problema colocado na última vinheta?

Menezes, L., Flores, P., Viseu, F., Gomes, H., Ribeiro, A., Martins, A. P., & Guitart, M. (2020). *Humor para aprender Matemática: Tarefas matemáticas para rir e aprender*. ESE_IPV.

Avaliação formativa, *feedback* escrito e resolução de problemas nas aulas de matemática: uma experiência com alunos do 2.º ciclo

José Costa

A experiência relatada neste artigo, decorre de uma oficina de formação subordinada ao tema "A avaliação para as aprendizagens na sala de aula de Matemática: Critérios de avaliação e a regulação das aprendizagens" e teve como principais objetivos identificar o contributo do *feedback* escrito nas aprendizagens dos alunos e desenvolver competências profissionais relativas à escrita avaliativa, no sentido de a tornar mais eficaz.

Participaram neste trabalho 21 alunos de uma turma do sexto ano de escolaridade, que realizaram tarefas de resolução de problemas em dois momentos; no primeiro momento resolveram problemas que foram analisados e comentados com *feedback* escrito, orientando, quando necessário, para a sua reformulação e melhoria; no segundo momento os alunos, com base nesse *feedback*, reformularam as suas produções.

Os resultados revelaram que o *feedback* escrito promove a melhoria das aprendizagens dos alunos com maiores dificuldades. Esta melhoria concretiza-se ao nível dos seus conhecimentos, dos procedimentos matemáticos e das capacidades de resolução de problemas. Contudo, alguns alunos revelam pouca autonomia na análise do *feedback* dado às suas produções, destacando-se a importância de este se tornar uma prática regular na sala de aula.

AVALIAÇÃO PARA AS APRENDIZAGENS

Num tempo de constantes mudanças, em que somos chamados a refletir de que forma os nossos alunos podem aprender mais e melhor, somos levados a pensar atividades, estratégias, trabalhos desafiantes e motivadores que conduzam ao despertar da sua curiosidade e da sua vontade de aprender com mais profundidade e compreensão (Fernandes, 2020). Neste contexto, a avaliação pedagógica, enquanto processo que está intimamente relacionado com o ato de ensinar e aprender, assume um papel preponderante.

A avaliação pedagógica tem vindo a assumir um papel cada vez mais importante no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. No entanto, ainda é vista, maioritariamente, como um instrumento de classificação (avaliação sumativa) e não como um processo contínuo e formativo, promotor do melhoramento do processo ensino-aprendizagem (Santos, 2017).

Assim, a avaliação formativa, também conhecida como avaliação para as aprendizagens, prevê a melhoria contínua das aprendizagens dos alunos através da forma como permite ajustar as estratégias e tarefas a cada a um e que, por isso, permite a regulação das suas aprendizagens e a diferenciação pedagógica (Perrenoud, 1999; Harlen, 2012; Fernandes, 2007).

De acordo com Santos (2020a), "esta avaliação é igualmente importante porque é através de práticas avaliativas com a intencionalidade de apoiarem a aprendizagem matemática e/ou ensino que se podem criar contextos de aprendizagem favoráveis para que todos os alunos sejam matematicamente competentes" (p. 1). Para isso é fundamental que as práticas de avaliação formativa sejam regulares, intencionais e adequadas aos contextos de aprendizagem. A avaliação reguladora pode concretizar-se na sala de aula através de várias modalidades: questionamento oral, escrita avaliativa (*feedback* escrito a produções dos alunos) e autoavaliação, entre outras.

O *feedback* escrito, enquanto ferramenta de comunicação professor-aluno, assume um lugar de destaque no contexto de avaliação formativa, pois é ele que orienta os alunos no seu processo de aprendizagem, possibilitando a autorregulação (Fernandes, 2007). Assim, considera-se que este *feedback* deve ser tão mais individualizado e sistemático quanto possível permitindo, desta forma, aumentar as possibilidades de promover as aprendizagens dos alunos.

Ainda de acordo com Santos (2020b), o *feedback* escrito deve ser claro, apontar pistas que ajudem os alunos a prosseguir e a reanalisar as suas produções, informar o que já está bem feito e não incluir a correção do erro.

TRABALHO DESENVOLVIDO NO ÂMBITO DA FORMAÇÃO

Com o trabalho, que a seguir se apresenta, procurou-se (i) analisar e compreender os erros cometidos por alunos do 6.º ano de escolaridade, no contexto de ensino-aprendizagem do conteúdo Números Racionais não negativos e (ii) perceber como o *feedback* escrito, usado pelo professor, pode contribuir para levar os alunos a aperceberem-se dos seus erros e, consequentemente, a tentarem superá-los.

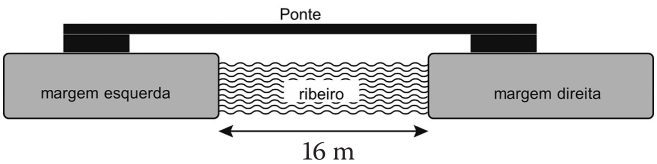
Neste sentido foi definida a seguinte metodologia:

- Planificar uma estratégia avaliativa para a aprendizagem e implementá-la em sala de aula;
- Conhecer e interpretar o trabalho desenvolvido pelos alunos;
- Atribuir *feedback* escrito e refletir sobre ele.

Foi selecionado um problema (figura 1) que permitisse aos alunos a aplicação de aprendizagens realizadas anteriormente, mas que, simultaneamente, constituísse uma oportunidade de construírem novos conhecimentos, elaborando estratégias e chegando a uma solução coerente perante a problemática apresentada. A metodologia adotada, face à situação da pandemia e às contingências por ela imposta, foi a da sua resolução individual.

A PONTE

Uma ponte está construída sobre um ribeiro numa zona onde a largura do ribeiro é 16 metros, como se representa na figura abaixo.



Do comprimento total da ponte, $\frac{7}{20}$ estão sobre a margem esquerda e $\frac{1}{4}$ está sobre a margem direita do ribeiro.

Qual é o comprimento total da ponte, em metros?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Figura 1. Problema selecionado para aplicar aos alunos (Retirado da Prova de Aferição de Matemática de 2016)

Antes da distribuição do problema foi feita a projeção dos critérios de avaliação para a resolução de problemas, a sua leitura e análise para que os alunos se apropriassem dos mesmos. Estes critérios contemplam as ideias centrais na resolução de problemas: a compreensão (apropriação), e estratégia de resolução (eficiência) e a solução proposta (eficácia) e têm como principal propósito a avaliação para as aprendizagens.

O trabalho realizado pelos alunos durante a 1.ª fase da aplicação do problema foi primeiramente analisado à luz dos critérios definidos para a sua avaliação, tendo-se obtido os resultados registados na tabela da figura 2.

Tendo em conta o que foi observado, esta tarefa apresentou-se como uma situação problemática – uma questão fechada em que o processo para encontrar a resposta não se encontra imediatamente disponível, exigindo que estes raciocinem sobre os dados para encontrarem uma solução.

Do total das resoluções foram selecionadas quatro que representam a diversidade de respostas obtidas. A partir da análise dessas produções (Fase 1), que a seguir se apresentam, é possível verificar que:

- As estratégias utilizadas são variadas e contemplam resoluções analíticas (R1 e R2), resoluções com recurso a esquemas/desenhos (R4) e resoluções mistas, ou seja, com recurso a esquemas e a cálculos (R3);
- Os alunos mostraram conhecer e saber aplicar:
  – O significado dos termos de uma fração;
  – A noção de frações equivalentes;
  – Adicionar e subtrair frações com denominadores diferentes;
  – Identificar o todo com a unidade.
- Cometeram incorreções de escrita matemática (R1 e R2);
- Apresentaram dificuldade em passar da medida (comprimento) da parte para a medida (comprimento) do todo (R3 e R1).

Posteriormente, e tendo em conta os mesmos critérios de avaliação, foram elaborados os *feedback*s escritos.

Feedback R1: Selecionaste bem os dados e apresentas uma estratégia adequada. No entanto, deves olhar de novo para a relação entre as frações $\frac{7}{20}$ e $\frac{5}{20}$ e os comprimentos da ponte

Avaliação da resolução de problemas				
Critérios de avaliação	**Indicadores**	**Descritores**		
		Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**
Apropriação (relativo à compreensão)	Seleção pertinente de dados	Não seleciona os dados necessários para a resolução do problema	Seleciona parte dos dados necessários para a resolução do problema	Seleciona todos os dados necessários para a resolução do problema
Eficiência (relativo ao processo-estratégia)	Seleção da estratégia	Não apresenta estratégia ou usa estratégia inadequada	Apresenta estratégia adequada	Apresenta estratégia adequada e poderosa
	Execução da estratégia	Comete erros na execução e não conclui	Comete erros na execução ou não conclui	Não comete erros na execução e conclui
Eficácia (relativo ao produto-solução)	Correção e completude da solução	Apresenta solução incorreta ou não apresenta solução	Apresenta solução parcialmente correta ou incompleta; ou solução coerente com a estratégia desenvolvida	Apresenta solução correta e total

Resultados	4 alunos apresentam resoluções incorretas revelando a incompreensão do problema. 19%	6 alunos apresentam resoluções com algum trabalho relevante, mas respondem parcialmente ou de forma incompleta. 28,6%	8 alunos apresentam resoluções corretas ou com algumas imprecisões de escrita matemática. 38,1%	3 alunos não apresentam qualquer trabalho e não respondem. 14,3%

Figura 2. Critérios de avaliação da resolução de problemas e resultados obtidos na 1.ª fase

que lhes correspondem. Qual será o comprimento de cada uma das partes em que a ponte (todo) está dividida?

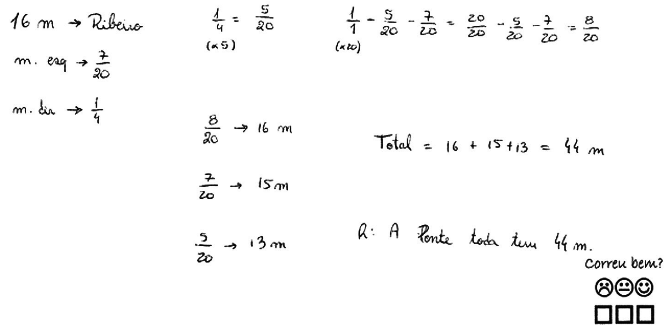


Figura 3. Resolução 1 (R1)

Feedback R2: Selecionaste corretamente os dados e conseguiste determinar o comprimento da ponte. No entanto deves olhar para a expressão $\frac{12}{20}=\frac{8}{20}=16+\frac{4}{20}=8\text{cm}$ e explicar, por palavras tuas, o seu significado.

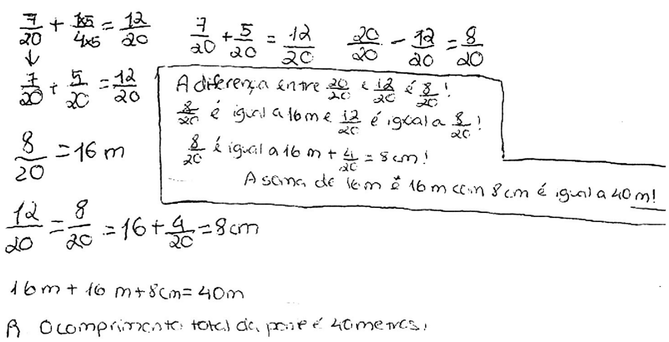


Figura 4. Resolução 2 (R2)

Feedback R3: Selecionaste corretamente os dados e apresentaste uma estratégia adequada. Contudo deves explorar melhor o esquema que elaboraste na ponte da tua ficha. Relaciona a largura do ribeiro com o número de divisões da ponte que lhe correspondem no teu esquema.

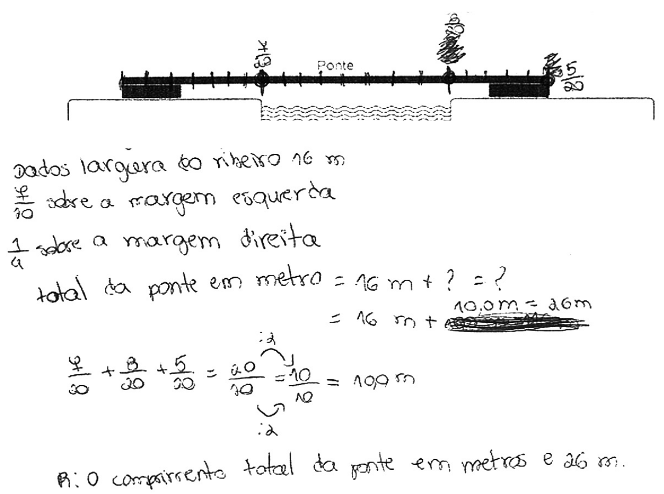


Figura 5. Resolução 3 (R3)

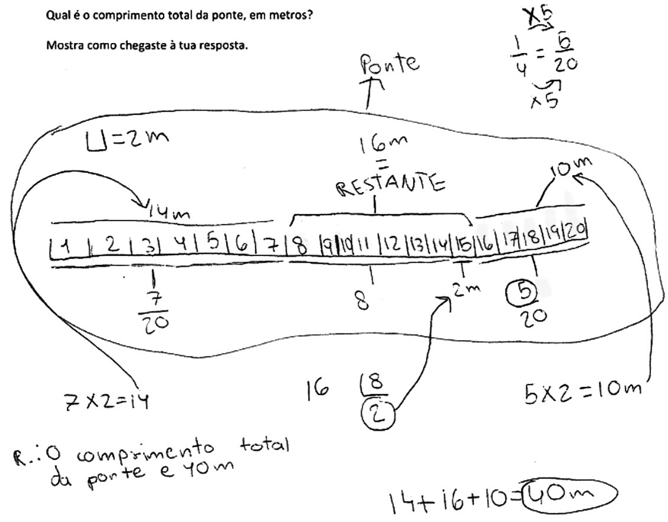


Figura 6. Resolução 4 (R4)

Feedback R4: Foi uma ótima resolução! Parabéns!

A segunda fase de resolução do problema constituiu uma oportunidade para os alunos poderem contactar de novo com o problema, refletir sobre o trabalho já realizado e para o poderem aperfeiçoar ou reformular com base no *feedback* fornecido pelo professor.

À semelhança do que se passou após a primeira fase de aplicação do problema, o trabalho realizado pelos alunos foi de novo analisado à luz dos critérios de avaliação definidos, tendo-se verificado que das treze produções, sete (53,8%) apresentam resoluções corretas ou com algumas imprecisões de escrita matemática, correspondentes ao nível 3; três (23,1%) apresentam resoluções com algum trabalho relevante, mas respondem parcialmente ou de forma incompleta, correspondente ao nível 2; três (23,1%) apresentam resoluções incorretas revelando a incompreensão do problema, correspondente ao nível 1.

Da análise comparativa dos resultados é possível concluir que houve uma melhoria significativa da resolução do problema, após a realização do *feedback* escrito.

Assim, verifica-se que após a resolução do problema em duas fases, com *feedback* escrito após a primeira fase, 71,4 % dos alunos conseguem resolver o problema corretamente.

A análise dos dados das produções dos alunos evidenciou que alguns erros referenciados na literatura revista estão presentes nas suas produções. A saber: erros que têm a sua origem em obstáculos cognitivos, erros que têm a sua origem na ausência de significado e erros que têm a sua origem em atitudes afetivas e emocionais face à Matemática.

É ainda de referir que no decurso da 2.ª fase da aplicação do problema, alguns alunos solicitaram a ajuda do professor para elaborarem a resposta ao *feedback*.

O facto de os alunos não estarem habituados a lidar com situações semelhantes em contexto de sala de aula, determinou que não compreendessem muito bem o papel do *feedback*, tivessem relutância em lê-lo com atenção, bem como em utilizá-lo para refletirem sobre o trabalho já realizado e para o melhorar (papel regulador do *feedback*).

Verificou-se assim que o *feedback* escrito fornecido aos alunos os ajudou a reconhecer alguns erros por si cometidos, mas nem sempre foi eficaz na regulação das suas aprendizagens.

Após a segunda fase da aplicação do problema, procedeu-se à apresentação ao grupo turma das produções obtidas. Durante as suas apresentações, os alunos foram solicitados a expor as suas estratégias e a explicar o seu raciocínio, bem como a responderem a todas as questões que lhes foram colocadas pelos colegas.

O papel do professor foi o de gerir as intervenções e interações dos alunos, mas também o de promover a qualidade matemática das suas explicações e argumentações. Estas constituíram-se como oportunidades para identificar os processos de raciocínio sob os quais foi possível intervir por meio de *feedback*.

No final da aula, para consolidação dos conteúdos e, sobretudo, para consciencialização do conhecimento descoberto, foram propostos problemas semelhantes tendo por objetivo que os alunos aplicassem o que tinham acabado de descobrir.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho procurou-se compreender a influência do *feedback* escrito no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas matemáticos e, ao mesmo tempo, perceber como é que este pode contribuir para melhorar as aprendizagens dos alunos.

A utilização do *feedback* escrito mostrou-se eficaz em alguns alunos, no entanto, nos casos em que os alunos mostraram não ter compreendido o enunciado, não deu origem, num segundo momento, à melhoria das produções. Os comentários escritos mostraram-se mais eficazes quando eram semelhantes ao oral dado durante as aulas, próximo da linguagem e da forma utilizada no questionamento oral em sala de aula. As pistas dadas aos alunos devem ser claras e esclarecedoras do caminho a seguir, mas não devem fornecer nenhuma informação que permita aos alunos escreverem conclusões sem antes terem refletido sobre elas. A utilização de símbolos no *feedback* escrito mostrou ser uma dificuldade acrescida, uma vez que alguns alunos não a dominavam.

Dar *feedback* mostrou-se ser muito complexo e exigir uma constante reflexão do professor acerca do efeito que este tem na aprendizagem de cada aluno. Considera-se, contudo, que a prática regular de *feedback* dado pelo professor, ajuda não só a melhorá-lo, como contribui para que os alunos o olhem e utilizem de maneira diferente.

Apesar das dificuldades, ficou a vontade de continuar este trabalho e a certeza de que ele contribui para a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos.

Um professor é confrontado diariamente com problemáticas diversas, associadas ao contexto, ao grupo ou inerentes à sua própria prática. Investigar sobre a prática pedagógica, de uma forma reflexiva, possibilita compreender a influência destes fatores no processo ensino-aprendizagem e permite responder às problemáticas emergentes perspetivando o sucesso dos alunos e a construção da nossa identidade profissional.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho apareceram alguns receios e algumas dificuldades emergentes, mas também houve surpresa com as reações dos alunos perante as diferentes propostas, com as interações estabelecidas e consequentemente com a sua evolução.

Esta atividade revelou-se também uma tarefa difícil para o professor porque, por um lado, requer muito tempo de preparação e análise, pois é necessário conhecer e interpretar o trabalho desenvolvido por todos os alunos e, por outro, é necessário dar *feedback* escrito de forma individualizada.

Apresentar um *feedback* escrito eficaz permitiu aos alunos com resultados 'menos bons' melhorar efetivamente as suas produções, desenvolvendo a capacidade de resolução de problemas. Gradualmente, os alunos que não participavam nas discussões coletivas e que não expunham as suas dúvidas começaram a fazê-lo, surgindo interações entre os próprios alunos a fim de partilharem as suas ideias ou solicitarem a ajuda dos colegas.

Finalmente, e ao refletir sobre o percurso realizado ao longo desta experiência, considera-se que as dificuldades que foram surgindo revelaram-se importantes, pois promoveram a aquisição de aprendizagens por parte do professor (refletir em/sobre o contexto, solucionar problemas imprevistos) possibilitando repensar e adequar a prática letiva, assim como, compreender a complexidade de realizar uma tarefa deste tipo.

Referências

Fernandes, D. (2007). Vinte e cinco anos de avaliação das aprendizagens: uma síntese interpretativa de livros publicados em Portugal. In A. Estrela (Org.), *Investigação em educação: Teorias e práticas (1960-2005)* (pp. 261-306). Lisboa: Educa.

Fernandes, D. (2020). Currículo, pedagogia e avaliação para uma escola mais democrática. *JL Educação, secção: Destaque, 3-4*. file:///C:/Users/User/Downloads/curriculo-pedagogia-avaliacao-escola-mais-democratica-domingos-fernandes%20(1).pdf

Harlen, W. (2012). On the relationship between assessment for formative and summative purposes. In J. Gardner (ed.), *Assessment and learning* (2 ed.) (pp. 89-101). London: Sage Publications.

Santos, L. (2017). O que nos diz a investigação sobre os contributos da avaliação para a aprendizagem: algumas notas. *Educação e Matemática, 142*,53-58.

Santos, L. (2020a). Não há mais tempo a perder! Editorial, *Educação e Matemática, 158*, 1.

Santos, L. (2020b). A avaliação pedagógica em matemática: um desafio e uma inevitabilidade?. *Educação e Matemática, 158*, 3-8.

Perrenoud, P. (1999). *Avaliação. Da excelência à regulação das aprendizagens.* Porto Alegre: Artmed Editora

José Costa
Agrupamento de Escolas de Tondela Cândido de Figueiredo

Ubiratan, convidava à paz

Henrique Manuel Guimarães

Escrevo hoje num dia triste.

Chegou-me há pouco subitamente, a notícia da morte de Ubiratan D'Ambrósio, a atravessar com letras negras, o brilho branco do ecrã do meu computador, em que escrevia já não sei o quê, cortado pela triste notícia.

Professor Emérito da Universidade Estadual de Campinas, universidade pública do estado de São Paulo no Brasil, Ubiratan D'Ambrósio é, desde há muito, figura de renome internacional, de grande notoriedade na comunidade da Educação Matemática. Para lá das muitas realizações que promoveu e em que se envolveu, Ubiratan é internacionalmente reconhecido como 'pai' e mentor da Etnomatemática, 'movimento' de perspectiva sócio-cultural sobre a Matemática que surgiu no Brasil a partir dos seus trabalhos de cariz antropológica, espalhando-se depois por muitos países.

Ubiratan no vídeo Vida de Cientista da Universidade de S. Paulo[1]

Ubiratan D'Ambrósio recebeu, em 2001, a medalha Kenneth O. May da *International Commission on the History of Mathematics*, concedida por contribuições notáveis na História da Matemática. Em 2005, pelo seu contributo no domínio da Educação Matemática, Ubiratan recebe da *International Commission on Mathematical Instruction*, a medalha Felix Klein, o mais alto louvor atribuído por esta Comissão.

No elogio pela atribuição da medalha, diz-se que Ubiratan D'Ambrósio faz parte de uma geração que contribuiu para a constituição do campo da Educação Matemática e que, tendo centrado a sua atenção em culturas em desenvolvimento, "ampliou nossa concepção de Educação Matemática", e para além disso, como também é aí destacado, "ajudou a abrir os olhos da comunidade da Educação Matemática para a compreensão de como as ideias matemáticas são geradas e como evoluíram ao longo da história da humanidade"[2].

Ubiratan, vale a pena apontar aqui, pertencia ao Conselho da *Pugwash Conferences on Science and World Affairs* (1987-1997), organização não governamental que em 1995 recebeu o Prémio Nobel da Paz. E, quero também salientar, Ubiratan foi o Presidente-Fundador do *Instituto de Estudos do Futuro* de São Paulo em 1993[3] . "Educar é preparar gerações com algo mais do que especialidades", afirmou Ubiratan num seminário sobre educação do futuro para comemorar os 10 anos da criação desse Instituto, onde também se debateu o apoio a uma "rede global de educação para a paz"[4] . "Estudos do Futuro", "Educação para a Paz", 'palavras de ordem' que, podemos dizer, englobam os interesses e preocupações maiores de Ubiratan no trabalho que desenvolveu, e que norteavam esse trabalho.

Ubiratan partiu agora, longa que foi a sua vida, o seu tempo por aqui. Mas não será, porventura, sempre curto o tempo, sempre curta a vida que, em cada dia, nos é dada a viajar no tempo que temos? Ubiratan partiu, e muitas foram as suas viagens, grande viajante que também era, visitando terras e gentes por todo o mundo, conferenciando, falando e escutando, conversando.

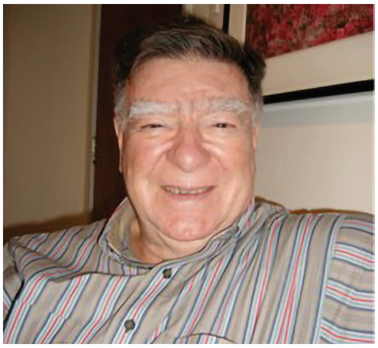
Se me lembro bem, conheci Ubiratan D'Ambrósio em finais dos anos 80, princípios dos anos 90, ou perto. Estava eu já no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências em Lisboa, e tinha a APM acabada de 'nascer'. Foi certamente por aí, num lado ou no outro, que pela primeira vez nos encontrámos.

Desde então, e por diversas ocasiões, nos cruzámos, em congressos e em outros encontros, frequentemente com a oportunidade de conversarmos. Eram conversas às vezes curtas e ligeiras, a caminhar em corredores ou parados em pé, nos pátios ou em algum jardim dos edifícios onde decorriam os encontros em que participávamos, mais confortavelmente como Ubiratan gostava, ou ainda, sentados em sofás de alguma sala, durante intervalos desses encontros.

Independentemente da maior ou menor convergência ou concordância sobre o que falávamos, gostei sempre desse conversar, dessas conversas. Eram em geral conversas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, naturalmente, mas também sobre temas mais abrangentes como a Escola e a Educação, indo buscar problemas ou acontecimentos que o preocupavam. Foram sempre conversas tranquilas, afáveis, aqui e ali, trazendo sorrisos.

Ubiratan gostava de rir. A paz, a paz no mundo e entre os povos do mundo, era também um dos temas que mais preocupavam e ocupavam Ubiratan. Várias vezes o ouvi falar sobre isso, e sobre este assunto, mais do que falar, eu escutava.

[1] https://www.youtube.com/watch?v=A4WRwftHXeo [04.05.2021]



In Entrevista de Ubiratan D'Ambrósio ao Jornal Rascunho[5]

Ubiratan era grande. O seu corpo grande, com um rosto também grande, de olhos bons, encimados por sobrancelhas espessas embranquecidas, apetece dizer, respirava calma, inspirava confiança e humanidade — Convidava à paz.

Ubiratan gostava de Portugal que muitas vezes visitou, participando e intervindo em diversas realizações educativas, em fóruns universitários e outros. E gostava da APM, facilmente disso nos apercebíamos quando o ouvíamos falar sobre a Associação, sobre o trabalho que ia desenvolvendo, as suas iniciativas, as suas posições. Vale a pena recordar hoje que o nome da revista da Associação foi escolhido pouco depois da sua criação em fins de 1986, a partir do título do livro de Ubiratan:

Da Realidade à Acão Reflexões sobre
Educação e Matemática

Lembro-me bem que a redacção da revista — a que então eu pertencia e era directora a Leonor Moreira — preparava na altura o seu primeiro número, para sair no princípio de 1987. Quando nos trabalhos dessa preparação, estava na mesa a discussão sobre que nome dar à revista, a redacção acolheu entusiasmada a proposta de Paulo Abrantes, também membro da redacção, para que o nome fosse Educação e Matemática

Desse modo, como pretendíamos, se enunciavam e realçavam as principais áreas de intervenção da revista — Educação, Matemática e, como o "*e*" em sobrescrito bem salienta, Educação Matemática.

E assim, em Janeiro de 1987, se publica o N.º 1 da revista, com o nome colhido do (sub)título do livro de Ubiratan. Hoje, 35 anos passados, ainda assim se mantém como uma espécie de herança de Ubiratan, e como lembrança.

Não me alonguei muito, mas quis deixar hoje, por Ubiratan, para Ubiratan, algumas palavras, poucas que fossem, e são.

Henrique Manuel Guimarães
Lisboa, 13.05.2021

[5] http://professorubiratandambrosio.blogspot.com/search/label/Entrevistas [4.06.2021]

Aprendizagens (e competências) matemáticas com TI-Python

O PENSAMENTO COMPUTACIONAL, A PROGRAMAÇÃO, A TECNOLOGIA DIGITAL E A MATEMÁTICA

As competências digitais assumem cada vez mais um papel central na sociedade e inevitavelmente na educação. O nosso sistema educativo reflete esta tendência através de um número cada vez maior de iniciativas, decorrentes sobretudo do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, mas enquadradas com uma perspetiva internacional, no mínimo europeia. No entanto, estas iniciativas não visam, ainda, uma integração curricular plena, sobretudo quando estas competências se constroem associadas ao desenvolvimento do pensamento computacional e consequentemente à programação. Não falamos da mesma coisa quando nos referimos ao Pensamento Computacional e Programação, havendo cada vez mais informação, assente em trabalhos de investigação, que destrinça estes dois conceitos. O pensamento computacional, conceito que tem evoluído, está mais relacionado com a resolução de problemas, suscetíveis de serem traduzidos numa linguagem de programação, mas não necessariamente (Bocconi, 2016). Neste sentido, ganha maior força a integração curricular do pensamento computacional, nomeadamente numa disciplina como a matemática, e não é alheio a isto o facto de terem surgido nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A (agosto de 2018) referências explícitas à algoritmia e à programação, mas também na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais. Esta integração ocorre na disciplina de opção do 12.º ano, Aplicações Informáticas B, sendo por isso muito limitada a sua abrangência.

Portanto, têm sido criadas condições teóricas para que o ensino e aprendizagem nas nossas escolas se possa alterar e evoluir no sentido do plasmado no Quadro Europeu de Competência Digital para Educadores (DigCompEdu), que aponta e descreve um significativo número de competências digitais que se consideram essenciais para que os professores possam melhor potenciar o digital ao serviço das aprendizagens dos seus alunos (Lucas, 2018). Mas, apesar de se ter aberto esta janela de oportunidade, o que a prática observada nos indica, salvo raras exceções, é que as Aprendizagens Essenciais serviram essencialmente para balizar o que estava consagrado nos programas e era obrigatório lecionar, em particular nas disciplinas sujeitas a Exame/Prova Nacional, e a Autonomia e Flexibilização Curricular serviu para reduzir a ansiedade com a escassez de tempo para se lecionar e esporadicamente se realizarem um ou outro trabalho transdisciplinar. Parece-nos que faltou mais orientação, mais formação e mais objetividade na definição de trilhos a seguir, para além de se absorver os professores com muitas e simultâneas alterações ao nível da política educativa. Por isso, a oportunidade aberta parece não ter ainda vingado. Com as "Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática", de 27 de março de 2020, que certamente irão balizar os futuros programas da disciplina de matemática, abre-se uma nova janela de oportunidade. Está assim reunida, mais do que nunca, a possibilidade da abordagem à algoritmia e programação deixar a timidez que se tem notado, o que é de todo desejável. Será, também, uma oportunidade de se avançar corajosamente de modo a reduzir substancialmente o atraso em relação a outros sistemas educativos, como o francês, até porque está em jogo a competitividade económica entre países.

Os futuros programas de matemática nos dirão se a relevância desta temática será acomodada, mas é legítimo o receio de que continuemos com uma abordagem demasiado tímida pela forma como tal surge na Recomendação 2 (pág. 293).

Não podemos terminar esta abordagem inicial sem referir que não se pode pretender que se ensine programação, mas sim que a programação seja uma ferramenta para aprendizagens matemáticas mais significativas e mais ricas. Também nos parece que a programação não deverá ser uma ferramenta exclusiva às aprendizagens matemáticas, mas sim uma ferramenta transversal a outras as áreas curriculares e não curriculares, obviamente com níveis e estratégias adequadas. Para desenvolver essa ferramenta é necessário recorrer a uma linguagem de programação, sendo o Python aquela que melhor se ajustará aos alunos do ensino secundário.

LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO – PORQUÊ O PYTHON?

Tomemos como exemplo o que ocorre em França, em que durante o College, período que corresponde ao 3.º Ciclo do ensino básico português, os alunos trabalham algoritmia e programação, de forma obrigatória desde 2016, utilizando Scratch, uma linguagem de programação por blocos. Esta linguagem é também sugerida em diversas oportunidades, não obrigatórias, no nosso sistema educativo no ensino básico, em particular nas experiências piloto desenvolvidas pela Equipa de Recursos e Tecnologias Educativas - ERTE, da DGE em 2015, 2016 e 2017, e posteriormente avaliadas (Ramos, 2016). Em 2019, a algoritmia e a programação surgem no ensino secundário francês, com passagem para uma linguagem em texto, sendo obrigatoriamente o Python.

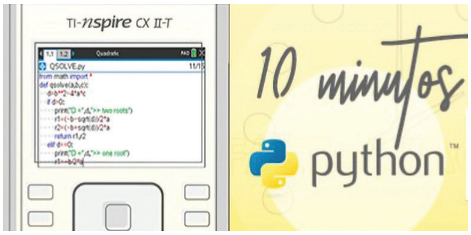
Mas porquê o Python? O que levará nos dias de hoje à opção pela utilização obrigatória desta linguagem de programação?

O Python é uma linguagem concisa, de sintaxe simples e clara, o que facilita a transição de uma linguagem por blocos para uma linguagem de texto. Por outro lado, há uma grande comunidade de utilizadores, em particular no contexto educacional, e uma grande riqueza de recursos disponíveis. Além disso, é *open source*, portanto gratuita, e funciona em vários sistemas operativos. A linguagem Python possuí ainda uma enorme quantidade de bibliotecas disponíveis, que podem ser úteis à matemática, mas também a outras áreas disciplinares, sendo esta a via da continuidade da sua evolução. Note-se que, em França, esta linguagem é referida nos programas de Física e Química do ensino secundário, sendo sugerida a sua aplicação em muitos dos temas tratados. Reforçamos que, a simplicidade da linguagem permitirá de certa forma desviar o foco do desenvolvimento de atividades de algoritmia e programação, diminuindo-se dificuldades acrescidas pela necessidade de aprendizagem da linguagem, mantendo o objetivo na aprendizagem matemática, no processo de resolução e decomposição de problemas, no pensamento criativo e reflexivo e na competência digital. A prioridade deve ser o ensino da matemática, não a programação e a algoritmia. Os detalhes técnicos não devem ser privilegiados como critério de avaliação da compreensão dos alunos, como é aliás defendido nos programas franceses.

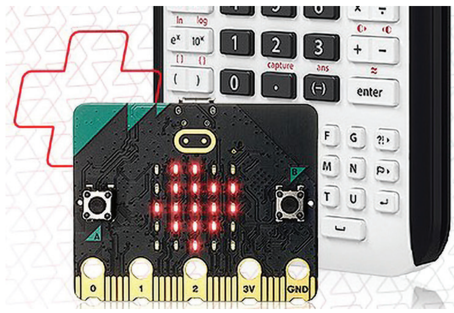
O criador desta linguagem de programação, em 1991, foi o holandês Guido van Rossum, a qual evoluiu de tal forma que hoje é já a linguagem de programação mais utilizada em todo o mundo. Ao contrário do que possa parecer, o nome da linguagem deve-se ao famoso programa de televisão "Monthy Python's Flying Circus" e não à cobra com igual nome, a qual apareceu numa publicação da O'Reilly, editora que habitualmente coloca animais na capa dos livros que edita. No entanto, é a imagem da cobra pitão que prevalece no logotipo do Python.

Segundo o seu criador, numa entrevista publicada no sítio do T3 Europa (da Texas Instruments Educacional) em março de 2020, o poder desta linguagem reside no facto do seu código ser curto e muito literal, de fácil leitura, tornando-se adequada para programadores que estejam a iniciar e mais avançados. Diz ainda que, esta linguagem de programação é muito intuitiva, sendo por isso uma das melhores opções para o ensino da programação no Ensino Secundário, em que os alunos podem adquirir competências essenciais para a vida moderna através da sua utilização, aprendendo ao mesmo tempo Matemática. Embora Python seja fácil de aprender, isso não significa que seja uma linguagem "básica", por exemplo, todas as empresas de tecnologia de Silicon Valley, a capital global da tecnologia, utilizam Python em pequena e em grande escala.

Neste sentido, procurando proporcionar aos alunos do Ensino Secundário a oportunidade de trabalho com esta linguagem de programação, as principais empresas que produzem calculadoras gráficas estão a aderir à sua integração nesses dispositivos. A Texas Instruments adicionou uma nova aplicação às suas calculadoras gráficas, a aplicação TI-Python, mantendo a sua anterior aplicação de programação básica, que já denotava uma visão do interesse da programação nas "mãos" dos alunos. Desta forma, procura-se mais uma vez criar as condições técnicas para que os alunos tenham a oportunidade de explorar a tecnologia portátil que, infelizmente, ainda é muito vista e usada como apenas uma calculadora gráfica. Neste sentido, a Texas Instruments disponibiliza, ainda, um conjunto de módulos iniciais de introdução à programação com Python, em contexto educativo, através da sua iniciativa "10 minutos de Código com Python" disponível em https://education.ti.com/pt/atividades/ti-codes/python/nspire.



Sendo esta uma linguagem aberta, será possível acrescentar novos módulos/bibliotecas à aplicação TI-Python procurando colocar ao dispor dos professores e dos alunos ferramentas que permitam integrar maior número de artefactos digitais/tecnológicos, o último dos quais foi a placa BBC micro:bit, excelente para a realização de projetos STEAM. Esta placa, programável em Python, começou a ser distribuída gratuitamente a todos os estudantes dos países do Reino Unido em 2016, com programas educacionais desenvolvidos pela BBC e com resultados comprovados

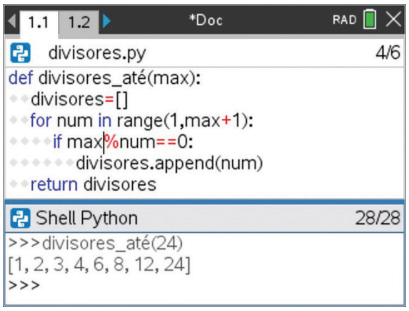


APRENDIZAGENS (E COMPETÊNCIAS) MATEMÁTICAS COM O TI-PYTHON

Nos exemplos simples que apresentamos de seguida reforçamos a importância da necessidade do conhecimento matemático para a construção do algoritmo e do programa, isto é, a programação requer a mobilização e reforça os conhecimentos matemáticos. Quando proposto ao aluno como projeto, de preferência em trabalho colaborativo com colegas, a tarefa de planear e criar a estrutura do programa possibilita o desenvolvimento de competências, como por exemplo, entre muitas outras, o simples testar, descobrir o erro e retificar. Além disso, é importante referir que o DigCompEdu, já citado, engloba três grandes competências, sendo uma delas a dos aprendentes. Deste modo, estará a contribuir-se para a promoção da competência digital dos aprendentes, não só nos aspetos da literacia digital, mas sobretudo na resolução de problemas, comunicação e colaboração.

Divisores de um número natural

No ecrã da TI-Nspire CX II que se segue, pode observar-se um exemplo de programação associada à matemática, onde se pretende apresentar uma lista dos divisores de um dado número natural.

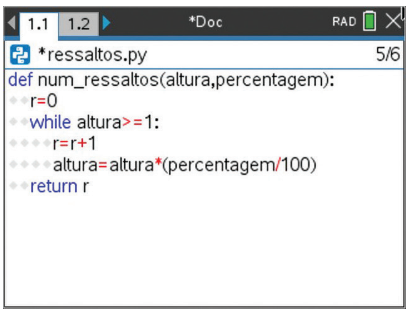


```
1.1  1.2  *Doc  RAD
divisores.py  4/6
def divisores_até(max):
  divisores=[]
  for num in range(1,max+1):
    if max%num==0:
      divisores.append(num)
  return divisores
Shell Python  28/28
>>>divisores_até(24)
[1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24]
>>>
```

Este exemplo, com conteúdos do ensino básico, poderá ser explorado no ensino secundário como revisão de um conteúdo e uma primeira experiência na linguagem Python. Permitirá ao aluno conhecer alguns dos operadores algébricos do Python e ciclos repetitivos.

Ressaltos de uma bola

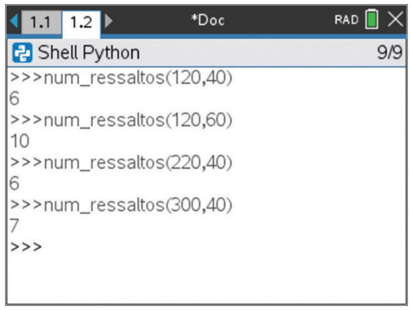
Neste exemplo, adaptado do que consta da publicação, "10 minutos de código com Python", pode observar-se um contexto com maior aproximação à Física. Pretende-se obter o número de ressaltos realizados por uma bola até que esta atinja uma altura estritamente inferior a 1 cm, sabendo que a bola é largada de uma determinada altura (em centímetros) e que ressalta no solo atingindo uma altura que é uma percentagem da altura do ressalto anterior.



```
1.1  1.2  *Doc  RAD
*ressaltos.py  5/6
def num_ressaltos(altura,percentagem):
  r=0
  while altura>=1:
    r=r+1
    altura=altura*(percentagem/100)
  return r
```

Note-se que, se o dado de saída fosse a altura da bola nos seus vários ressaltos, então poder-se-ia ter uma exploração de progressões geométricas, num contexto de Matemática A. Bastaria, para isso, alterar a variável de saída (*return*) para a *altura* e definir como condição do ciclo recursivo a altura ser muito próxima de zero, podendo-se ainda explorar o conceito de limite de uma sucessão.

Neste exemplo torna-se ainda evidente o conceito de função, de argumento (objeto), e de saída (imagem), sendo, no caso, um exemplo de uma função de duas variáveis.

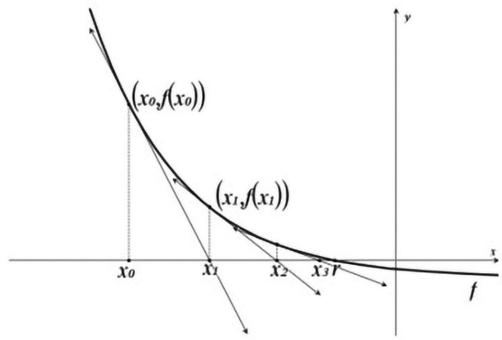


```
1.1  1.2  *Doc  RAD
Shell Python  9/9
>>>num_ressaltos(120,40)
6
>>>num_ressaltos(120,60)
10
>>>num_ressaltos(220,40)
6
>>>num_ressaltos(300,40)
7
>>>
```

MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES E RECURSIVIDADE

Há cerca de 40 anos, o grande pedagogo Sebastião e Silva, referia-se às vantagens da integração curricular precoce do cálculo de aproximações numéricas num contexto de uma certa crítica ao "ensino tradicional" à época (Gonçalves, 2014). As suas reflexões não caducaram e a título de exemplo, observe-se a ideia do método de Newton-Raphson.

Neste método, considera-se uma função *f* da qual se pretende obter uma aproximação de um zero dada uma sua aproximação inicial. Em condições não muito exigentes obtemos a cada aplicação de uma função iteradora uma melhor, muito melhor, aproximação do zero, utilizando cada aproximação obtida. Dada a aproximação inicial x_0, a aproximação seguinte, x_1, é a abcissa do ponto de interseção da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa x_0 com o eixo das abcissas. Cada nova aproximação resulta da anterior aplicando o mesmo procedimento, ilustrado na representação gráfica da figura.



Pode ser um momento interessante o trabalho algébrico para determinar uma aproximação a partir da anterior e com isso perceber que tal pode ser gerado pela fórmula (função iteradora) .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Um processo destes pode traduzir-se em linguagem de programação Python como se apresenta nas figuras seguintes, no caso para a função $f(x)=x^2-2$:

```
3.2  3.3  3.4      *S11
*newton.py                                  7/13
from math import *
print("nitera(aproximação,nº de iterações)")
def f(x):
  return x**2-2
def df(x):
  return 2*x

def nitera(a,n):
  for i in range(n):
    a=a-f(a)/df(a)
  return a
```

```
3.2  3.3  3.4      *S11
Shell Python                                9/9
>>>nitera(2,1)
1.5
>>>nitera(2,2)
1.416666666666667
>>>nitera(2,3)
1.41421568627451
>>>sqrt(2)
1.414213562373095
>>>
```

AS PROMOÇÕES E OS DESCONTOS SOBRE DESCONTOS

A literacia financeira é essencial para qualquer cidadão, mais ainda nos dias de hoje em que somos constantemente bombardeados com agressivas campanhas e promoções.

Na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, aconselha-se que a introdução ao tema de Modelos Financeiros se inicie de forma simples, mas contribuindo de forma clara para o conhecimento do cálculo de percentagens, de descontos e para a importância do cálculo mental.

No exemplo que se apresenta em seguida, encontra-se construído na aplicação TI-Python um curto e simples programa para cálculo do custo final perante um desconto, ou perante um desconto sobre o custo resultante de um anterior desconto, isto é, o designado "desconto sobre o desconto". Será interessante perceber-se o que diriam a maioria dos cidadãos sobre o desconto final, quando temos um "desconto sobre desconto", será que dirão que é igual à soma dos dois descontos! Será mesmo assim?!

```
maisdescontos.py                            13/13
from math import *
print("Funções custo1 e custo 2:")
print("▸ custo1(c0,pdesc1)")
print("▸ custo2(c0,pdesc1,pdesc2)=(custof, pdescf)")
def custo1(c0,pdesc1):
  desc1=c0*pdesc1/100
  c1=c0-desc1
  return c1
def custo2(c0,pdesc1,pdesc2):
  c1=c0*(1-pdesc1/100)
  c2=c1*(1-pdesc2/100)
  pdesctotal=(c0-c2)/c0
  return c2, pdesctotal
```

Partindo da aplicação das funções definidas em Python, constantes da figura que se segue, podemos já formular uma conjetura a esse respeito, quer usando a função definida para tal, no caso *custo2*, em que além do custo final surge a percentagem final de desconto, ou então utilizando o conceito de função composta, isto é, a função *custo1* após ela própria.

```
1.1  1.2      MACS10º-MF
Shell Python                                9/12
>>>#Running maisdescontos.py
>>>from maisdescontos import *
Funções custo1 e custo 2:
▸ custo1(c0,pdesc1)
▸ custo2(c0,pdesc1,pdesc2)=(custof, pdescf)
>>>custo1(340,25)
255.0
>>>custo2(340,15,10)
(260.1, 0.2349999999999999)
>>>custo1(custo1(340,15),10)
260.1
```

Este simples programa permite uma abordagem pedagógica experimental, de índole investigativa e construtiva, colocando o aluno no centro do processo.

Estas são apenas algumas das vantagens que a programação e o pensamento computacional poderão trazer ao processo de aprendizagem e ao desenvolvimento de competências, numa altura em que urge recuperar o tempo já perdido neste primeiro quarto do século XXI.

Referências bibliográficas

Bocconi, S., Chioccariello, A., Dettori, G., Ferrari, A., Engelhardt, K. (2016). Developing computational thinking in compulsory education – Implications for policy and practice; EUR 28295 EN; doi:10.2791/792158

DGE. (2015). Iniciação à Programação no 1.º Ciclo do Ensino Básico - Linhas Orientadoras Gerais. Retirado de http://www.erte.dge.mec.pt/sites/default/files/Projetos/Programacao/IP1CEB/linhas_orientadoras.pdf

DGE. (2016). Iniciação à Programação no 1.º Ciclo do Ensino Básico - Linhas Orientadoras para a Robótica. Retirado de http://www.erte.dge.mec.pt/sites/default/files/linhas_orientadoras_para_a_robotica.pdf

DGE.(2017). Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Retirado de https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Lucas, M., & Moreira, A. (2018). DigCompEdu: quadro europeu de competência digital para educadores. Aveiro: UA

Ramos, J.L., Espadeiro, R.G. (2016) Estudos de Avaliação - 1.º Ciclo: Iniciação à programação. Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora. ERTE. MEC/DGE

Gonçalves, R. (2014) Utilização de métodos numéricos na resolução de equações e perspetivas de integração curricular no Ensino Secundário. Universidade do Minho

Sítios web consultados em maio de 2021:

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/73/3/Algorithmique_et_programmation_787733.pdf

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/34/0/RA19_Lycee_GT_2-1_MATH_preambule-algorithmique-programmation_1172340.pdf

https://education.ti.com/pt/t3-europe-sites/t3-europe/edublogs/interview-guido-rossum

https://www.dge.mec.pt/noticias/recomendacoes-para-melhoria-das-aprendizagens-dos-alunos-em-matematica-0

Eduardo Cunha
Agrupamento de Escolas de Barcelos

Raul Aparício Gonçalves
Agrupamento de Escolas de Ermesinde
Membros do Grupo de Trabalho T3 da Associação de Professores de Matemática

Ensino da geometria com o Geogebra — duas experiências em diálogo

No ano letivo 2020-21 iniciámos uma experiência inédita. Como formadoras estamos, em conjunto, a realizar uma oficina de formação sobre a utilização do Geogebra para aprender geometria, dirigida a professores dos 1.º e 2.º ciclos. Esta oficina foi organizada para ser alimentada por duas experiências de ensino, a decorrer em simultâneo, de cada uma das duas formadoras com os seus alunos. A diferença entre as duas experiências de ensino, da responsabilidade separada das formadoras, é que uma de nós, a Graça, está a trabalhar com crianças do 1.º ano de escolaridade e a outra, a Cristina, com alunos de uma licenciatura de formação de professores e educadores, na unidade curricular de geometria. Os propósitos, os conteúdos e as metodologias de cada uma das experiências são naturalmente muito diferentes. Porém, o facto de estarmos em contacto sistemático e em situação de partilha na ação de formação aproximaram muito as duas experiências, bem como o interesse por estabelecer ligações e por refletir em conjunto sobre as nossas experiências separadas e tão distintas.

Este texto é da responsabilidade das duas formadoras e é escrito numa fase avançada do ano letivo, em que as duas experiências de ensino estão a chegar ao fim. O nosso objetivo com a elaboração deste texto é partilhar algumas ideias que nos ajudam a refletir sobre o ensino da geometria com recurso a um ambiente de geometria dinâmica. Apesar de estarmos as duas em contacto sistemático para organizar e dinamizar as sessões de formação contínua, decidimos usar uma metodologia de diálogo real para refletir em conjunto e escrever sobre estas experiências. Este primeiro texto resulta, portanto, de um primeiro diálogo que gravámos e do qual retirámos as ideias mais significativas. Naturalmente que, conhecendo-nos mutuamente muito bem, focámos o diálogo e disciplinámo-nos para não dispersar nem misturar as reflexões.

Para este primeiro texto, selecionámos apenas a reflexão sobre a aprendizagem inicial das ferramentas do Geogebra. Decidimos, também, que será mais interessante recorrer a uma narrativa de discurso direto, seguida de uma breve conclusão. O diálogo que apresentamos é o primeiro de uma série cuja dimensão ainda não estabelecemos. Podemos, por isso, afirmar que as reflexões que apresentamos estão ainda em construção.

APRENDER A USAR AS FERRAMENTAS GEOGEBRA

— Sabes Graça, um dos aspetos sobre o qual tenho pensado muito é a aprendizagem das ferramentas geogebra. No ano passado, uma das razões porque eu acho que a minha experiência de utilização da geometria dinâmica falhou com os meus alunos foi porque não havia tarefas dirigidas para aprender a usar as ferramentas do Geogebra. Os meus alunos não tiveram qualquer curiosidade em ir descobrir e explorar, só por si, o ambiente dinâmico.

— Eu acho que com os pequeninos a atitude é diferente. A curiosidade é tanta, a vontade de explorar é tanta que eu tenho de funcionar um bocadinho sobre outra vertente.

— É por isso que elaboras as tarefas que mostraste para eles aprenderem a usar as ferramentas? Não sei se davas este nome?

— Chamo guiões. Tenho necessidade de elaborar o guião que é, precisamente, para os obrigar a parar um bocadinho naquele envolvimento e naquele entusiasmo todo e pensar naquilo que estão a fazer e dali tirar algum conhecimento matemático. A ideia que eu tenho é que para eles o computador e o tablet são jogos e, portanto, tudo é jogo e começam a encarar o Geogebra ou qualquer coisa que façam também como um jogo. Por isso, acham piada, exploram, mexem. Ao longo destes anos todos em que tenho usado o Geogebra, fui sentindo a necessidade de ter alguma coisa que os abrigue a parar, a pensar e a registar aquilo que vai acontecendo no computador, porque, se não, o entusiasmo é tanto que aquilo que eu quero que eles aprendam e que eles vejam ou a que estejam atentos passa um bocado ao lado.

— Disseste aí uma série de coisas extremamente interessantes. Há uma diferença tão grande na atitude que os teus alunos têm, que acho que isto deve ser discutido de uma maneira mais extensa e mais calma, mais desenvolvida. Isto significa que podemos falar só sobre este aspeto — como começar?

— Como este é o primeiro ano em que estou a trabalhar o Geogebra no 1.º ano, senti necessidade de começar com os conceitos mais simples, mais básicos e, ao mesmo tempo, ir trabalhando as ferramentas. Comecei com o ponto e daí foram surgindo outras ferramentas porque eles também vão desenvolvendo, vão questionando e vão eles próprios explorando (figura 1 – 1.º guião). Eu acho que é importante, sobretudo com os mais pequeninos, ter muitos momentos ou vários momentos para parar, para refletir sobre aquilo que está a acontecer no ecrã do computador porque, se assim não acontecer, eles encaram aquilo mais como jogo e a aprendizagem não tem, claro, os efeitos que nós estamos à espera.

— Foi a partir da observação dos teus guiões que decidi que tinha de iniciar de outra maneira com os meus alunos. Eu tinha de começar com o sentido de que cada aluno vai ter que aprender a usar um conjunto de ferramentas com o objetivo de as usar para construção de conhecimentos geométricos. E esta relação é muito interessante. No teu caso, se tu não orientares o caminho de exploração, o entusiasmo deles é tão grande que não há reflexão sobre o que estão a aprender, sobre o que está a acontecer. No caso dos meus alunos, se eu não orientar não acontece nada. Como não há curiosidade e como não reconhecem o potencial de cada ferramenta não avançam. E não há o entusiasmo lúdico e de exploração que os teus miúdos têm, eles não fazem nada. Isso foi o que eu senti no ano passado. Simplesmente, a maior parte dos alunos não explorava por si. Ensinar a utilizar as ferramentas teve que passar a ser um objetivo. E teve que ser um objetivo, com tarefas muito orientadas e muito autónomas.

— É engraçado pensar na enorme diferença entre as nossas intenções.

— Ou seja, aquelas orientações não são guiões, eu não chamei guiões, chamei tarefas autónomas. Embora não tendo esta designação foi sempre o que foi dito aos alunos, são tarefas autónomas que nem sequer chegam a ser discutidas, porque a maneira como são construídas é no sentido de que os estudantes possam desenvolver a sua aprendizagem sozinhos. Paralelamente a estas tarefas havia outras focadas nos conceitos geométricos, estas sim discutidas. Eu utilizo vários tipos de tarefas: as tarefas para aprender a usar as ferramentas geogebra e conhecer as funcionalidades do ambiente de geometria dinâmica; as tarefas geométricas para trabalhar os vários tópicos de geometria; e a resolução de problemas que também é outra componente das tarefas propostas. Há aqui uma diferença muito grande, porque para ti, as tarefas eram as tarefas.

— Eles são pequeninos, no 1.º ano eles não sabem ler e por isso há ali muita intervenção da professora. Eu normalmente chego à sala, apresento a tarefa e tenho de o fazer antes de mandar abrir o tablet, se não já não consigo cativar a atenção deles para aquilo que quero explicar, abro o Geogebra e apresento a ferramenta. Normalmente até faço assim: numa aula eles exploram livremente a ferramenta. Eles vão falando e eu vou passando e vou vendo o que eles estão a fazer e se se aproximam daquilo que eu quero trabalhar com aquela ferramenta.

— Então não se passa tudo na mesma aula? E como é que estão organizados na aula?

— Não. Nessa primeira aula, enquanto fazem a exploração livre da ferramenta, eu vou questionando enquanto decorre o trabalho em pares ou individualmente. No final, eu pergunto sempre o que conseguiram fazer com a ferramenta. Eles vão dizendo e há sempre um que conseguiu ir um bocadinho mais longe. Vamos partilhando e eu registo o que fizeram com aquela ferramenta. Depois, na aula seguinte, já trago o guião da tarefa.

— Mas há um grande período de tempo entre as aulas dedicadas ao Geogebra porque há outras atividades de outras áreas intercaladas.

— Só trabalhamos um tempo por semana. Depois da primeira exploração da ferramenta, na semana seguinte, quando lhes trago o guião, relembramos o que é possível e o que conseguiram fazer com aquela ferramenta e então aí sim, eles vão seguindo os passos do guião e vão fazendo aquilo que é proposto. Mas mesmo assim, eu tenho de andar muito próximo deles porque eles ainda não conseguem ler e também não conseguem reter mais de duas ou três orientações seguidas. Portanto eu vou andando, vou fazendo muitos momentos de pausa e são eles que vão orientando muito a aula, também. Se há um que levanta uma questão e, se vejo que estão muito envolvidos noutra coisa avanço, mas depois paro para explicar ou questionar se alguém sabe responder àquela questão do colega. E normalmente há sempre um ou outro que sabe.

— Acabas por partir muito do que eles são capazes de fazer sozinhos.

— Os meus alunos sabem muito sobre as funcionalidades tecnológicas. Por exemplo, hoje houve necessidade de falar no botão direito do rato para fazer a seleção de uma figura para depois a refletirem. Os que tinham tablet, não sabiam onde tinham o botão direito do rato e houve um que logo explicou "pões lá o dedo e esperas um bocadinho que logo aparece e depois já consegues fazer".

CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

— Portanto, são eles próprios que vão orientando. Para que haja de facto conhecimento matemático, tem que haver momentos de pausa, momentos de reflexão e no final uma síntese daquilo que aprenderam. Há sempre essa síntese do que aprenderam e outra ideia importante é que há muitas coisas que eles aprendem por si. Por exemplo, o que é um segmento de reta? Eu nunca expliquei, nunca senti necessidade de lhes explicar o que é um segmento de reta. Como os alunos usam, vão construindo o conceito. Depois, por acaso, surgiu a questão da diferença entre uma reta e um segmento de reta e eles, através da experimentação e da observação, foram dizendo o que achavam que era um e o que era outro.

— E o que é que eles achavam que era um e outro?

— Eles achavam que o segmento de reta tem um ponto para começar e um ponto para terminar e foi assim que eles disseram: "fazemos um ponto para começar e desenhamos outro ponto e ele termina e a reta nós desenhamos e por mais que se ande com a folha para um lado e para o outro não se consegue perceber onde é que ela começa e onde é que ela acaba, mas também tem dois pontos". Eles veem os dois pontos na reta, mas não veem onde ela começa nem onde acaba e "o segmento de reta até pode ser um bocado da reta". Portanto, são conceitos que eles vão construindo e eu acho que a imagem e a representação mental que eles vão criando, se calhar é presunção da minha parte, ou também porque gosto muito de Geogebra e já não sei trabalhar de outra maneira, mas eu acho que em lado nenhum conseguiriam construir uma representação, uma imagem mental tão correta e sozinhos praticamente, sendo depois só necessária a reflexão e a sintetização daquilo que eles vão construindo.

— Esse relato é muito interessante. E deixa-me dizer que eu comecei por ter os meus alunos a reagirem muito mal e alguns deles a quererem que o uso da geometria dinâmica não fosse obrigatório na unidade curricular. Nas primeiras semanas havia uma resistência enorme e numa conversa que tivemos eu disse: podemos mudar tudo menos a geometria dinâmica. Todo o trabalho que vamos realizar nesta unidade tem de ser feito com recurso ao Geogebra. Claro que eles foram ultrapassando a resistência e algumas semanas depois uma aluna disse-me — "Tenho uma coisa muito interessante para lhe dizer. Eu dou explicações a miúdos do 5.º e 6.º anos e a única maneira que eu encontrei para que eles percebessem, finalmente, a diferença entre reta, semirreta e segmento de reta foi usando o Geogebra". Exatamente o que tu estás a dizer.

— Pois é. Eles mexiam, mexiam, arrastavam, arrastavam e comentavam "isto nunca mais acaba". E como este muito outros conceitos que eles vão adquirindo.

— A minha aluna acabou ainda por dizer — "Tenho que reconhecer que o recurso à geometria dinâmica, do ponto de vista visual, cria condições para uma compreensão diferente. Os miúdos conseguem, de facto, entender o que é não ter princípio nem fim, que é uma ideia muito forte relativamente à reta. O Geogebra dá precisamente essa ideia porque por mais voltas que deem nunca aparece o fim nem nunca aparece o princípio."

— Mas o professor tem de os ir questionando também, porque se não houver ali uma intervenção orientando-os e, sobretudo, questionando-os, as coisas passam ao lado. Eles veem, mas se não se perguntar o que é e porque é que é, nem sequer pensaram, nem se construiu dali um conhecimento que ficasse, que eles interiorizassem como algo importante e algo que aprenderam.

— É por isso que eu não podia ceder. Podia ceder em tudo, mas não podia ceder no recurso ao ambiente dinâmico e teve de ficar claro para eles que isso era completamente intocável porque eu estou completamente convencida que era isso que iria fazer a diferença. Não era nos conteúdos, os objetos a estudar poderiam ser triângulos ou quadriláteros, não era aí que estava a diferença. A diferença estava exatamente na geometria dinâmica e na forma de trabalhar as relações geométricas com base numa experimentação com todas as características que um ambiente desta natureza possibilita. Assim como tu também estás completamente convencida, e porque estás convencida também investes desta maneira, também tens essa atitude sobre a construção do conhecimento geométrico e da sua importância na construção do conhecimento matemático.

— Claro que sim. Daí a minha persistência na utilização do Geogebra como ferramenta de aprendizagem e como aprendizagem propriamente dita. Os alunos constroem conhecimentos com as ferramentas, uma vez que elas incorporam muitos conceitos matemáticos, e com as atividades que realizam com essas ferramentas.

— Felizmente que me mostraste os guiões que estavas a usar com os teus miúdos. A tua orientação das tarefas influenciou-me bastante. A ideia principal foi a de que houvesse algum objetivo de aprendizagem matemática, portanto não era só usar a ferramenta pois esta tinha que servir para uma aprendizagem matemática específica. Eu acho o teu primeiro guião sobre os pontos (figura 1), em que questionas o que é possível fazer com três pontos, um guião muito bem pensado. Esse guião influenciou muito esta minha nova forma de encarar a necessidade de aprender a utilização das ferramentas Geogebra. O que é possível fazer com três pontos é uma perspetiva matemática da utilização da geometria muito interessante para aprender a usar as ferramentas com o objetivo de aprender matemática. Não se trata de aprender a usar as ferramentas só porque sim, e esse potencial é inerente a toda a matriz concetual dos ambientes de geometria dinâmica e tem que ser trabalhado também.

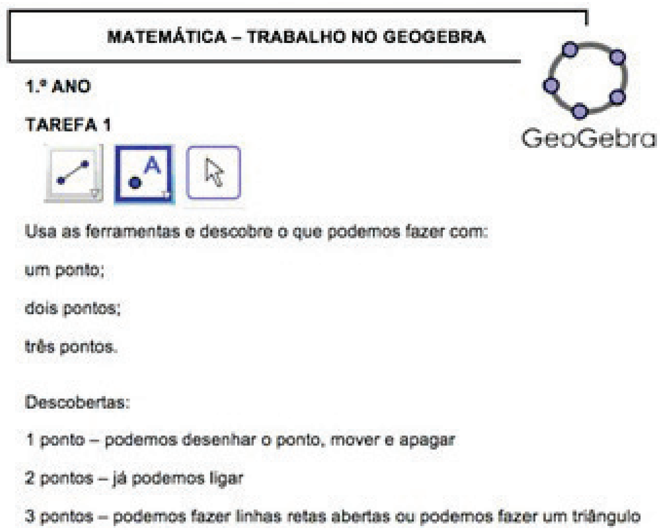
— Os guiões são pensados numa perspetiva de orientar/focar os alunos na realização da tarefa, explorando as ferramentas que lhes permitam construir os conceitos geométricos e avançar na aprendizagem matemática.

— Claro que a tua dinâmica de aulas é muito diferente da minha, pela diferença de idades e pela diferença de objetivos de aprendizagem. Eu quero que estes meus alunos, para além de aprenderem geometria, desenvolvam um conjunto de competências e de atitudes e, também, que ao desenvolvê-las, enquanto adquirem conhecimentos de geometria, comecem também a ter uma perspetiva didática sobre esses conhecimentos. Eles estão a aprender geometria para irem ensinar geometria às crianças pequenas.

COMENTÁRIOS FINAIS

Com este primeiro diálogo pretendemos evidenciar algumas ideias em jeito de conclusão deste primeiro diálogo:

– A necessidade de criar tarefas de aprendizagem sobre as ferramentas e funcionalidades do ambiente de geometria dinâmica (guiões no caso do 1.º ano de escolaridade; tarefas autónomas com os estudantes adultos).
– O enorme poder de aprendizagem de conhecimentos geométricos inerente à utilização do ambiente de geometria dinâmica (AGD). Um AGD é uma representação do plano em que estão integrados os instrumentos comuns da geometria: a régua, o esquadro, o compasso, o transferidor. É importante destacar que um ponto livre num AGD representa qualquer ponto do plano e, por isso, ao trabalhar com um ponto livre estamos a trabalhar com todos os pontos do plano. Temos presente à nossa vista e podemos manipular o caráter infinito do conjunto de pontos do plano.
– A natureza de dependência dinâmica entre um ponto livre e um ponto construído, entre os elementos livres de uma construção e os elementos construídos a partir dos elementos originais. É esta dependência e a sua manipulação que nos permite explorar e conhecer as propriedades dos objetos geométricos construídos, por mais simples que eles sejam.
– O valor insubstituível de um AGD na construção do raciocínio espacial perante objetos geométricos que o sujeito cria ou constrói, que observa, analisa e manipula.


MATEMÁTICA – TRABALHO NO GEOGEBRA

1.º ANO

TAREFA 1

Usa as ferramentas e descobre o que podemos fazer com:

um ponto;

dois pontos;

três pontos.

Descobertas:

1 ponto – podemos desenhar o ponto, mover e apagar

2 pontos – já podemos ligar

3 pontos – podemos fazer linhas retas abertas ou podemos fazer um triângulo

Figura 1. 1º Guião usado no 1º ano de escolaridade

Cristina Loureiro
Escola Superior de EducaçãoDe Lisboa

Graça Pereira
Agrupamento de Escolas de Alapraia

Teremos Triângulo?

José Paulo Viana

Problema:

> *Temos uma vara muito fina com um metro de comprimento. Partimos a vara por dois pontos aleatoriamente sorteados. Qual é a probabilidade de ser possível construir um triângulo com os três pedaços de vara?*

Antes de começar, notemos que estamos a admitir implicitamente que todos os pontos da vara têm igual possibilidade de serem escolhidos, ou seja, que não há pontos preferenciais por onde a vara será partida.

Numa primeira análise, o problema não parece fácil de resolver. Temos duas variáveis (as posições dos dois pontos) cada uma delas com uma infinidade de casos possíveis. No entanto, como veremos, a atual tecnologia disponível pode ser muito útil e permitirá ultrapassar esta dificuldade. E depois, até podemos ir mais longe.

Vamos usar o método de Monte Carlo, fazendo muitas simulações da situação em análise. Não iremos partir muitas varas, mas sim arranjar um processo fácil e rápido de imitar a vara a ser partida. Se cada experiência for equivalente à situação real e tivermos um registo do que aconteceu em cada caso (foi possível construir o triângulo ou não), após "muitas" experiências a frequência relativa dos casos favoráveis estará "próxima" da probabilidade procurada. Mais à frente veremos melhor o que significam aqui as palavras "muitas" e "próxima".

1.º MÉTODO – MONTE CARLO

A grande vantagem da tecnologia é ser possível fazer simulações rapidamente e em grande quantidade, imitando o acaso e reproduzindo a realidade. Iremos usar aqui a TI-Nspire mas, evidentemente, tudo poderá ser feito usando outros programas ou calculadoras equivalentes.

Em cada experiência a fazer, há os seguintes passos a cumprir:

1. Escolher aleatoriamente os dois pontos.
2. Determinar os comprimentos dos três pedaços de vara obtidos.
3. Testar se o triângulo é possível.
4. Registar o resultado

No final de todas as simulações:

5. Calcular a frequência dos resultados positivos.
6. Avaliar a confiança no valor obtido.

No nosso processo, vamos utilizar o gerador de números aleatórios (na realidade, pseudoaleatórios). O gerador começa sempre pelos mesmos números. Se várias pessoas estiverem a fazer a mesma experiência, todas obterão os mesmos resultados (e lá se vai a confiança no *acaso*...). Convém, por isso, alterar o início do gerador. Abrimos um novo documento com uma página de *Calculadora* e damos a instrução **RandSeed** seguida de um número de vários algarismos. Por exemplo:

RandSeed 280421	*Efectuado*

Passamos agora para uma página de *Listas e Folha de Cálculo*, onde todas as simulações serão feitas, e muitas de uma só vez.

Passo 1) A posição dos pontos será definida pela distância a uma das extremidades da vara, com a distância a variar entre 0 e 1. O comando *rand(* gera precisamente números aleatórios nesse intervalo.

Na coluna A ficarão as posições do primeiro ponto (pt1) e na coluna B as do segundo ponto (pt2). Faremos mil simulações de uma só vez, dando a instrução *rand(1000)* em cada coluna.

	A pt1	B pt2	C	D	E
=	=rand(1000	=rand(1000			
1	0.052561	0.509483			
2	0.930911	0.509548			
3	0.060756	0.856151			
4	0.078548	0.469099			
5	0.812938	0.574749			
6	0.399882	0.856758			
7	0.955541	0.401688			
8	0.859088	0.766596			

C1

Passo 2) Nas três colunas seguintes ficarão os comprimentos dos *três pedaços* (*ped1, ped2 e ped3*) de vara.

Coluna C: *ped1* = distância da origem ao menor dos dois pontos, com o comando *=min(pt1,pt2).*

Coluna D: *ped2* = distância entre os dois pontos, com o comando *=abs(pt1-pt2).*

Coluna E: *ped3* = distância do maior dos pontos à extremidade da vara, com o comando *=1-max(pt1,pt2).*

	A pt1	B pt2	C ped1	D ped2	E ped3
=	=rand(1000	=rand(1000	=min(pt1,¦	=abs(pt1−	=1−max(p
1	0.052561	0.509483	0.052561	0.456922	0.490517
2	0.930911	0.509548	0.509548	0.421362	0.069089
3	0.060756	0.856151	0.060756	0.795395	0.143849
4	0.078548	0.469099	0.078548	0.390551	0.530901
5	0.812938	0.574749	0.574749	0.238189	0.187062
6	0.399882	0.856758	0.399882	0.456876	0.143242
7	0.955541	0.401688	0.401688	0.553853	0.044459
8	0.859088	0.766596	0.766596	0.092492	0.140912

E ped3:=1−max(pt1,pt2)

Note-se que cada linha corresponde a uma simulação.

Passo 3) Testar se o triângulo é possível.

Aqui, poderíamos ser tentados a usar diretamente a desigualdade triangular: qualquer lado tem de ser menor que a soma dos outros dois. Mas isso obrigaria a uma série de operações. Vamos partir da desigualdade mas fazendo umas alterações:

ped1 < ped2 + ped3

somando ped1 em ambos os membros:

ped1 + ped1 < ped1 + ped2 + ped3

mas a soma dos três pedaços é igual a 1, logo

2.ped1 < 1 ou ped1 < 0,5

Ou seja, para o triângulo ser possível, cada um dos pedaços tem de ser menor que 0,5.

Então, temos de pôr numa nova coluna o maior dos três pedaços. Só que a instrução *max(* só permite a comparação entre dois valores. Para não termos de fazer isto em duas operações, vamos usar um artifício. Na coluna F condensamos as duas comparações numa só com o comando *=max(ped1,max(ped2,ped3))*.

Passo 4) Registo dos resultados

O triângulo é possível se, na coluna F (*pedmaior*), o número for inferior a 0,5.

Pedimos agora que sejam contados quantos valores da coluna *pedmaior* não excedem 0,5. Para isso, numa célula da coluna G, damos a instrução *=countIf(pedmaior,?<0.5)*.

	C ped1	D ped2	E ped3	F pedmaior	G	H	I
=	=min(pt1,¦	=abs(pt1−	=1−max(p	=max(ped1			
1	0.052561	0.456922	0.490517	0.490517	triângulos		
2	0.509548	0.421362	0.069089	0.509548	263		
3	0.060756	0.795395	0.143849	0.795395			
4	0.078548	0.390551	0.530901	0.530901			
5	0.574749	0.238189	0.187062	0.574749			
6	0.399882	0.456876	0.143242	0.456876			
7	0.401688	0.553853	0.044459	0.553853			
8	0.766596	0.092492	0.140912	0.766596			
9	0.275456	0.142511	0.582032	0.582032			
10	0.224771	0.083504	0.691725	0.691725			
11	0.127425	0.066384	0.806191	0.806191			

G2 =countif(pedmaior,?<0.5)

Passo 5) Calcular a frequência dos resultados positivos.

Em 1000 simulações formaram-se 263 triângulos. A frequência relativa é 0,263. A probabilidade procurada estará perto de deste valor. Apesar de mil experiências nos parecerem muitas, temos de ir mais longe.

Passo 6) Avaliar que crédito dar ao valor obtido, pedindo um intervalo de confiança.

Fazemos isto numa página de *Calculadora*, pedindo o *intervalo z de uma proporção.*

zInterval_1Prop 263,1000,0.95: *stat.results*

"Título"	"Intervalo z de 1 prop"
"CLower"	0.235713
"CUpper"	0.290287
"p̂"	0.263
"ME"	0.027287
"n"	1000.

Vemos que o resultado das nossas mil experiências acontecerá 95% das vezes se a probabilidade real estiver entre 0,2357 e 0,2903. Há ainda uma grande imprecisão.

Afinal, mil simulações não são muitas. Temos de fazer mais. Para isso, vamos repetir o processo e pôr a máquina a guardar o resultado de cada milhar de casos. Com o comando *Guardar var,* transformamos o valor da célula G2 numa variável, dando um nome (por exemplo, *exitos*) e pedimos que os valores que ali forem aparecendo sejam guardados na coluna H (com o comando *Captura de dados Automático*).

Mas, felizmente, não temos de refazer o trabalho todo. Agora, cada vez que carregarmos simultaneamente nas teclas *ctrl* e *R*, o programa faz mais mil simulações e regista o resultado na coluna H. O processo é muito rápido.

	C ped1	D ped2	E ped3	F pedmaior	G	H	I
=	=min(pt1,¦	=abs(pt1−	=1−max(p	=max(ped1		=capture('	
1	0.234441	0.382322	0.383237	0.383237	Triângulos	263	
2	0.854833	0.029932	0.115236	0.854833	**266**	256	
3	0.04365	0.496726	0.459624	0.496726		272	
4	0.294194	0.620664	0.085142	0.620664	Repetições	250	
5	0.053471	0.523191	0.423338	0.523191	100	268	
6	0.00857	0.348018	0.643412	0.643412		213	
7	0.050149	0.195469	0.754382	0.754382	Probabilid	214	
8	0.098417	0.466812	0.434771	0.466812	0.25027	238	
9	0.300623	0.505808	0.193569	0.505808		266	
10	0.475023	0.342225	0.182752	0.475023		253	
11	0.203989	0.125197	0.670814	0.670814		251	

H =*capture*('exitos,1)

Para controlarmos quantas repetições já fizemos, na célula G5 pedimos a dimensão da coluna H, com a instrução *=dim(h[ ]).* Depois, calculamos a frequência relativa dividindo a soma da coluna H por mil vezes o número de repetições.

Neste exemplo foram feitas 100 repetições, o que dá um total de cem mil simulações. Feito isto, pedimos o intervalo de confiança a 95%.

```
zInterval_1Prop 25027,100000,0.95: stat.results
    "Título"   "Intervalo z de 1 prop"
    "CLower"          0.247585
    "CUpper"          0.252955
      "p̂"             0.25027
     "ME"             0.002685
      "n"             100000.
```

Agora, temos valores entre 0,2476 e 0,2530. A imprecisão é muito menor e ficamos com a suspeita de que a probabilidade de obter um triângulo será 0,25 (ou muito próxima). Mas passemos a outra abordagem.

2.º MÉTODO – MONTE CARLO COM PROGRAMAÇÃO

Se soubermos programar, podemos ir muito mais longe no número de simulações. Eis aqui um programa em Basic, que pode ser facilmente adaptado (e melhorado…) para outra linguagem de programação que o leitor prefira.

```
Define formartri()=
Prgm
Request "Simulações",s
êxito:=0.
For i,1,s
  pontos:=rand(2)
  pontos:=augment(pontos,{0,1})
  SortA pontos
  pedmaior:=max(ΔList(pontos))
  If pedmaior<0.5 Then
    êxito:=êxito+1
  EndIf
EndFor
Disp "P(formar triângulo) = ",((êxito)/(s))
EndPrgm
```

```
formartri()

Simulações 10000000
P(formar triângulo) = 0.250085

                                   Efectuado

zInterval_1Prop êxito,s,0.95: stat.results
    "Título"   "Intervalo z de 1 prop"
    "CLower"          0.249817
    "CUpper"          0.250354
      "p̂"             0.250085
     "ME"             0.000268
      "n"             1.E7
```

Após dez milhões de simulações, obteve-se o valor 0,250085, sendo de esperar que a probabilidade esteja entre 0,2498 e 0,2504.

3.º MÉTODO – RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA

Podemos fazer melhor e obter o valor exato da probabilidade, usando um processo geométrico.

Ao sortear os dois pontos aleatórios, que variam entre 0 e 1, o espaço de resultados é equivalente aos pontos de um quadrado de lado 1 (e podemos colocá-lo no 1.º quadrante de um gráfico cartesiano, com um vértice na origem do referencial). No eixo horizontal vamos pôr a posição do ponto 1 e no eixo vertical a do ponto 2. Temos agora de descobrir, no quadrado, quais são as regiões que correspondem a casos em que o triângulo é possível.

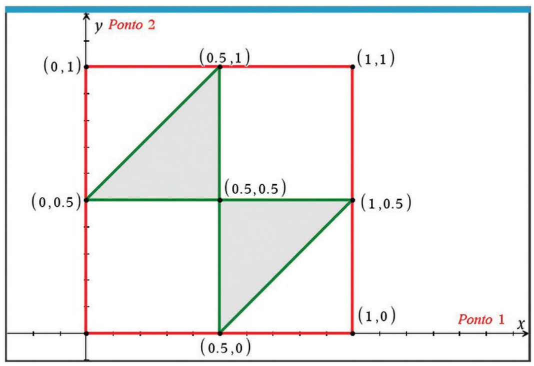
Em vez de ir logo para o caso geral, comecemos com um caso concreto.

Admitamos que o primeiro ponto (x) é inferior 0,5. Por exemplo 0,3. O segundo ponto (y) não pode ser inferior a 0,5 porque ficava o terceiro pedaço de vara ($1-y$) maior que 0,5. Logo $y>0,5$. Mas y não pode estar a uma distância de x superior a 0,5, logo $y<0,8$.

No caso geral e quando x é inferior a 0,5 será $0,5<y<x+0,5$.

Quando x for maior que 0,5, um raciocínio semelhante diz-nos que $x-0,5<y<0,5$.

Já podemos representar graficamente a zona de casos favoráveis. Ela corresponderá aos dois triângulos sombreados da figura.



É fácil ver que a área de cada triângulo é a oitava parte da do retângulo. Logo, a região favorável tem uma área igual a um quarto. Tal como suspeitávamos, a resposta ao problema é exatamente 0,25.

INDO MAIS LONGE

Não podemos ficar por aqui. Agora que o leitor já é um "especialista na situação", aqui fica o desafio:

Se partirmos a vara por três pontos ao acaso, qual é a probabilidade de ser possível construir um quadrilátero com os quatro pedaços obtidos?

José Paulo Viana

Desterritorialização didática de erros relacionados com $(x+y)^2$

Misleine Andrade Ferreira Peel
Patrícia Damas Beites
Maria de Fátima de Jesus Simões

Será que $(x+y)^2=x^2+y^2$ representa um erro? A resposta, sim ou não, depende do universo matemático em que se esteja a trabalhar. Com efeito, é um erro se, por exemplo, x e y forem números complexos arbitrários e "+" denotar a adição usual de números complexos. Mas não é um erro, e trata-se de uma identidade satisfeita, por exemplo, no contexto do semianel min-mais $\left(\mathbb{R}\cup\{\infty\},+,.\right)$, em que "+" denotaria a adição tropical (Beites & Nicolás, 2016).

Considerando o corpo dos números complexos, construímos algumas tarefas para a sala de aula que se baseiam em erros, relacionados com o desenvolvimento da expressão $(x+y)^2$ e identificados em produções de estudantes para uma tarefa de demonstração (Beites et al., 2021). Adotamos uma perspetiva construtiva do processo de ensino-aprendizagem, propondo a desterritorialização didática desses erros através de um olhar afetivo-positivo (Peel et al., 2020).

O POTENCIAL CRIATIVO DO ERRO

Muitos estudiosos da educação tentam simplificar o processo de ensino e de aprendizagem buscando uma didática generalizante para todas as áreas e para todos os estudantes. Kastrup (2001) relata que, ao longo da história da psicologia, o problema da aprendizagem geralmente é colocado objetivando o estabelecimento de leis para a aprendizagem, o que para a autora demonstra um caráter limitado desse tipo de estudo, pois essa perspetiva descarta a subjetividade dos sujeitos e dissocia a invenção do processo de aprendizagem; isso mostra uma visão homogénea dos sujeitos, como se todos fossem, nesse aspeto, iguais. O ensino por muito tempo foi compreendido como uma ação de transmissão dos conteúdos historicamente construídos; e o aprender, como uma aquisição passiva de conteúdos. E esse processo deveria ocorrer automaticamente, quase como um silogismo aristotélico: toda a aprendizagem é derivada do ensino; os sujeitos aprendem; logo, os sujeitos foram ensinados.

No entanto, a partir dos anos 50 do século passado, a subjetividade passou a ser considerada um fator fundamental para a aprendizagem, uma vez que "…os processos mentais, mediadores de pleno direito entre o contexto e (…) o comportamento." (Simões, 2000, p.13) passam a ser tidos em conta. Com efeito, o indivíduo é dotado de uma subjetividade constituída por um conjunto de processos cognitivos ou ações mentais com vista à obtenção de resultados ou produtos cognitivos sob forma de aprendizagem (Simões, 2000). Assim, desde essa época, a aprendizagem tem vindo a ser concebida em termos de construção ativa de conhecimento e significado das experiências do quotidiano em que o ensino promova uma educação de qualidade (Soares & Almeida, 2015). Nós entendemos que ensinar não é transferir conhecimentos, nem representar, nem seguir o modelo da recognição; ficamos com o entendimento da filosofia deleuziana, expresso por Kastrup (2001): "a aprendizagem é, sobretudo, invenção de problemas, é experiência de problematização" (p.17).

O ensino é experiência, experimentação; e neste processo os erros são bem comuns, sabemos que ainda existe um estereótipo negativo do erro no ambiente educacional: o erro é geralmente associado a uma série de afetos negativos como constrangimento, medo, tristeza, frustração, dentre outros; além disso, ele pode gerar consequências ruins, como reprovações e até mesmo humilhações públicas. Entendemos que toda essa situação pode atrapalhar o desenvolvimento cognitivo e emocional dos sujeitos (Rosário et al., 2004; Simões, 2001); compreendemos que este estereótipo acaba por se revelar como um território. O conceito de território que utilizamos aqui é o trabalhado por Deleuze e Guattari (1995), um lugar de hábitos e ritmos, de encontros e agenciamento, que não deve ter limites restritos, mas sempre abertos com linhas de fugas para uma desterritorialização e uma consequente reterritorialização.

Vemos, especialmente no ensino escolar da matemática, que existe um grande número de estudantes que fracassam na aprendizagem desta ciência, por isso nos propomos a pensar nos aspectos didáticos do erro, promovendo sua desterritorialização negativa, entendendo-o como parte do processo, como meio e não como um fim em si mesmo (Astolfi, 1999; Cury, 2012; Peng & Luo, 2009; Spinillo et al., 2014; Torre, 2007). É importante entendermos que o erro faz parte do processo de aprendizagem, como uma errância, e que, mais importante do que ser avisado de seu erro, é a sua percepção como caminho a ser trilhado, ou como desvio a ser feito, ou refeito; enfim, é preciso perceber como desabitar positivamente o território do erro.

Aprender é ser forçado a pensar, e pensar é experimentar, é estabelecer encontros; os encontros forçam o pensamento.

Entendemos que o ensino e a aprendizagem são acontecimentos, sendo o acontecimento conceituado por Deleuze e Parnet (1998) como algo múltiplo, o que foi assim indicado pelos autores:

> Uma multiplicidade que comporta muitos termos heterogêneos, e que estabelece ligações, relações entre eles, através das épocas, dos sexos, dos reinos – naturezas diferentes. Por isso a única unidade do agenciamento é de co-funcionamento: é uma simbiose, uma "simpatia. O que é importante não são nunca as filiações, mas as alianças e as ligas, não são os hereditários, os descendentes, mas os contágios, as epidemias, o vento" (p. 83).

O processo de ensino e de aprendizagem é múltiplo e complexo; é coletivo, é plural, é singular, é subjetivo, é marcado por encontros e por afetos; é, segundo Deleuze (2000), decifração de signos e criação. Aprender é experimentar e neste processo acontecem erros; isso de nenhuma forma significa negar o erro, mas naturalizá-lo no processo de ensino e de aprendizagem, esmiuçá-lo, analisá-lo e, por fim, desterritorializá-lo, fazendo-o atuar como um dispositivo, gerando uma potência criativa para agir e existir, tanto para os professores quanto para os estudantes. Assim, o erro será percebido como parte desse processo e tornar-se-á um dispositivo para a criação; Kastrup (2001) usa o termo errância, em uma analogia do aprender enquanto caminho e a errância como parte do processo:

> Quando viajamos somos forçados a conviver com uma certa errância, a perder tempo, a explorar o meio com olhos atentos aos signos e a penetrar em semióticas novas. Somos forçados a pensar, a aprender e a construir um novo domínio cognitivo e uma outra maneira de realizar atividades que eram tão simples e corriqueiras, das quais havíamos esquecido seu caráter inventado (p. 17).

Percebemos, então, que esse território estereotipado do erro precisa, urgentemente, de ser desterritorializado. Cury (2007) afirma que "se os futuros professores têm concepções negativas sobre o erro, se não aceitam sua ocorrência, como poderão ajudar seus alunos a superar o sentimento negativo em relação aos erros?" (p. 93). A desterritorialização do erro é necessária para que, de facto, aconteça a aprendizagem como reterritorialização; a aprendizagem é uma experimentação imanente, transformadora, libertadora e criativa – essencial para uma formação holística dos sujeitos.

TAREFAS PARA A SALA DE AULA

Como defende Pinto (1998), e muitos outros educadores e investigadores em educação matemática, o erro possui um precioso valor pedagógico e pode ser aproveitado para uma estratégia didática (Beites, Peel, & Costa, 2021). Esta, após o erro ser observável para o professor, visa tornar o erro observável para o estudante.

O termo observável, com a ideia de construção subjacente, diz respeito à tomada de consciência do erro. Concretamente para o estudante, observável "não no sentido de derrota, mas tomado como elemento constitutivo da gênese de todo conhecimento" (Pinto, 1998, p. 36), desequilibrando estruturas mentais até superar o erro.

No sentido referido, o papel do professor consiste em desterritorializar didaticamente o erro, criando estratégias didáticas a partir do erro, para promover a aprendizagem. Com efeito, o erro tem um potencial criativo, mas a criatividade reside "nas pessoas que são capazes de gerar novas ideias apoiando-se nele" (Torre, 2007, p. 15).

O estudante pode participar na desterritorialização e eventual reterritorialização do erro, provocada(s) pela estratégia didática do professor ou pela sua própria ação ao aperceber-se autonomamente do erro. Ambos os papéis possíveis do estudante podem conduzi-lo à (auto)regulação (Guimarães, 2016; Rosário et al., 2004).

A primeira proposta de tarefa é uma questão conceptual (figura 1), num domínio de conteúdo do ensino secundário – Números Complexos, adequada para integrar a implementação da aprendizagem pelos pares (Beites & Romano, 2014) e, em particular, promover a discussão entre pares (estudantes).

Um exemplo de uma proposição verdadeira é

$a)$ $\forall z, w \in \mathbb{C}, (z+w)^2 = z^2 + w^2$
$b)$ $\forall z, w \in \mathbb{C}, (z+w)^2 = 2(z+w)$
c) $\forall z, w \in \mathbb{C}, (z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$
d) nenhuma das opções anteriores

Figura 1. Proposta de uma tarefa envolvendo o conceito de quadrado da soma de dois números complexos.

A proposta na figura 2 tem múltiplas soluções, tipo de tarefa que envolve pensamento divergente e está associada à promoção da criatividade (Carlos, 2016). Exemplos de respostas finais possíveis são, para

a), $\forall z, w \in \mathbb{C}, (zw)^2 = z^2w^2$ e $\forall z \in \mathbb{C}, \forall w \in \{0\}, (z+w)^2 = z^2 + w^2$, e, para b), $\forall (z,w) \in \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z + w = 2\}, (z+w)^2 = 2(z+w)$ e $\forall z, w \in \mathbb{R}^+, \forall\, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ log_b(z+w)^2 = 2log_b(z+w)$.

Considere a tarefa anterior. Altere, de todas as formas que lhe ocorram, as opções incorretas de modo a obter proposições verdadeiras. Fundamente a sua resposta.

Figura 2. Proposta de uma tarefa complementar à da Fig. 1.

A proposta de tarefa na figura 3 é um exemplo erróneo (Rushton, 2018), tipo de tarefa que também pode ser utilizado para despoletar momentos de discussão entre pares (estudantes), em pequeno e em grande grupo, e com o professor nas aulas. Neste caso incorpora os erros que levaram à tarefa na figura 1.

Considere a tarefa e a resolução subsequentes. Identifique todos os erros cometidos na resolução e corrija-os.

Tarefa
Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, quaisquer. Simplifique, o mais possível, a expressão

$$(z+w)^2 + (z-w)^2.$$

Resolução
Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, quaisquer. Tem-se $(z+w)^2 = z^2 + w^2$ e $(z-w)^2 = z^2 - w^2$.
Então $(z+w)^2 + (z-w)^2 = 2z^2 = 4z$.

Figura 3. Proposta de uma tarefa envolvendo os conceitos de quadrado de um número complexo e de quadrado da soma de dois números complexos.

Terminamos com a proposta de tarefa na figura 4, em que, para não responder a b) de forma trivial ({0}), se pode utilizar um conceito lecionado na área de álgebra do ensino superior – característica de um corpo (Hungerford, 1974). Exemplos de respostas finais possíveis são $\mathbb{C}$, para a), e F, corpo de característica 2, para b).

> Considere
>
> $$\forall x, y \in \ldots, (x+y)^2 = x^2 + y^2.$$
>
> Preencha o ponteado de modo a obter uma proposição:
>
> a) falsa;
> b) verdadeira.
>
> Apresente o raciocínio que motivou o preenchimento.

Figura 4. Proposta de uma tarefa envolvendo o conceito de universo matemático.

CONSIDERAÇÕES EM TEMPOS DE PANDEMIA

O ano de 2020, marcado pela pandemia COVID-19, implicou uma urgência de mudanças na sala de aula como a conhecíamos. O espaço físico associado à sala de aula foi substituído por um espaço virtual, com retorno ao primeiro sempre que possível mas, ainda assim, pontuado por episódios híbridos em que os dois espaços acabam por coexistir, quando necessário, em simultâneo.

Algumas das propostas que apresentámos usufruíam, em contexto pré-pandémico, da proximidade que se pode ter no processo de ensino-aprendizagem presencial. Exemplo disso é a discussão entre pares (estudantes), fisicamente próximos nos locais em que estão sentados, despoletada por uma questão conceptual. Também o professor assumia um papel de mediador da discussão ao circular entre estudantes.

A presente impossibilidade de implementação usual leva a adaptações que visam proximidade com distância física. Neste sentido, as tecnologias digitais podem esbater essa barreira nos espaços físico, virtual e na interface dos dois com alternativas como: chat do Moodle; criação de salas simultâneas no Zoom para discussão em pequeno grupo de estudantes, que estão ou não no mesmo local físico; e tantas outras!

Agradecimentos

P. D. Beites foi parcialmente financiada pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto UIDB/00212/2020 do CMA-UBI (Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior). As autoras agradecem a revisão que permitiu melhorar o trabalho.

Referências

Astolfi, J. P. (1999). *El "error": un medio para enseñar.* Díada.

Beites, P. D., Branco, M. L., & Costa, C. (2021). Erros em esquemas de demonstração com números complexos. *Educação e Pesquisa, 47*, aceite para publicação.

Beites, P. D., & Nicolás, A. P. (2016). A identidade tropical $(x+y)^2=x^2+y^2$. *Gazeta de Matemática,* (180), 18-21.

Beites, P. D., Peel, M. A. F., & Costa, C. (2021). *Desenho de tarefas baseado em erros com números complexos*, submetido.

Beites, P. D., & Romano, A. (2014). Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!. *Educação e Matemática, 129*, 13-16.

Carlos, F. (2016). *Excelência e criatividade em matemática universitária.* Tese de Doutoramento em Educação. Universidade da Beira Interior.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Autêntica.

Cury, H. N. (2012). O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. In H. N. Cury & C. R. Vianna (Orgs.), *Formação do professor de matemática: reflexões e propostas* (pp.19-48). IPR.

Deleuze, G. (2000). *Diferença e Repetição*. Relógio D'Água.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1995). *Mil platôs: Capitalismo e esquizofrenia*. 34.

Deleuze, G., & Parnet, C. (1998). *Diálogos*. Escuta.

Guimarães, S. C. M. (2016). *Estudar e aprender no Ensino Superior*. Tese de Doutoramento em Educação. Universidade da Beira Interior.

Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. Springer.

Kastrup, V. (2001). Aprendizagem, arte e invenção. *Psicologia em Estudo, 6*(1), 17-27.

Peel, M. A. F., Beites, P. D., & Oliveira, L. R. P. F. de (2020). O errar na aprendizagem da Língua Portuguesa. *Revista Philologus, 26*(78 Supl. Rio de Janeiro: CiFEFiL), 2309-2323.

Peng, A., & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the Learning of Mathematics, 29*(3), 22-25.

Pinto, N. B. (1998). *O Erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar*. Tese de Doutorado em Educação. Universidade de São Paulo, Brasil.

Rosário, P., Soares, S., Núñez, J. C., González-Pienda, J., & Simões, F. (2004). Ansiedade face aos testes e autorregulação da aprendizagem: variáveis emocionais do aprender. *Psicologia e Educação, 3*(1), 15-26.

Rushton, S. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education, 3*(4), 1-12.

Simões, F. (2000). *Cognição e aprendizagem de conceitos-chave da Física*. Instituto de Inovação Educacional (IIE).

Simões, F. (2001). Relações interpessoais: perspectivas e fundamentos. *Brotéria, 152*(2), 147-157.

Soares, D. L., & Almeida, L. S. (2015). (In)sucesso escolar na adolescência: a convergência de variáveis pessoais e contextuais. In G. C. Lemos & L. S. Almeida (Eds.), *Cognição e Aprendizagem: Promoção do sucesso escolar* (pp. 110-137). ADIPSIEDUC.

Spinillo, A. G., Pacheco, A. B., Gomes, J. F., & Cavalcanti, L. (2014). O erro no processo de ensino-aprendizagem da Matemática: errar é preciso? *Boletim GEPEM*, (64), 57-70.

Torre, S. de la (2007). *Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança.* Artmed.

Misleine Andrade Ferreira Peel
Instituto Federal do Tocantins (Araguaína, Brasil); Doutoranda no Doutoramento em Educação, Universidade da Beira Interior

Patrícia Damas Beites
Departamento de Matemática e Centro de Matemática e Aplicações, Universidade da Beira Interior

Maria de Fátima de Jesus Simões
Departamento de Psicologia e Educação, Universidade da Beira Interior, e Centro de Investigação em Educação e Psicologia, Universidade de Évora

Cálculo algébrico simbólico (CAS) em contexto de sala de aula com alunos do ensino secundário

Nos últimos anos tem-se assistido a uma grande expansão de aplicações informáticas, em particular na Matemática, na tentativa de criar o gosto pela disciplina, recorrendo essencialmente à resolução de problemas (Kissane, McConney & Ho, 2015).

No sentido de desenvolver conceitos relacionados com a Estatística surgiram as folhas de cálculo, da qual o *Microsoft Excel*®, é o exemplo mais comum. De forma a trabalhar conceitos da Geometria foram desenvolvidos programas de geometria dinâmica, como, por exemplo, o *GeoGebra*, que permite o estabelecimento de conexões entre a Geometria, a Estatística e as Funções, além de possibilitar a pesquisa da 'realidade aumentada'. Em simultâneo, e com o advento da *Internet*, surgiram diversas plataformas de ensino como, por exemplo o *Moodle*, bem como outro tipo de aplicações para o telemóvel como o *Kahoot!*, ou o *Photomath*.

Paralelamente, nos finais da década de oitenta do século XX, assistimos, nos países mais industrializados, ao aparecimento de calculadoras gráficas com capacidades numéricas, gráficas e estatísticas, às quais foram posteriormente introduzidos sistemas algébricos, muito devido à introdução de programas como o *Maple*, o *Mathematica*, ou o Derive, permitindo assim a utilização do *cálculo algébrico simbólico* (CAS) por alunos do ensino superior (Kissane et al., 2015).

Com este trabalho pretende-se ilustrar alguns aspetos da introdução do CAS em aula, em particular a forma como os alunos interiorizam a génese instrumental, conceito introduzido por Rabardel (1995).

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

As calculadoras com capacidades algébricas são desde há largos anos utilizadas em diversos países no ensino secundário, como destaca o relatório das *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática* (Carvalho e Silva, Canavarro, Albuquerque, Mestre, Martins, Almiro, Santos, Gabriel, Seabra, & Correia, 2020).

Para Lagrange (2005), a generalidade dos problemas de Matemática que envolvem conceitos relacionados com álgebra e/ou cálculo, que são colocados aos alunos no ensino secundário, além de, na sua grande maioria, poderem ser resolvidos recorrendo a técnicas usuais de *papel-e-lápis*, ou manipulação algébrica, por vezes morosas e algo fastidiosas, podem igualmente ser resolvidos usando tecnologias com CAS, possibilitando a obtenção de melhores resultados na compreensão conceptual dos alunos (Handal, Cavanagh, Wood, & Petocz, 2011).

Atualmente, o uso do CAS passa pela utilização de processos relacionados com sistemas de *software*, os quais envolvem manipulação de símbolos matemáticos, daí este processo se designar por manipulação simbólica, podendo estar associada a representações gráficas ou numéricas, bem como à exploração de folhas de cálculo e de programas de geometria dinâmica.

Uma boa utilização desta ferramenta em aula permite que os alunos pensem e reflitam sobre as diversas representações de determinado tipo de conceitos matemáticos, bem como estabeleçam conjeturas que poderão ser validadas ou refutadas tendo por base uma boa argumentação.

Existem muitos fatores intrínsecos que influenciam a decisão do professor no sentido de usar ou não a tecnologia, nomeadamente: as orientações dos programas oficiais; a noção que se tem da utilização da tecnologia; a perceção da natureza do conhecimento matemático e a forma como deve ser ensinado; o conteúdo do conhecimento matemático; e o conhecimento matemático do professor para ensinar (Heid et al., 2013).

Atendendo a Lokar e Lokar (2000), ao elaborar tarefas para utilização em aula, bem como questões para testes e exames, é possível distinguir cinco tipos de categorias de perguntas e respetivo grau de envolvimento com o CAS, sendo que, na prática, pode acontecer que uma mesma questão se encaixe em mais do que uma categoria, atendendo aos diferentes processos que se podem utilizar na sua resolução. Assim, tem-se:

- *T0: Questões em que a utilização do CAS é mínima ou inexistente.*
- *T1: Questões tradicionais.*
- *T2: Questões que servem para testar a capacidade de utilização do CAS.*
- *T3: Questões que resultam de um enunciado tradicional.*
- *T4: Questões que têm uma resolução difícil ou mesmo impossível utilizando exclusivamente técnicas de manipulação algébrica.*

A escolha das tarefas ou problemas a desenvolver deve ser feita com critério, não se cingindo a exercícios ditos tradicionais cujo CAS pouco ou nada acrescenta. Ao aluno deve ser dada a oportunidade de realizar tarefas que testem a real dimensão do CAS e, como tal, é necessário atender à forma como o utilizador se apropria e usa a calculadora gráfica e o CAS, processo esse que se designa por génese instrumental (Rabardel, 1995).

Entende-se por génese instrumental a transformação do artefacto, gerada pela ação do sujeito, tornando-o num instrumento à medida que o aluno passa pelo processo de instrumentação com a integração na sua prática. Para Rabardel (1995), um instrumento não é mais do que o resultado de uma construção psicológica, é uma entidade constituída por um artefacto e por um esquema, sendo na relação entre ambos que se dá a génese instrumental.

TRABALHO DE CAMPO

Para a execução deste trabalho foi utilizada uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa, em que o investigador foi um participante ativo na investigação.

O estudo apresentado resulta de um estudo mais amplo que foi efetuado ao longo do ano letivo de 2018/19, numa escola secundária da zona de Lisboa, em três turmas do curso de Ciências e Tecnologias, do 12.º ano, sendo que em duas delas o investigador foi igualmente o professor.

Incidiu em 83 alunos, 43 do género masculino e 40 do género feminino, que se encontravam a frequentar a disciplina de Matemática A. A média de idades, no princípio do ano letivo, era de 17 anos.

No início do trabalho de campo, foi solicitado aos alunos que se organizassem em grupos de 4 ou 5 elementos, livremente, com o objetivo de resolver diversas tarefas recorrendo a técnicas de manipulação algébrica e/ou processos numéricos, gráficos e simbólicos, estes últimos através da utilização de calculadoras gráficas TI-nspire™ CX CAS.

Foram efetuadas no total 18 sessões de introdução ao CAS, seis por turma, e em todas estas sessões houve lugar à recolha de documentos escritos produzidos pelos alunos, bem como à captação da informação obtida nas calculadoras gráficas com CAS, quer guardando os ficheiros de trabalho, quer copiando alguns écrans das calculadoras enquanto os alunos se encontravam a trabalhar nas suas mesas, quer ainda através da utilização da aplicação TI-Navigator™. Os discursos apresentados neste artigo foram registados em papel no decurso da aula.

Neste trabalho apresentam-se os primeiros passos efetuados no decurso da 1.ª sessão de trabalho, no 1.º período, nas turmas A e B, pretendendo-se efetuar uma análise interpretativa dos desempenhos dos alunos na resolução de tarefas propostas pelo investigador. Na figura 1 encontra-se a 1.ª tarefa proposta.

> Considerando $x = 1{,}2$ e $y = -2$, calcula o valor das expressões seguintes e comprova o valor obtido utilizando processos simbólicos:
>
> **a)** $4 \cdot x - 3 \cdot y$ **b)** $\pi \cdot x^2 + y \cdot \pi$ (v. e. e com 2 c.d.)
>
> Na calculadora: a) $4 \cdot x - 3 \cdot y \mid x = 1{,}2 \text{ and } y = -2$

Figura 1. Tarefa proposta na sessão inicial

Apresenta-se, em seguida, o diálogo efetuado entre dois alunos do grupo 1A[1], alunos António[2] e Bernardo, a propósito da alínea a) apresentada na figura 1:

António: Onde se encontra a instrução com o traço vertical?
Bernardo: Olha aqui. Está a azul, em cima da tecla do igual.
António: Pois está. Temos que carregar primeiro na tecla ctrl. É isso, não é?
Bernardo: Tenta!!! [pausa] Insere o resto da instrução.
António: E o *and*? Onde está?
Bernardo: Tenta escrever… [pausa] Resultou, deu 10,8!!! (A_1)[3]

Como se verifica pela aplicação da tarefa da figura 1, os alunos encontram-se numa fase de testar a calculadora com CAS de modo a conseguirem futuramente dominar o processo de génese instrumental. De referir igualmente que os menus apresentados nesta calculadora não são muito diferentes dos utilizados no modelo semelhante sem CAS que a generalidade dos alunos incluídos na experiência possuía e utilizava usualmente. A grande dificuldade enfrentada pelos alunos nesta fase prendeu-se com o facto de, na sua grande maioria, estes estarem habituados a utilizar a calculadora para efetuar representações numéricas, bem mais simples, ou representações gráficas.

Outra das tarefas proposta aos alunos na fase inicial encontra-se na figura 2, na qual se pretendia que os alunos obtivessem o conjunto-solução de equações e inequações, usando processos analíticos e simbólicos, sendo que nos dois casos apresentados deveriam recorrer à instrução *solve()*.

> Determina o conjunto solução das condições seguintes, em ordem à variável indicada, usando papel e lápis, e posteriormente, com a calculadora, confirma o resultado obtido:
>
> **a)** $\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = 2 \quad (x)$ **b)** $t \geq \frac{4}{t} \quad (t)$
>
> Na calculadora: a) *solve*$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = 2, x\right)$

Figura 2. Tarefa proposta na sessão inicial

Relativamente à questão apresentada na figura 2, alínea a), resolvida pelo grupo 3A, apresenta-se o diálogo entre os alunos Carlos e Daniela, acompanhado de perto pelo professor/investigador:

Carlos: Onde está o *solve*?
Daniela: Deixa ver. [pausa] Talvez na tecla *menu*.
Carlos: Será? Não encontro.
Daniela: Talvez esteja no *Cálculo*… [pausa] Não.
Carlos: Tenta em *Álgebra*.
Professor: solve é a instrução equivalente a *Resolver*.
Daniela: Coloco *Resolver*?
Professor: Tenta…
Carlos: Deixa ver. [o aluno coloca a instrução *Resolver*] Aparece solve no visor.
Daniela: Será que é assim? [mostra ao investigador a instrução sem o x e carrega em *enter*]
Carlos: Não resultou. [mostra um ar admirado]

Professor: Falta a indicação de variável x no final.
Carlos: Pois é. [coloca a variável]
Daniela: As soluções são -1 e 1. E está aqui um triângulo a amarelo, no início da linha. [aponta para a calculadora]
Carlos: O que quer isto dizer? [dirigindo a pergunta ao professor] (A_1)

Como se verifica pelo diálogo apresentado, existe aqui um processo de instrumentalização da calculadora com CAS por parte dos alunos, sendo que a calculadora em geral e, o CAS em particular, contribuíram para tornar mais objetiva a atividade dos utilizadores, nomeadamente quando os alunos referem explicitamente a simbologia utilizada para obter o conjunto solução da condição proposta na calculadora.

Na sequência desta pergunta, efetuada pelo Carlos, o professor, dirigindo-se a toda a turma e apontando para o visor da calculadora dos alunos citados, que se encontrava projetado no quadro, por via da aplicação TI-Navigator™, afirmou que tal facto se fica a dever ao domínio da expressão não ser R.

Professor: Reparem que o domínio da expressão é $\mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$ e cada uma das soluções, -1 e 1, verificam o domínio.
Eduardo: E se o domínio fosse $\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$?
Professor: O que acham que aconteceria?
Francisco: Seria somente o 1?!
Professor: Muito bem. (A_1)

Neste diálogo entre a turma e o professor constata-se que os alunos construíram adequadamente um processo de abstração, percebendo qual a razão pela qual o triângulo aparecia e conseguindo proceder, quer a uma generalização, quer à reversão do processo.

Na alínea b) da questão apresentada na figura 2, verificou-se que muitos dos alunos não efetuaram de forma inteiramente correta a manipulação algébrica da expressão assinalada, sendo que apresentaram um processo de resolução para a inequação resultante ($t^2\geq4$) como se de uma equação se tratasse.

A esses alunos foi sugerido pelo professor que colocassem a expressão inicial na calculadora e indicassem o conjunto-solução, devendo depois resolver a inequação utilizando manipulação algébrica, sem retirar os denominadores e recorrendo a um quadro de sinais. Verificou-se neste caso que, relativamente à resolução algébrica de inequações racionais, o processo de resolução ainda não se encontrava consolidado.

De qualquer das formas o objetivo pretendido com a questão era que os alunos estabelecessem relações entre as diversas representações utilizadas na resolução da inequação, nomeadamente a manipulação algébrica e a resolução simbólica, com recurso à calculadora, e tal objetivo foi atingido no caso do grupo 2A. O resultado obtido na calculadora por este grupo encontra-se expresso na figura 3.

Figura 3. Resolução simbólica da alínea b), grupo 2A (A_1)

Aparentemente nestes alunos houve uma interiorização do processo que permitiu que utilizassem de forma eficaz a calculadora e o CAS, o que fez com que a manipulação simbólica fomentasse nestes a necessidade de recorrer à manipulação algébrica ou analítica para estabelecer a conexão entre os resultados obtidos. O procedimento analítico correto, utilizado posteriormente pelos alunos desse mesmo grupo, os quais falharam uma primeira tentativa de resolução, está na figura 4, sendo que, como se pode constatar, onde se encontra t≤2, deveria estar t≥2.

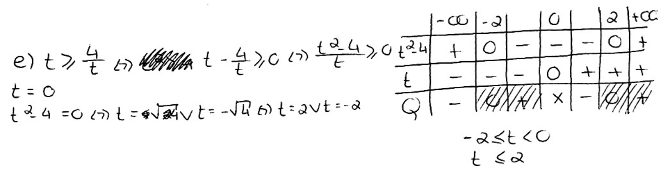


Figura 4. Resolução analítica da alínea b), grupo 2A (A_1)

Ainda no decurso desta abordagem inicial e no sentido de estabelecer conexões entre os três procedimentos possíveis, analítico, simbólico e gráfico, foi solicitado aos alunos que executassem a tarefa constante na figura 5.

Considera a equação $-x^2+4x-3=2-|x|$.
Determina o conjunto-solução utilizando:
a) processos exclusivamente analíticos;
b) gráficos, recorrendo à calculadora;
c) o comando solve() na calculadora.
Nota: Na questão b), apresenta valores arredondados às centésimas.
Na calculadora: c) solve($-x^2+4\cdot x-3=2-|x|,\ x$)

Figura 5. Tarefa proposta na sessão inicial.

Apresenta-se em seguida o diálogo tido entre as alunas Gabriela e Helena, do grupo 7B, com o objetivo de obterem uma resolução por via analítica da questão apresentada na figura 5.

Gabriela: O que temos que fazer?
Helena: Talvez isolar o módulo passando-o para o primeiro membro. O que achas?
Gabriela: Acho que sim. Fica igual a x^2-4x+5
Helena: Concordo. [pausa] A partir daqui basta colocar igual à expressão que está no segundo membro ou ao seu simétrico.
Gabriela: E depois é só aplicar a fórmula resolvente nas duas expressões. (B_1)

Estes comentários tiveram como resultado a resolução que se encontra na figura 6.

$$-x^2+4x-3 = 2-|x| \qquad |x| \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$$\text{a) } |x| = x^2-4x+3+2 \Leftrightarrow$$

$$(-x^2+4x-3-2 = x \wedge x \geq 0) \vee (-x^2+4x-3-2 = -x \wedge x<0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+3x-5=0 \wedge x\geq 0) \vee (-x^2+5x-5=0 \wedge x<0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\emptyset \vee (x^2-5x+5=0 \wedge x<0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\emptyset \vee \left(x=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{5-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{C.S.} \left\{\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Figura 6. Resolução da alínea a), grupo 7B (B_1)

É de assinalar, como algo bastante positivo, o cuidado colocado pelo grupo destas duas alunas na distinção efetuada para o sinal de . Este grupo 7B efetuou igualmente uma resolução gráfica recorrendo à calculadora gráfica com CAS, que foi posteriormente passada para a folha de respostas e que se encontra na figura 7.

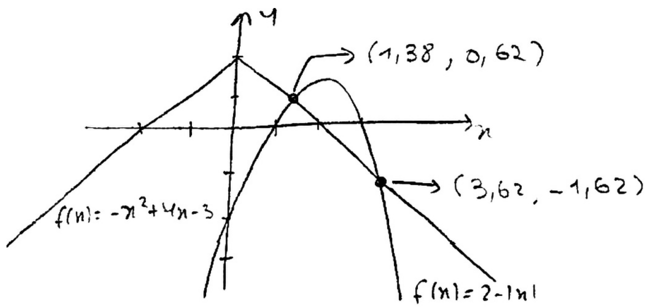


Figura 7. Resolução da alínea b), grupo 7B (B_1)

Nesta resolução observam-se as coordenadas dos pontos de interseção entre a função definida pela expressão $2-|x|$ e a função definida por $-x^2+4x-3$, não sendo apresentado o conjunto-solução, como seria expectável. Este grupo apresentou igualmente uma resposta à alínea c) que se encontra na figura 8.

$$\text{Solve}(-x^2+4\cdot x-3 = 2-|x|, x)$$

$$x = \frac{-(\sqrt{5}-5)}{2} \quad \text{or} \quad x=\frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

Figura 8. Resolução da alínea c), grupo 7B (B_1)

Embora nas resoluções apresentadas pelos alunos do grupo 7B não seja claro que tenham estabelecido conexões entre os diferentes processos utilizados na resolução, estes foram questionados posteriormente e verificou-se que essas conexões foram efetivamente estabelecidas.

CONCLUSÕES

Estes são alguns exemplos que permitem constatar que a utilização do CAS potencia a utilização da manipulação algébrica.

Os resultados obtidos na análise das tarefas propostas, essencialmente do tipo T0, T1 e T2, definidos por Lokar e Lokar (2000), permitem perceber uma boa integração da calculadora gráfica com CAS, nomeadamente o domínio instrumental dos dois artefactos, calculadora e CAS, sendo que a utilização da calculadora com estas caraterísticas possibilitou a resolução das questões apresentadas utilizando manipulação simbólica e gráfica, processos esses que complementados com a utilização da manipulação algébrica permitiram que os alunos consolidassem o seu conhecimento.

Em síntese, o CAS deve ser visto como um complemento a técnicas de manipulação algébrica utilizadas na álgebra e no cálculo, permitindo essencialmente um menor gasto de tempo e possibilitando que o aluno desenvolva processos de raciocínio criativos conducentes à resolução de problemas matemáticos.

Referências

Carvalho e Silva, J., Canavarro, A., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., & Correia, P. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática.* Lisboa: DGE.

Handal, B., Cavanagh, M., Wood, L., & Petocz, P. (2011). Factors leading to the adoption of a learning technology: The case of graphics calculators. *Australasian Journal of Educational Technology. 27*(2), 343-360.

Heid, M., Thomas, M., & Zbiek, R. (2013). How might computer algebra systems change the role of algebra in the school curriculum? Em M. A. Clements et al. (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 597-641). Nova Iorque: Springer Science+Business Media.

Heugl, H. (2017). *The use of CAS in exams.* A lecture at the T3 conference in Chicago.

Kissane, B., McConney, A., & Ho, K. F. (2015). *Review of the use of technology in Mathematics education and the related use of CAS calculators in external examinations and in post school tertiary education settings.* Perth, WA: School Curriculum and Standards Authority.

Lagrange, J. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. Em D. Guin, K. Ruthven, L. Trouche (Eds.); *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp 113-135). Boston: Springer.

Lokar, M., & Lokar, M. (2000). Exam questions and basic skills in technology-supported mathematics teaching. Em V. Kokol-Voljc et al (Eds.); *Final Matura Examination – Matura in the View of CAS* (pp. 133-136). Hagenburg, Áustria.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Helder Martins

Escola Secundária António Damásio – Lisboa

António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, FCT NOVA e CICS.NOVA

Este trabalho foi suportado por fundos nacionais através da FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017

Fica aqui igualmente o agradecimento devido à empresa TEXAS INSTRUMENTS, pela cedência do material necessário à recolha de dados.

Estratégias para o cálculo de diferenças de números inteiros e sua fundamentação matemática

Graciosa Veloso
Pedro Almeida

Este artigo surge na sequência do intitulado "Adição e subtração de números inteiros: papel das propriedades operatórias na fundamentação dos processos de cálculo", publicado no número 159 desta revista.

Discutiremos os principais processos de cálculo mental que podem ser usados na subtração e fundamentá-los matematicamente. Esperamos poder contribuir para o desenvolvimento da formação inicial e contínua de professores dos anos iniciais, a nível do conhecimento da e sobre a matemática que se ensina. Na linha do que é argumentado por Ball et al (2008), quem ensina tem de dominar profunda e compreensivamente os conceitos, estratégias a serem aprendidos pelos alunos.

Alguns dos processos de cálculo que apresentamos transcendem os que são trabalhados nos anos iniciais, mas consideramos que o seu conhecimento é necessário ao professor em virtude das suas funções de observador, intérprete e orientador das ações dos seus alunos, e de gestor do ambiente de sala de aula.

A determinação de diferenças, por cálculo mental, é significativamente mais complexa que a determinação de somas, nomeadamente nas situações em que, na mesma ordem, o algarismo do aditivo representa um número inferior ao do subtrativo. O processo da decomposição decimal dos dois termos em $72 - 54 = (70 + 2) - (50 + 4) = 70 - 50 + (2 - 4)$, contrariamente ao sucedido na adição, tem associadas dificuldades ou/e hesitações na decisão sobre o que fazer com a diferença entre os números na ordem das unidades de modo a que seja mantida a invariância dos resultados. Há vários modos de evitar o aparecimento de diferenças negativas, como mostraremos.

Consideremos as expressões $310 - 60$ e $347 - 78$, em que nas mesmas posições surgem, no aditivo, algarismos que representam números menores que os correspondentes no subtrativo.

Analisemos um dos vários processos para a determinação da diferença associada a $310 - 60$. A escolha dos números 310 e 60 é justificada por ambos serem múltiplos de 10. É facilitador do cálculo que o subtrativo seja múltiplo de 10, tal como já afirmámos no artigo anterior. Sendo o aditivo também múltiplo de 10, é possível relacionar a diferença pretendida com a diferença entre 31 e 6, como se mostra a seguir: $310 - 60 = (31 - 6) \times 10 = 25 \times 10 = 250$. Os procedimentos aqui adotados são fundamentados pela propriedade distributiva da multiplicação relativamente à subtração. O processo seguido permite valorizar:

i) a conexão com a diferença entre 31 e 6 e
ii) a propriedade do fecho do conjunto dos múltiplos de 10 relativamente à subtração, que pode ser enunciada afirmando que a diferença entre dois múltiplos de 10 é também múltiplo de 10.

Analisemos os processos para obtenção de 347–78 apresentados na Tabela 1.

A escolha dos números 347 e 78 deve-se a: (i) nem eles, nem a diferença, são múltiplos de 10; (ii) os algarismos que figuram nas posições das dezenas e das unidades representam nos aditivos números menores que os correspondentes no subtrativo; (iii) tanto o aditivo como o subtrativo distam valores diferentes de cada um dos respetivos múltiplos de 10 mais próximos.

O processo **A.1** iniciou-se com a decomposição decimal dos termos operatórios, ou seja, foram explicitados os números representados pelos algarismos na posição das dezenas e na das unidades. Este processo de decomposição de números de dois algarismos é designado, em muita da literatura associada, pela sigla 1010 (Beishuizen, 1993). Sendo muito utilizado na determinação de somas, pode conduzir na subtração a diferenças negativas, como se mostra no exemplo em A1. Como é bem desenvolvido e justificado pela literatura (Beishuizen, 1993; Baroody, 2016), as crianças, muito frequentemente, apresentam resultados incorretos, porque determinam a diferença entre o maior e o menor valores naturais, sem procederem a alterações implicadas pela troca efetuada. Este processo tem a limitação de não poder ser representado em linha numérica, ficando reduzido a eventual representação em esquema em árvore.

No processo **A.2** manteve-se o aditivo e decompôs-se o subtrativo, 78, em três parcelas, convenientes ao cálculo. Uma delas, 70, possibilitando dar saltos de 10 em 10. Este procedimento, de incluir, na decomposição do subtrativo, uma parcela que seja múltiplo de 10, é representado por N10 (Beishuizen, 1993). As outras duas parcelas, 7 e 1, decomposição aditiva de 8, justificam-se tendo em consideração que o aditivo é 347. Na linha numérica, a potencialidade da utilização de múltiplos de 10 pode manifestar-se de diferentes modos; por exemplo, a decomposição do subtrativo 78 em 7+40+30+1,

Tabela 1. Processos e procedimentos de cálculo de 347 – 78.

A. Decomposição de termos de **347 – 78**

A.1. Decomposição decimal dos dois termos (**1010**)
(300 + 40 + 7) – (70 + 8) = 300 + 40 + 7 – 70 – 8 =
= 300 + (40 – 70) + (7 – 8) =
= 300 + (-30) + (-1) =
= 270 – 1 =
= 269

A.2. Decomposição do subtrativo em parcelas convenientes (**N10**)
347 – 78 = 347 – (70 + 7 + 1) =
= 347 – 7 – 70 – 1 =
= 340 – 70 – 1 =
= 270 – 1 =
=269

B. Mobilização do complemento aritmético[1] do subtrativo.
347 – 78 = 347 – (100 – 22) =
= 347 – 100 + 22 =
= 247 + 22 =
= 269

C. Variação de um dos termos de **347 – 78**, mantendo o outro.

C.1. Adicionar 31 ao aditivo
378 – 78 = 300
Relacionando as duas diferenças:
378 – 78 = (347 **+ 31**) – 78 = (347 – 78) **+ 31**
Portanto,
347 – 78 = (378 – 78) **– 31** =
= 300 – 31 =
= 270 – 1 = 269

C.2. Subtrair 31 ao subtrativo
347 – 47 =300
Relacionando as duas diferenças:
347 – 47 = 347 – (78 **– 31**) = (347 – 78) **+ 31**
Portanto,
347 – 78 = (347 – 47) – 31 =
= 300 – 31 =
= 270 – 1 = 269

D. Variação igual de cada um dos termos de **347 – 78**.

D.1. Adicionar 2
(347 + 2) – (78 + 2) =
= 349 – 80 =
= 340 + 9 – 80 =
= 340 – 80 + 9 =
= (34 – 8) × 10 + 9 =
= 26 × 10 + 9 =
= 260 + 9 = 269

D.2. Subtrair 8
(347 – 8) – (78 – 8) =
= 339 – 70 =
= (340 – 1) – 70 =
= 340 – 70 – 1 =
= 270 – 1 = 269

E. Variação diferente dos dois termos de **347 – 78**.

E.1. Adicionar 3 ao aditivo e 2 ao subtrativo
350 – 80 =
= (35 – 8) × 10 =
= 270
Relacionando as duas diferenças:
350 – 80 = (347 + 3) – (78 + 2) =
= 347 – 78 + 3 – 2 = (347 – 78) + (3 – 2) =
=(347-78)+1
Portanto,
347 – 78 = (350 – 80) – 1 =
= 270 – 1 = 269

E.2. Adicionar 2 ao subtrativo e subtrair 7 ao aditivo
340 – 80 =
= 260
Relacionando as duas diferenças:
340 – 80 = (347 – 7) – (78 + 2) = (347 – 78) – 7 – 2 = 269 – 9,
Portanto,
347 – 78 = (340 – 80) + 7 + 2 =
= 260 + 9 = 269

[1]Complemento Aritmético de um número natural N, é o número que a ele adicionado soma a potência de 10 imediatamente superior a N.

como ilustramos na No processo B efetuou-se a substituição do subtrativo, 78, pela diferença 100 – 22. Como 78 e 22 somam 100, designam-se complemento aritmético um do outro. A escolha de 100 é explicada pela conveniência de cálculo da diferença. Com o recurso ao número complementar para 100, evitou-se a ocorrência das diferenças negativas, -30 e -1, apresentadas em A.1.igura 1.

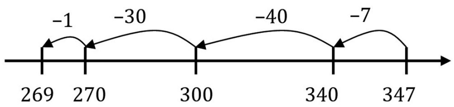


Figura 1

No processo B efetuou-se a substituição do subtrativo, 78, pela diferença 100 – 22. Como 78 e 22 somam 100, designam-se complemento aritmético um do outro. A escolha de 100 é explicada pela conveniência de cálculo da diferença. Com o recurso ao número complementar para 100, evitou-se a ocorrência das diferenças negativas, -30 e -1, apresentadas em A.1.

No processo C (C.1 e C.2) privilegiou-se, em ambos os casos, a invariância de um termo e a variação do outro termo.

Em C.1 o aditivo variou e o subtrativo, 78, manteve-se. Ao adicionar 31 ao aditivo 347, obteve-se 378, cujos algarismos na posição das unidades e das dezenas são iguais aos correspondentes no subtrativo, permitindo obter a diferença 378 – 78, que é um múltiplo de 10. Esta diferença não é a diferença pretendida, há que anular o aumento efetuado no aditivo para poder ser mantida a invariância da diferença procurada. À luz de que propriedades ou relações se pode proceder assim? A soma de números simétricos ser nula e a propriedade comutativa da adição, no conjunto dos números inteiros relativos[2], fundamentam os procedimentos realizados, respondendo assim, à pergunta atrás formulada. Podemos escrever (347 + 31 – 31) – 78 = 378 – 78 – 31 (figura 2).

Esta igualdade expressa que a diferença procurada, 347 – 78, resultou de se ter retirado 31 à diferença obtida por acréscimo de 31 ao aditivo inicial, mantendo invariante o subtrativo.

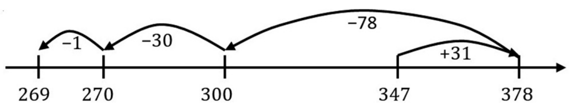


Figura 2

A representação visual da sequência de procedimentos adotados, permite também dar sentido à afirmação: Quando o aditivo aumenta e o subtrativo se mantém, a diferença correspondente aumenta tanto quanto aumentou o aditivo.

No caso C.2 variou o subtrativo e manteve-se o aditivo, 347. Subtraiu-se 31 ao subtrativo, para que, tal como em C.1, fosse obtido um múltiplo de 10, a diferença 347 – 47. Compreende-se que esta diferença é necessariamente maior que a pretendida, pelo facto de o subtrativo ter diminuído, ficando mais distante do aditivo (que se manteve). Então, a diferença procurada tem de ser inferior, tanto quanto diminuiu o subtrativo, isto é, há que determinar 300 – 31. Estas relações podem ser traduzidas pelas igualdades

347 – 78 = 347 – (78 – 31 + 31) = 347 – (47 + 31) = 347 – 47 – 31.

Os procedimentos aqui adotados são sustentados por ser nula a soma de números simétricos e pela propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição.

Estes dois casos, de invariância de um dos termos da subtração, mostram que a diferença procurada se obtém de modo diferente, dependendo do termo em que houve variação.

Observemos os processos de ajustamento feitos de modo a manter a invariância da diferença entre 347 e 78, nos dois casos C.1 e C.2. Em ambos os casos aumentou a diferença obtida entre o termo que variou e o que se manteve; contudo este aumento foi provocado por variações de sentidos opostos, isto é, por aumento do aditivo e por diminuição do subtrativo. Em C.1, o aditivo aumentou 31; teve de ser retirado 31 para obter a diferença procurada. Em C.2, o subtrativo diminuiu 31; teve de ser retirado 31 para obter a diferença procurada.

É habitual encontrar na literatura o termo "compensação" para descrever os procedimentos adoptados nestes casos. Utilizar a mesma palavra para descrever e explicar procedimentos diferentes é ambíguo. É possível, usando as expressões[3] "adicionar o valor simétrico" quando o aditivo aumenta, "adicionar o mesmo valor" quando o subtrativo diminui, ser não só claro, como valorizar a distinção entre a variação ser no aditivo ou no subtrativo.

Passemos aos casos em que existe variação em ambos os termos operatórios.

Nos processos D.1 e D.2 estamos perante a variação de ambos os termos operatórios. No processo D.1 exemplificamos a invariância da diferença, adicionando o mesmo número, 2, a ambos os termos. A mesma propriedade poderia sustentar uma diminuição do mesmo valor em ambos os termos, como mostramos em D.2, em que se subtraiu 8 a ambos os termos. Esta mesma propriedade, da invariância da diferença, pode ser invocada na justificação de todos os casos em que há variação de um dos termos ou de ambos.

No processo E.1, exemplificamos variações em ambos os termos, no mesmo sentido e com valores diferentes, adicionando 3 no aditivo e 2 no subtrativo. Observemos que à diferença (347 + 3) – (78 + 2) corresponde, pela invariância, adicionar 2 a ambos os termos:

347 – 78 = (347 + 3 – 3) – (78 + 2 – 2) =

= 347 + 3 – 3 – 78 – 2 + 2 = 347 + 2 – 78 – 2 = (347 + 2) – (78 + 2)

No processo E.2, exemplificamos variações em ambos os termos, em sentidos opostos e com valores diferentes, adicionando 2 no subtrativo e subtraindo 7 ao aditivo. A invariância da diferença pode reconhecer-se também neste caso, subtraindo 7 a ambos os termos, porque é verdade que

347 – 78 = (347 – 7 + 7) – (78 + 2 – 2) =

[3] Estas mesmas expressões poderão ser também utilizadas na adição.

= 347 – 7 + 7 – 78 – 2 + 2 = (347 – 7) – (78 – 7) = 340 – 71

Após discussão de cada um dos processos apresentados na tabela 1 vamos realçar alguns aspetos importantes do ponto de vista da organização dos processos de cálculo. Existem duas grandes categorias definidas pela variação, ou não, de termo(s) da operação. Nos casos A e B, não houve variação de nenhum dos termos. Em todos os outros casos ocorreu sempre variação de um ou de ambos os termos operatórios.

O processo A é relativo a decomposições, sem variações dos termos, sendo A.1 focado na decomposição decimal de ambos os termos e A.2 na decomposição aditiva (decimal ou não decimal) do subtrativo. No processo B recorremos ao complemento aritmético, 22, relativamente a 100, do subtrativo, 78, tendo substituído este, por 100 – 22.

Todos os processos seguintes incidem em variações, ou de um dos termos ou de ambos. Nestes casos, a invariância da diferença tem de ser garantida. Importa assim mostrar como. No processo D, esta invariância foi garantida, graças ao facto de em ambos os termos se ter adicionado, ou subtraído, o mesmo número a cada um dos termos. O processo C.1, rapidamente se transforma no processo D, bastando para isto notar que 347 – 78 = (347 + 31) – (78 + 31); identicamente em C2, notando que 347 – 78 = (347 – 31) – (78 – 31). Também no processo E mostrámos como a invariância da diferença foi garantida.

Na tabela 2 apresentamos as estratégias e processos de cálculo de diferenças ilustrados anteriormente, neste artigo e no que o precedeu (identificado no início).

Tabela 2. Categorização das estratégias e processos de cálculo de diferenças.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Estratégia</th><th colspan="2">Processo</th><th>Procedimento</th></tr>
<tr><td rowspan="13">Cálculo de Diferença</td><td rowspan="12">Não algorítmica</td><td rowspan="2">Contagem</td><td colspan="3">Regressiva</td></tr>
<tr><td colspan="3">Progressiva (Adding Up)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Variação de</td><td rowspan="2">UM termo</td><td colspan="2">Aditivo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Subtrativo</td></tr>
<tr><td rowspan="4">DOIS termos</td><td rowspan="2">Mesmo sentido</td><td>Valor igual (invariância da diferença)</td></tr>
<tr><td>Valor diferente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sentido oposto</td><td>Valor igual</td></tr>
<tr><td>Valor diferente</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Decomposição de</td><td>UM termo</td><td colspan="2">Salto (N10)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DOIS termos</td><td colspan="2">Não decimal</td></tr>
<tr><td colspan="2">Decimal (1010)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Complemento aritmético do subtrativo</td></tr>
<tr><td colspan="5">Algorítmica</td></tr>
</table>

GENERALIZAÇÃO NO CONJUNTO Z - VARIAÇÃO DOS TERMOS DA SUBTRAÇÃO

A variação de termos, no caso geral de uma subtração, vai seguidamente ser caracterizada e fundamentada, começando pela generalização da variação de um dos termos e invariância do outro, seguida da variação de ambos os termos e consequências na variação das diferenças.

Consideramos as variáveis que assumem valores no conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$:

– A para aditivo,
– S para subtrativo,
– I, I_1 e I_2 para incrementos.

VARIAÇÃO DE UM DOS TERMOS E INVARIÂNCIA DO OUTRO TERMO

Pode afirmar-se que quando se pretende determinar a diferença entre o aditivo A, e o subtrativo S:

i) mantendo-se o subtrativo,
   a. se o aditivo aumenta I, a diferença correspondente aumenta I e, portanto, há que subtrair I a esta diferença para obter a pretendida, A – S.
   b. se o aditivo diminuiu I, a diferença correspondente diminuiu I e, portanto, há que adicionar I a esta diferença para obter a pretendida, A – S.

A generalização expressa por estes dois casos pode, em síntese, ser assim formulada: mantendo-se o subtrativo, há que adicionar à diferença alterada o simétrico do que se adicionou ao aditivo.

ii) mantendo-se o aditivo,
   a. se o subtrativo aumenta I, a diferença correspondente diminui I e, portanto, para obter a diferença pretendida há que adicionar I à diferença alterada.
   b. se o subtrativo diminui I, a diferença correspondente aumenta I e, portanto, para obter a diferença pretendida há que subtrair I à diferença alterada.

A generalização expressa por estes dois casos pode, em síntese, ser assim formulada: mantendo-se o aditivo, é necessário adicionar ou subtrair à diferença alterada o mesmo que se adicionou ou subtraiu ao subtrativo.

Em notação simbólica, usando as variáveis que assumem valores no conjunto dos números naturais, vem, respetivamente:

i) Mantendo o subtrativo
   a. $(A + I) - S = A - S + I = (A - S) + I$; portanto $A - S = ((A + I) - S) - I$;
   b. $(A - I) - S = A - S - I = (A - S) - I$; portanto $A - S = ((A - I) - S) + I$

ii) mantendo o aditivo
   a. $A - (S + I) = A - S - I = (A - S) - I$; portanto $A - S = (A - (S + I)) + I$;
   b. $A - (S - I) = A - S + I = (A - S) + I$; portanto $A - S = (A - (S - I)) - I$

A representação visual na Figura 3 é bem clara quanto à variação da diferença, no caso em que o subtrativo é invariante e o aditivo varia I.

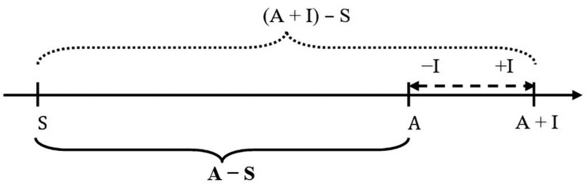


Figura 3

Na Figura 4 ilustra-se o caso em que o subtrativo varia mantendo-se invariante o aditivo.

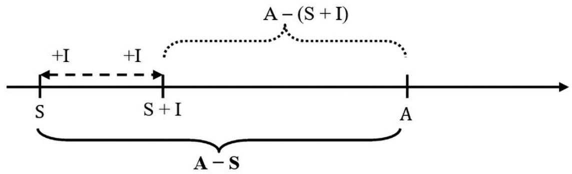


Figura 4

Passemos à generalização dos casos em que o aditivo e o subtrativo se alteram simultaneamente.[4]

VARIAÇÃO DOS DOIS TERMOS EM SENTIDOS OPOSTOS

Pode afirmar-se que quando se pretende determinar a diferença A – S:

i) Se o aditivo aumenta I_1 e o subtrativo diminui I_2, a diferença correspondente aumenta $I_1 + I_2$ que é a soma dos incrementos dos termos;

ii) Se o aditivo diminui I_1 e o subtrativo aumenta I_2, a diferença correspondente diminui $I_1 + I_2$ que é a soma dos incrementos dos termos.

Em notação simbólica, usando as variáveis, A, para aditivo, S para subtrativo e I_1 e I_2, para os incrementos, vem, respetivamente:

i) $(A + I_1) - (S - I_2) = A + I_1 - S + I_2 = (A - S) + I_1 + I_2$;
portanto,
$A - S = (A + I_1) - (S - I_2) - I_1 - I_2 =$
$=(A + I_1) - (S - I_2) - (I_1 + I_2)$

ii) $(A - I_1) - (S + I_2) = A - I_1 - S - I_2 = (A - S) - (I_1 + I_2)$;
portanto,
$A - S = (A - I1) - (S + I_2) + (I_1 + I_2)$

VARIAÇÃO DOS DOIS TERMOS NO MESMO SENTIDO

Chegados à última secção deste artigo, recordemos que as variáveis A, S, I, I_1 e I_2 assumem valores no conjunto dos números naturais. Vamos exprimir as generalizações relativas à variação dos termos A, aditivo, e S, subtrativo, no mesmo sentido e as relações respetivas com as variações das diferenças, a pretendida e a alterada.

As variações, no mesmo sentido, dos dois termos, podem ser expressas simbolicamente por:

– ambos os termos aumentam, $(A + I_1) - (S + I_2)$

– ambos os termos diminuem, $(A - I_1) - (S - I_2)$

Relacionemos estas diferenças, pela mesma ordem que seguimos no parágrafo anterior.

Ambos os termos aumentam

$(A + I_1) - (S + I_2) = A + I_1 - S - I_2 = A - S + (I_1 - I_2)$,

Designando por **d** a diferença alterada $(A + I_1) - (S + I_2)$, a diferença pretendida, A–S, virá assim expressa

$$\mathbf{A - S = d - (I_1 - I_2).}$$

Como apresentamos na tabela 3, três situações podem ocorrer considerando a relação de ordem entre I_1 e I_2.

Tabela 3

Relação entre I_1 e I_2	Valor relativo de $I_1 - I_2$	Relação entre A – S e **d**
$I_1 < I_2$	$I_1 - I_2 < 0$	$A - S = \mathbf{d} - I_1 + I_2 = \mathbf{d} + (I_2 - I_1)$ **A – S > d**
$I_1 = I_2$	$I_1 - I_2 = 0$	$A - S = (A + I) - (S + I)$ A – S = **d** INVARIÂNCIA DA DIFERENÇA
$I_1 > I_2$	$I_1 - I_2 > 0$	$A - S = \mathbf{d} + I_1 - I_2 = \mathbf{d} + (I_1 - I_2)$ **A – S > d**

Podemos traduzir por palavras a relação entre a diferença **d** e a diferença pretendida A–S, deste modo:

- A invariância da diferença aparece, como seria de esperar, no caso em que são iguais ambos os incrementos $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$.
- As outras duas situações têm o mesmo significado, isto é, se ambos os termos aumentam, embora a partir de diferentes incrementos, a correspondente diferença diminui a diferença entre os incrementos.
- A diferença pretendida, A – S, aumenta e tem de se obter pela adição da diferença dos incrementos à diferença alterada d.

Ambos os termos diminuem

$(A - I_1) - (S - I_2) = A - I_1 - S + I_2 = A - S - (I_1 - I_2) =$
$=A - S + (I_2 - I_1)$

Designando por **d** a diferença $(A - I_1) - (S - I_2)$, a diferença pretendida, A – S, virá assim expressa $\mathbf{A - S = d - (I_2 - I_1)}$ ou $\mathbf{A - S = d + (I_1 - I_2)}$

Como apresentamos na tabela 4, três situações podem ocorrer considerando a relação de ordem entre I_1 e I_2

Tabela 4

Relação entre I_1 e I_2	Valor relativo de $I_1 - I_2$	Relação entre A – S e **d**

$I_1 < I_2$	$I_1 - I_2 < 0$	$A - S = d - I_2 + I_1 = \mathbf{d - (I_2 - I_1)}$ $\mathbf{A - S < d}$
$I_1 = I_2$	$I_1 - I_2 = 0$	$A - S = (A - I) - (S - I)$ $A - S = \mathbf{d}$ INVARIÂNCIA DA DIFERENÇA
$I_1 > I_2$	$I_1 - I_2 > 0$	$A - S = \mathbf{d} + I_1 - I_2 = \mathbf{d + (I_1 - I_2)}$ $\mathbf{A - S > d}$

Podemos traduzir por palavras a relação entre a diferença **d** e a diferença pretendida A–S, deste modo:

- A invariância da diferença aparece, como seria de esperar, no caso em que são iguais ambos os incrementos $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$.
- Nas outras duas situações há que considerar se o incremento maior se dá no subtrativo ou no aditivo. No primeiro caso, em que $\mathbf{I_1 < I_2}$ a correspondente diferença, **d**, aumenta a diferença entre os incrementos, $\mathbf{I_2 - I_1}$. A diferença pretendida, A–S tem de se obter pela diferença entre **d** e $\mathbf{I_2 - I_1}$. Quando o maior incremento ocorre no aditivo, caso em que $\mathbf{I_1 > I_2}$, a diferença pretendida obtém-se subtraindo $\mathbf{I_1 - I_2}$ a **d**.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como afirmámos no início, este artigo é destinado à formação inicial e contínua de professores do 1º e do 2º Ciclos, incidindo na vertente do conhecimento da e sobre a Matemática. Na linha do argumentado por Ball et al (2008) entendemos que o conteúdo do artigo se insere na especificidade deste conhecimento, para o qual, no que diz respeito ao cálculo aritmético nos primeiros anos de escolaridade, destacamos três aspetos: o conhecimento dos diversos processos, a compreensão das propriedades operatórias que os fundamentam e a comunicação matemática inerente.

No que respeita à comunicação matemática destacamos as representações não exclusivamente simbólicas que lhes podem ser associadas e que dão visibilidade ao processo - representações ativas, icónicas, diagramas em árvore, linha numérica (à qual damos especial destaque) – e a escrita das expressões numéricas que explicitam cada processo. Esta escrita é não só acessível compreensivamente, no âmbito da formação inicial ou contínua de professores, como permite comunicar com clareza e rigor os diversos procedimentos realizados.

A experiência diz-nos que é importante dar valor à representação simbólica para se compreender como se justificam matematicamente as variações das diferenças em função das variações dos termos. Consequentemente, essa representação dá sentido e enquadra mais positivamente a compreensão das propriedades operatórias. Dentro deste aspeto, sugerimos que não se utilize o termo "compensação" para referir ajustes à invariância do resultado operatório. Há designações matemáticas que fundamentam esses ajustes.

A valorização da fundamentação matemática também se justifica por promover uma compreensão processual ao invés dos procedimentos de cálculo algorítmico de compreensão muito mais complexa. Também não nos parece pertinente o ensino dos algoritmos nos primeiros anos, dado o papel do ensino e da aprendizagem em pleno século XXI.

Privilegiamos também a pluralidade de processos de cálculo, aspeto importante do ponto de vista didático, tendo presente o princípio ativo da aprendizagem; esta diversidade, não deve, contudo, travar a discussão em sala de aula, em momentos adequados, do poder matemático dos diferentes processos. Estamos a referir-nos à abrangência, ou seja, à possibilidade de alguns dos processos poderem ser de aplicação a um leque alargado de números.

O conhecimento dos diferentes processos de cálculo é fundamental para a orientação dos alunos. Merecem destaque os seguintes aspetos relativos à obtenção de diferenças:

- A decisão quanto ao(s) processo(s) a utilizar deve ter em atenção a relação entre os termos operatórios. Por exemplo, se os dois termos forem próximos, poderá ser determinada a diferença por processo diferente dos casos em que são distantes um do outro.
- É facilitador do cálculo que o subtrativo seja um múltiplo de 10, especificamente, uma potência de 10 de expoente natural. Esta potencialidade tem de ser reconhecida na experiência de um percurso de aprendizagem de estratégias diversificadas.
- A adição ou subtração do mesmo valor a ambos os termos operatórios – garante da invariância do resultado – é um procedimento muito potente.

Finalmente sublinhamos que a compreensão de qualquer operação não se reduz ao domínio do cálculo. Requer também a resolução de situações problemáticas associadas a diferentes contextos e aos sentidos operatórios neles manifestados.

Referências Bibliográficas

Beishuizen, M. (1993). Mental Strategies and materials or models for Addition and Subtraction up to 100 in Dutch Second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), 294 – 323

Baroody, A. J. (2016). Curricular approaches to connecting subtraction to addition and foresting fluency with Basic differences in grade 1. *PNA, 10*(3), 161-190

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education. 59*(5), 389-407

Graciosa Veloso

Pedro Almeida

Escola Superior de Educação de Lisboa

APM 2021 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Faça-se sócio APM!

Para se fazer sócio ou para esclarecer qualquer dúvida contactar através de ***encomenda@apm.pt*** ou **socio@apm.pt**

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP

e duas modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

A APM e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado **aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP** que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.º de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de associado da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF da Revista Educação e Matemática no nosso portal; todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas.

A revista Quadrante é publicada online (https://quadrante.apm.pt) e é de acesso livre.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem duas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Quotas anuais para 2021

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil; **as quotas, quando não são pagas por débito direto, deverão ser liquidadas durante o mês de janeiro.**

Modalidades de associado individual	2021
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio (residente em Portugal ou no estrangeiro)	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

* *Poderão inscrever-se nestas modalidades, estudantes em formação inicial (licenciatura ou mestrado profissionalizante)*

Modalidades de associado institucional	*Quota*
Modalidade I (1 exemplar da EeM)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da EeM)	95,00 €

Atualização de quota

Atualize a sua quota por transferência bancária usando o **IBAN: PT50003503250000664993010**. No descritivo da transferência coloque o seu número de sócio(a) e envie comprovativo de transferência para ***encomenda@apm.pt***

Assinatura da revista *Educação e Matemática*

		3 números + 1 número duplo temático
Associado individual	Portugal	....
	Estrangeiro	....
Não associado individual	Portugal	50,00€
	Estrangeiro	70,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€
	Estrangeiro	95,00€

Preço de capa da revista *Educação e Matemática*

		Educação e Matemática
Associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€
Não associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€

índice

EDITORIAL

ARTIGOS

SECÇÕES