Universidade de Évora - Instituto de Investigação e Formação Avançada

Programa de Doutoramento em Matemática

Tese de Doutoramento

Números externos complexos. Raízes de polinómios e aplicações

João Carlos Lopes Horta

Orientador(es) | Imme Van Den Berg

Évora 2023

Universidade de Évora - Instituto de Investigação e Formação Avançada

Programa de Doutoramento em Matemática

Tese de Doutoramento

Números externos complexos. Raízes de polinómios e aplicações

João Carlos Lopes Horta

Orientador(es) | Imme Van Den Berg

Évora 2023

A tese de doutoramento foi objeto de apreciação e discussão pública pelo seguinte júri nomeado pelo Diretor do Instituto de Investigação e Formação Avançada:

Presidente	Feliz Manuel Minhós (Universidade de Évora)
Vogais	Bruno Dinis (Universidade de Évora) Imme Van Den Berg () (Orientador) Marc Diener () Mário Jorge Edmundo (Universidade de Lisboa) Nam Van Tran ()

Évora 2023

À Persistência e à solidariedade.

Agradecimentos

Durante a realização deste trabalho recebi vários apoios e de diversas formas. Meu especial agradecimento a cada um de vós, sem exceção, que me apoiou durante este percurso.

Sublinho o apoio que recebi por parte dos meus colegas de trabalho, da Universidade de Cabo Verde, da Fundação Calouste Gulbenkian, dos meus amigos e das minhas amigas. Muito obrigado!

Agradeço vivamente aos meus familiares, minha mãe, Maria Luisa Inês Lopes, meus irmãos e minhas irmãs, meus sobrinhos e minhas sobrinhas, meus primos e minhas primas, meus tios e minhas tias, pelas vossas palavras, amor e carinho que me deram forças para persistir e prosseguir.

Este trabalho teve fim, muito por custa do apoio que recebi por parte da minha esposa, Maria Emeliana Dias Semedo Horta, das minhas filhas, Jacline Correia Horta e Emily Semedo Horta, e do meu filho Johnny Semedo Horta. Obrigadíssimo pela compreensão, amizade, amor e solidariedade.

Ao meu orientador, Imme Pieter van den Berg, palavras me faltam para manifestar a minha gratidão e para descrever o seu papel determinante na realização deste trabalho do começo até ao fim. Obrigadíssimo pela vossa generosidade e disponibilidade, pela forma como compartilhou os seus conhecimentos, pelas críticas, correções e sugestões feitas em todos os assuntos tratados.

Um grande bem-haja a todos.

Conteúdo

Números externos complexos. Raízes de polinómios e aplicações.

Resumo

Nesta tese estuda-se as equações polinomiais com coeficientes no conjunto dos números externos, que tem estrutura algébrica de um sólido. Relativamente aos polinómios com coeficientes no conjunto dos números externos reais, prova-se que as soluções, quando existem, são números externos. Para alargar o âmbito do estudo das equações, introduziu-se o conjunto dos números externos complexos. Prova-se que esses números satisfazem todos os axiomas de um sólido, menos os que se relacionam com ordem. Quando os polinómios têm coeficientes no conjunto dos números externos complexos, as soluções das equações polinomiais, quando existem, também, são números externos. No entanto, se todos os coeficientes de um polinómio são números complexos internos, então existem tantas soluções quanto ao grau desse polinómio. Como a propriedade distributiva no conjunto dos números externos não é válida em geral, o produto de polinómios com coeficientes externos nem sempre se reduz a um polinómio clássico e, a partir daqui, introduz-se o conceito do polinómio generalizado. Assim, estuda-se as equações que envolvem polinómios generalizados, cuja soluções, se existem, também são números externos. Como aplicação, determina-se o polinómio característico de uma matriz quadrada, cuja ordem é um número natural standard e as entradas são números externos, e obtém-se uma fórmula fechada para os seus coeficientes.

Palavras chave: Numeros externos, sólido, equação polinomial, polinómio generalizado, polinómio característico.

Complex external numbers. Polynomial roots and applications.

Abstract

In this thesis we study polynomial equations with coefficients in the set of external numbers, which have the algebraic structure of a solid. Regarding polynomials with coefficients in the set of real external numbers, it is proved that the solutions, when they exist, are external numbers. To broaden the scope of the study of equations, the set of complex external numbers was introduced. It is proved that these numbers satisfy all axioms of a solid except those that relate to order. When polynomials have coefficients in the set of complex external numbers, the solutions of polynomial equations, when they exist, are also external numbers. However, if all the coefficients of a polynomial are internal complex numbers, then there are as many solutions as there are degrees of that polynomial. As the distributive property on the set of external numbers is restricted, the product of polynomials with external coefficients does not always reduce to a classical polynomial and, from here, the concept of the generalized polynomial is introduced. Thus, equations involving generalized polynomials are studied, whose solutions, if any, are also external numbers. As an application, the characteristic polynomial of a square matrix is determined, whose order is a standard natural number and the inputs are external numbers, and a closed formula for its coefficients is obtained.

Keywords: External numbers, solid, polynomial equation, generalized polynomial, characteristic polynomial

1

Introdução

Neste trabalho estuda-se o quanto as perturbações dos coeficientes de um polinómio influenciam as suas raízes. Pela sua aplicação, o estudo das raízes de um polinómio e as suas perturbações têm uma grande importância na Matemática. Concretamente, estuda-se, no âmbito da Análise Não-Standard, as equações polinomiais da forma

$$P(x) \subseteq N, \tag{1.1}$$

em que os coeficientes de P são números externos e N é uma neutriz. Recorde-se que uma neutriz é um subgrupo aditivo convexo de $\mathbb{R}$ e que um número externo α é da forma $a + A$, com $a \in \mathbb{R}$ e A uma neutriz. Assim, uam neutriz é um modelo de imprecisão e um número externo α pode ser visto como um número real a com um erro, representado pela neutriz A. A estrutura composta pelos números externos satisfaz todos os axiomas de um sólido, expostos em [6].

O presente estudo mostra que, caso existam raízes da equação (1.1), qualquer raiz ρ é um número externo.

Com o objetivo de obter tantas raízes quanto ao grau do polinómio P, alarga-se o estudo de raízes de polinómios para o caso complexo. Assim, introduz-se uma nova estrutura dos números externos da forma

$$a + ib + A + iA \tag{1.2}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e A uma neutriz. Mostra-se que essa estrutura satisfaz todos os axiomas de um sólido, excetuando os relacionados com ordem.

Assim, estuda-se as equações polinomiais da forma

$$P(z) \subseteq N + iN, \tag{1.3}$$

em que os coeficientes de P são números externos da forma indicada em (1.2) e N é uma neutriz. Novamente, as raízes quando existem, elas são números externos. Particularmente, se os coeficientes de $P(z)$ são todos internos, mostra-se que há tantas raízes quanto ao grau de P.

Como aplicação, estuda-se o polinómio caraterístico de uma matriz, cuja ordem é um número natural standard e as entradas são números externos. Como a propriedade distributiva num sólido não é válida na sua generalidade, em geral, não se pode agrupar todos os termos do mesmo grau no desenvolvimento do polinómio característico. Este facto dá lugar à introdução do conceito de *polinómio generalizado*. Mostra-se que uma equação que envolve um polinómio generalizado resolve-se aplicando o mesmo método utilizado na resolução de um sistema de equações da forma (1.1). Assim, uma raiz de um polinómio generalizado obtém-se como interseção de números externos que, quando não vazio, é um número externo. Apresenta-se, também, uma fórmula fechada para os coeficientes do polinómio característico.

Recorde-se que em [10, p. 122-126] já foi feito um estudo que relaciona as perturbações nos coeficientes de um polinómio com as suas raízes, no âmbito da Análise Não-Standard. Nessa obre foi mostrada que, para polinómios standard, um perturbação infinitesimal nos coeficientes, provoca uma perturbação infinitesimal nas raízes, com possibilidade de obtenção de novas raízes infinitamente grandes. Além disso, a perturbação numa raiz depende quase linearmente do tamanho da perturbação nos coeficientes. Assim, reconhece-se algumas propriedades de neutrizes, que são estruturas lineares, em particular a neutriz de todos os infinitesimais.

Em [6] provou-se que a solução da equação polinomial linear $\alpha x + \beta \subseteq \gamma$, com α, β, γ números externos, quando existe, é um número externo.

Este trabalho tem a seguinte estrutura. No Capítulo 2, em conformidade com [3], [4], [6] e [16], apresenta-se os axiomas dos números externos donde derivam estruturas semelhantes ao grupo, anel e corpo, respetivamente, assembleia, associação e sólido. Também, apresenta-se alguns conceitos, bem como as respetivas propriedades, relacionados com a Análise Não-Standard Elementar. No Capítulo 3 apresenta-se alguns resultados dos estudos sobre os números externos reais, nomeadamente, as operações e suas propriedades, de acordo com [6], [7], e [8]. Os conteúdos apresentados nestes dois capítulos são úteis na fundamentação e obtenção dos resultados posteriores. No Capítulo 4 apresenta-se a estrutura composta por números externos da forma (1.2), denominados números externos complexos. Mostra-se que as estruturas dos números complexos associados às operações da adição e da multiplicação são semigrupos regulares. Também, mostra-se que os números externos complexos satisfazem os axiomas de um sólido, exceto os relacionados com a ordem, dando origem à uma estrutura denominada *sólido não-ordenado*. No Capítulo 5 estuda-se as equações polinomiais da forma (1.1). Qualquer solução desta equação é um número externo que se obtém intersetando um neutriz $\mathcal{F}$, que é seu *conjunto-viabilidade*, com uma solução maximal de uma equação da forma $R(x) \in I$, onde R é um polinómio real interno e I um neutriz idempotente. No Capítulo 6 estuda-se as equações polinomiais, no contexto da estrutura dos números externos complexos, ou seja, estuda-se as equações da forma (1.3). O método utilizado para a determinação das raízes, quando existirem, é semelhante ao utilizado no Capítulo 5, ou seja, interseta-se uma neutriz $\mathcal{F}$ com as soluções maximais de uma equação da forma $R(z) \in I + iI$, onde R é um polinómio complexo interno e I uma neutriz idempotente. Mostra-se aqui, que a equação $R(z) \in I + iI$ tem tantas soluções quanto ao seu grau. No Capítulo 7 estuda-se as equações da forma (1.1), em que P não se reduz à forma clássica, ou seja, P é um *polinómio generalizado*. Mostra-se que essas equações reduzem-se a um sistema de equações da forma $R(x) \in J$, onde R é um polinómio real interno e J é uma neutriz idempotente. Aqui também, quando existem soluções, elas são números externos. No Capítulo 8, como aplicação do estudo de equações polinomiais, determina-se o polinómio característico de uma matriz quadrada, cuja ordem é um número natural standard e as entradas são números externos. Mostra-se que os polinómios característicos são polinómios generalizados e dá-se uma fórmula fechada para os seus coeficientes.

2

Preliminares

Neste capítulo faz-se uma abordagem sobre a estrutura algébrica dos números externos, com intuito de obter elementos que fundamentam os resultados dos capítulos que se seguem.

Apresenta-se duas secções: na primeira, faz-se uma abordagem sobre os axiomas dos números externos e, na segunda, faz-se uma sucinta introdução à Análise Não-Standard.

Para um estudo mais aprofundado e detalhado dos conteúdos abordados ao longo deste capítulo, recomenda-se [3], [2], [4], [5], [6], [7], [8] e [16].

2.1 Axiomas dos números externos

Nesta secção apresenta-se os axiomas algébricos dos números externos, divididos em seis grupos. Os axiomas são apresentados na linguagem de primeira ordem $L = \{+, \cdot, \leq\}$.

(1) O primeiro grupo de axiomas dá as leis algébricas para a adição e deu origem ao conceito de *assembleia* (Definição 2.4);

(2) O segundo grupo de axiomas dá as leis algébricas para a multiplicação, que também são leis de uma assembleia;

(3) O terceiro grupo de axiomas refere-se a uma relação de ordem total compatível com a multiplicação e a adição, com algumas regras particulares para as *magnitudes*;

(4) O quarto grupo de axiomas relaciona a adição e a multiplicação. Juntamente com os três primeiros grupos de axiomas deram origem aos conceitos de *associação* e de *associação ordenada* (Definição 2.6);

(5) O quinto grupo de axiomas, Axiomas de existência, permite distinguir uma associação de um *sólido* (Definição 2.1), assegurando a existência de elementos particulares: elementos neutros mínimos para a adição e para a multiplicação, elemento neutro máximo para a adição, magnitudes não triviais e, finalmente, elementos que separam duas magnitudes;

(6) O sexto grupo de axiomas dá as leis algébricas para produto de magnitudes.

Ao longo da apresentação dos axiomas, algumas notações e alguns conceitos serão utilizados, pelo que importa destacá-los.

Definição 2.1 (Sólido). *Chama-se* sólido *a uma estrutura algébrica que satisfaz todos os axiomas algébricos, isto é, os grupos (1) - (6).*

Definição 2.2 (Sólido não-ordenado). *Um* sólido não-ordenado *é uma estrutura que satisfaz todos os axiomas algébricos dum sólido excetuando os Axiomas de ordem.*

Pode dizer-se que sólido é uma extensão de um corpo ordenado não-arquimediano, com propriedade distributiva restrita — contudo, existe uma condição necessária e suficiente para que se verifica a distributividade.

Dado um elemento x de um sólido, o seu *zero individualizado*, e (ver Axioma A_3), é único e tem uma notação funcional $e = \mathrm{e}(x)$, da mesma forma, o seu elemento simétrico (ver Axioma A_4) é representado por $s = \mathrm{s}(x) = -x$. Caso x não seja um neutriz, a sua *unidade individualizada*, u (ver Axioma M_3), é única e tem uma notação funcional $u = \mathrm{u}(x)$, o seu elemento inverso (ver Axioma M_4) é representado por $d = \mathrm{d}(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Definição 2.3 (Semigrupo). *Sejam $S \neq \emptyset$ e $*$ uma operação binária em S. Diz-se que $(S, *)$ é um* semigrupo *se $*$ goza da propriedade associativa em S. Um semigrupo $(S, *)$ diz-se* regular *se cada elemento de S é regular, isto é, para todo $a \in S$, existe um $x \in S$ tal que $a * x * a = a$. Um semigrupo regular diz-se* comutativo *se a operação $*$ goza da propriedade comutativa em S.*

Definição 2.4 (Assembleia). *Sejam $G \neq \emptyset$ e $*$ uma operação binária em G. A estrutura $(G, *)$ é um assembleia se satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $\forall x \forall y \forall z\, (x * (y * z) = (x * y) * z)$;

(2) $\forall x \forall y\, (x * y = y * x)$;

(3) $\forall x \exists e\, (x * e = x \wedge \forall f\, (x * f = x \Rightarrow e * f = e))$;

(4) $\forall x \exists s\, (x * s = \mathrm{e}(x) \wedge \mathrm{e}(s) = \mathrm{e}(x))$;

(5) $\forall x \forall y\, (\mathrm{e}(x * y) = \mathrm{e}(x) \vee \mathrm{e}(x * y) = \mathrm{e}(y))$.

O Teorema 2.5 mostra que muitas propriedades de um grupo também são válidas numa assembleia.

Teorema 2.5 (Ver [2]). *Seja $(G,*)$ um assembleia. Então, para quaisquer $x,y,z \in G$, tem-se:*

(1) $\mathrm{e}(x) * \mathrm{e}(x) = \mathrm{e}(x)$.

(2) $\mathrm{e}(x * y) = \mathrm{e}(x) * \mathrm{e}(y)$.

(3) $\mathrm{e}(\mathrm{e}(x)) = \mathrm{e}(x)$.

(4) $\mathrm{s}(\mathrm{s}(x)) = x$.

(5) $\mathrm{s}(x * y) = \mathrm{s}(x) * \mathrm{s}(y)$.

(6) $\mathrm{e}(\mathrm{s}(x)) = \mathrm{s}(\mathrm{e}(x)) = \mathrm{e}(x)$.

(7) Se $x \neq \mathrm{e}(x)$*, então* $x \neq \mathrm{e}(y)$.

(8) $x * y = x * z \Leftrightarrow \mathrm{e}(x)\, y = \mathrm{e}(x)\, z$

Definição 2.6 (Ver [4], p. 791). *Sejam $G \neq \emptyset$ e $\mathcal{N} = \{\mathrm{e}(x) : x \in G\}$. Diz-se que $(G,+,\cdot)$ é uma* associação *se $(G,+)$ e $(G \setminus \mathcal{N}, \cdot)$ são assembleias e, para além disso, são satisfeitas as seguintes propriedades:*

(1) $\forall x \forall y \exists z\, (\mathrm{e}(x)\, y = \mathrm{e}(z))$;

(2) $\forall x \forall y\, (\mathrm{e}(xy) = \mathrm{e}(x)\, y + \mathrm{e}(y)\, x)$;

(3) $\forall x \neq \mathrm{e}(x)\, (\mathrm{e}(\mathrm{u}(x)) = \mathrm{e}(x)\, \mathrm{d}(x))$;

(4) $\forall x \forall y \forall z\, (xy + xz = x(y+z) + \mathrm{e}(x)\, y + \mathrm{e}(x)\, z)$;

(5) $\forall x \forall y\, (\mathrm{s}(xy) = \mathrm{s}(x)\, y)$.

Uma associação ordenada *é uma associação que satisfaz os Axiomas de ordem (apresentados na p. 8).*

O conceito de assembleia assemelha-se ao conceito de grupo. A grande diferença reside no facto de numa assembleia não existir "o elemento neutro", mas sim elemento neutro individualizado.

Assim, como já se tinha referido anteriormente (ver Axiomas dos números externos), os Axiomas para a adição e os Axiomas para a multiplicação são os axiomas de uma *assembleia aditiva* e de uma *assembleia multiplicativa*, respetivamente. Enquanto que, uma associação é uma estrutura que satisfaz os Axiomas para a adição, os Axiomas para a multiplicação e os Axiomas que relacionam a adição e a multiplicação.

Apresenta-se agora os seis grupos de axiomas de um sólido.

Axiomas para a adição. Diferentemente daquilo que acontece num grupo, anel ou corpo, num conjunto dos números externos não há um único elemento neutro para adição (zero), mas sim cada número externo x tem o seu próprio elemento neutro — que pode ser visto como "magnitude" ou "zero generalizado"— que é representado por $\mathrm{e}(x)$. O axioma E_4 assegura a existência não trivial de magnitude. Pode-se interpretar $\mathrm{e}(x)$ como a "imprecisão" ou o "erro" de x. O simétrico do elemento x é, também, individualizado e é representado por $\mathrm{s}(x)$ ou $-x$.

A_1 $\forall x \forall y \forall z\, (x + (y+z) = (x+y)+z)$.

A_2 $\forall x \forall y \, (x + y = y + x)$.

A_3 $\forall x \exists e \, (x + e = x \wedge \forall f \, (x + f = x \Rightarrow e + f = e))$.

A_4 $\forall x \exists s \, (x + s = \mathrm{e}\,(x) \wedge \mathrm{e}\,(s) = \mathrm{e}\,(x))$.

A_5 $\forall x \forall y \, (\mathrm{e}\,(x + y) = \mathrm{e}\,(x) \vee \mathrm{e}\,(x + y) = \mathrm{e}\,(y))$.

Axiomas para a multiplicação. Similarmente à adição, cada número externo x tem o seu próprio elemento neutro em relação à multiplicação — que pode ser visto como "unidade generalizada"— que é representado por $\mathrm{u}\,(x)$. Pode-se interpretar $\mathrm{u}\,(x)$ como "imprecisão relativa/multiplicativa". O inverso de $x \neq \mathrm{e}\,(x)$ é representado por $\mathrm{d}\,(x)$ ou $\frac{1}{x}$ ou x^{-1}.

M_1 $\forall x \forall y \forall z \, (x\,(yz) = (xy)\,z)$.

M_2 $\forall x \forall y \, (xy = yx)$.

M_3 $\forall x \neq \mathrm{e}\,(x) \, \exists u \, (xu = x \wedge \forall v \, (xv = x \Rightarrow uv = u))$.

M_4 $\forall x \neq \mathrm{e}\,(x) \, \exists d \, (xd = \mathrm{u}\,(x) \wedge \mathrm{u}\,(d) = \mathrm{u}\,(x))$.

M_5 $\forall x \neq \mathrm{e}\,(x) \, \forall y \neq \mathrm{e}\,(y) \, (\mathrm{u}\,(xy) = \mathrm{u}\,(x) \vee \mathrm{u}\,(xy) = \mathrm{u}\,(y))$.

Axiomas de ordem. Os axiomas *O_1* a *O_4* asseguram que "$\leq$" é uma relação de ordem total. O axioma *O_5* mostra que esta relação é compatível com a adição. Os axiomas *O_7* e *O_8* garantem que $\leq$ é compatível com a multiplicação por números externos positivos. O axioma *O_6* mostra que se um elemento é "pequeno", no sentido de que é absorvido quando adicionado a um certo magnitude, então é mais pequeno que essa magnitude. Segue-se de *O_5* e *O_6* que no conjunto das magnitudes a ordem se carateriza pela adição, ou seja:

$$\forall x \forall y \, (\mathrm{e}\,(x) \leq \mathrm{e}\,(y) \Leftrightarrow \mathrm{e}\,(x) + \mathrm{e}\,(y) = \mathrm{e}\,(y)) \, . \tag{2.1}$$

O_1 $\forall x \, (x \leq x)$.

O_2 $\forall x \forall y \, (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$.

O_3 $\forall x \forall y \forall z \, (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

O_4 $\forall x \forall y \, (x \leq y \vee y \leq x)$.

O_5 $\forall x \forall y \forall z \, (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$.

O_6 $\forall x \forall y \, (y + \mathrm{e}\,(x) = \mathrm{e}\,(x) \Rightarrow (y \leq \mathrm{e}\,(x) \wedge -y \leq \mathrm{e}\,(x)))$.

O_7 $\forall x \forall y \forall z \, ((\mathrm{e}\,(x) < x \wedge y \leq z) \Rightarrow xy \leq xz)$.

O_8 $\forall x \forall y \forall z \, ((\mathrm{e}\,(y) \leq y \leq z) \Rightarrow \mathrm{e}\,(x)\,y \leq \mathrm{e}\,(x)\,z)$.

Axiomas que relacionam a adição e a multiplicação. Os três primeiros axiomas são propriedades sobre magnitudes. O axioma *AM1* assegura que o produto de um número externo por uma magnitude é uma magnitude. O axioma *AM2* versa sobre a magnitude de um produto e o *AM3*, sobre a magnitude da unidade (individualizada). O axioma *AM4* garante que a distributividade da multiplicação em relação à adição se verifica a menos duma magnitude. O último axioma, *AM5*, versa sobre o simétrico do produto de dois números externos.

AM$_1$ $\forall x \forall y \exists z\, (\mathrm{e}\,(x)\, y = \mathrm{e}\,(z))$.

AM$_2$ $\forall x \forall y\, (\mathrm{e}\,(xy) = \mathrm{e}\,(x)\, y + \mathrm{e}\,(y)\, x)$.

AM$_3$ $\forall x \neq \mathrm{e}\,(x) \left(\mathrm{e}\,(\mathrm{u}\,(x)) = \dfrac{\mathrm{e}\,(x)}{x}\right)$.

AM$_4$ $\forall x \forall y \forall z\, (xy + xz = x\,(y+z) + \mathrm{e}\,(x)\, y + \mathrm{e}\,(x)\, z)$.

AM$_5$ $\forall x \forall y\, (-\,(xy) = (-x)\, y)$.

Axiomas de existência. O axioma *E1* postula a existência da magnitude mínima, representada por 0 e o axioma *E2* assegura a existência da unidade mínima, representada por 1. Um elemento p tal que $\mathrm{e}\,(p) = 0$ é chamado *preciso*. O axioma *E5* garante que todo número externo é a soma de um número preciso com uma magnitude. O axioma *E3* garante a existência da magnitude máxima M. Na construção de um modelo, M corresponde ao seu suporte (ou domínio). O axioma *E4* garante a existência de magnitudes não triviais, ou seja, diferentes de 0 e de M, o que implica que o domínio de um modelo já não pode ser um corpo. O último axioma, *E6*, garante que duas magnitudes são separadas por um número externo que não é uma magnitude, denominado por *não-neutricial*. A existência de elementos não-neutriciais garante que $1 \neq 0$.

E$_1$ $\exists m \forall x\, (m + x = x)$.

E$_2$ $\exists u \forall x\, (ux = x)$.

E$_3$ $\exists M \forall x\, (\mathrm{e}\,(x) + M = M)$.

E$_4$ $\exists x\, (\mathrm{e}\,(x) \neq 0 \wedge \mathrm{e}\,(x) \neq M)$.

E$_5$ $\forall x \exists a\, (x = a + \mathrm{e}\,(x) \wedge \mathrm{e}\,(a) = 0)$.

E$_6$ $\forall x \forall y\, (x = \mathrm{e}\,(x) \wedge y = \mathrm{e}\,(y) \wedge x < y \Rightarrow \exists z\, (z \neq \mathrm{e}\,(z) \wedge x < z < y))$.

Axiomas sobre o produto de magnitudes. Para além dos cinco grupos de axiomas apresentados anteriormente, num conjunto de números externos considera-se ainda mais dois axiomas, sobre o *produto de magnitudes*: o Axioma *Pm1*, que dá o resultado do produto de uma magnitude *idempotente* (ver Definição 2.7) com o seu *ideal maximal* (ver Definição 2.8), e o Axioma *Pm2*, que assegura que toda magnitude é o produto de um elemento preciso por uma magnitude idempotente. Nota-se que o produto de magnitudes está bem definido pelo Axioma *AM1*, mas não determinado. Como se pode constatar, os resultados de produtos de magnitudes idempotentes é determinado pelo Axioma *Pm1*, e a conjugação com o Axioma *Pm2* garante a determinação de produtos de quaisquer magnitudes.

Antes de enunciar os axiomas, já mencionados, introduz-se de seguida algumas noções preparatórias.

Definição 2.7 (Magnitude idempotente). *Uma magnitude* e *diz-se* idempotente *se* $ee = e$.

Nota-se que 0 e M são magnitudes idempotentes. Também, se e e f são magnitudes idempotentes, então ef também é idempotente, pois $efef = eeff = ef$.

Definição 2.8 (Ideal). *Seja* y *uma magnitude idempotente tal que* $1 < y$. *Um* ideal z *de* y *é uma magnitude tal que* $z \leq y$ *e para todo elemento preciso* p, $0 \leq p < y$, *tem-se* $pz \leq z$. *Um ideal* x *de* y *diz-se* maximal, *se* $x < y$ *e para todo ideal* z *de* y, *tal que* $x \leq z \leq y$, *tem-se* $z = x$ *ou* $z = y$.

Nota-se que 0 é ideal de qualquer magnitude idempotente I, pois ele é idempotente e para todo elemento preciso p, tal que $p < I$, tem-se $p0 = 0$.

Ideais maximais são idempotentes.

Pm_1 Seja y uma magnitude idempotente tal que $1 < y$, e seja x o ideal maximal de y. Então $xy = x$.

Pm_2 Seja x uma magnitude. Então, existem um elemento preciso p e uma magnitude idempotente y, tais que $x = py$.

2.2 Introdução à Análise Não-Standard Elementar

A Análise Não-Standard tem como principal objetivo o tratamento dos números infinitesimais e infinitamente grandes como objetos matemáticos. Foi inventada por Robinson[1] (ver [13]) no âmbito da Teoria dos Modelos, um dos ramos da Lógica Matemática.

Devido ao trabalho desenvolvido por Edward Nelson[2] em [11], a Análise Não-Standard pode ser vista como uma extensão da matemática clássica. Mais precisamente, aos axiomas da matemática clássica – os axiomas ZFC da Teoria de Conjuntos de Zermelo[3]-Fraenkel[4] juntamente com o Axioma da Escolha – adiciona-se mais três novos axiomas – Axioma de Idealização, Axioma de Estandardização e Axioma de Transferência – que dizem como proceder com os novos objetos matemáticos (números infinitesimais e infinitamente grandes, bem como os seus derivados).

A linguagem de ZFC consiste do símbolo primitivo $\in$, *pertence a*, para fazer referência a elementos de um conjunto. Este sistema é expandido através da adição do símbolo predicativo unário st, *standard*. Assim, um elemento externo X pode ser standard, $\mathrm{st}(X)$, ou não-standard, $\neg\mathrm{st}(X)$.

De acordo com [6], nesta secção apresenta-se alguns conceitos, bem como as respetivas propriedades, referentes à *Análise Não-Standard Elementar*, *ENA*, com intuito de tornar mais compreensivo os conteúdos apresentados mais adiante.

A ENA é também uma extensão da matemática clássica. Ela consiste dos axiomas introduzidos por Nelson[5] no seu livro "Radically Elementary Prabability Theory" (ver [12]) mais um axioma (*Axioma 1.7*), que permite identificar os diferentes tipos de conjuntos.

[1] Abraham Robinson, matemático estado-unidense, nascido na Alemanha (1918-1974)
[2] Edward Nelson, matemático americano (1932-2014)
[3] Adolf Abraham Halevi Fraenkel, matemático israelita, nascido na Alemanha (1891-1965)
[4] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, matemático alemão (1871-1953)
[5] Edward Nelson, matemático estado-unidense (1932-2014)

Antes de apresentar o sistema axiomático ENA apresenta-se o sistema axiomático ZFL, Zermelo-Fraenkel-Leibniz[6], introduzido por Lutz (ver [9]), que inclui as *Regras de Leibniz*, que são suficientes para a Análise Não-Standard Elementar (são axiomas de cálculos, permitindo uma abordagem rigorosa com as ordens de magnitudes). Seguidamente, apresenta-se o *Axioma 1.7*, que generaliza o Axioma de Extensão, do sistema axiomático ZFC, com a introdução do símbolo st, de modo que se possa definir conjunto externo.

Definição 2.9 (Ver [6]). *O sistema axiomático ZFL consiste do sistema axiomático ZFC juntamente com os seguintes axiomas:*

Axioma 1.1 $\mathrm{st}\,(0)$;

Axioma 1.2 $\forall n \in \mathbb{N}\,(\mathrm{st}\,(n) \Rightarrow \mathrm{st}\,(n+1))$;

Axioma 1.3 $\forall n, m \in \mathbb{N}\,(\mathrm{st}\,(n) \wedge \mathrm{st}\,(m) \Rightarrow \mathrm{st}\,(n+m))$;

Axioma 1.4 $\forall n, m \in \mathbb{N}\,(\mathrm{st}\,(n) \wedge \mathrm{st}\,(m) \Rightarrow \mathrm{st}\,(n \cdot m))$;

Axioma 1.5 $\forall n, m \in \mathbb{N}\,(\mathrm{st}\,(n) \wedge \mathrm{st}\,(m) \Rightarrow \mathrm{st}\,(n^m))$;

Axioma 1.6 $\exists \omega \in \mathbb{N}\,(\neg \mathrm{st}\,(\omega))$.

Com o predicado "standard" é possível definir alguns conceitos, relacionados com o conceito de ordem de magnitude, dentro do conjunto $\mathbb{R}$.

Definição 2.10 (Ver [6]). *Seja $x \in \mathbb{R}$. Diz-se que*

(1) x *é* limitado *se existe um elemento standard $n \in N$ tal que $|x| \leq n$.*

(2) x *é* ilimitado, *ou* infinitamente grande, *se x não é limitado.*

(3) x *é* infinitesimal, *ou* infinitamente pequeno, *se para todo elemento standard $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tem-se $|x| \leq \frac{1}{n}$, e escreve-se $x \simeq 0$.*

(4) x *é* apreciável *se x é limitado, mas não infinitesimal.*

Teorema 2.11 (Ver [6]). *Sejam números limitados $x, y \in \mathbb{R}$. Então,*

(1) 0 é limitado.

(2) $x+1$ é limitado.

(3) $x+y$ é limitado.

(4) xy é limitado.

(5) Se $y > 0$, então x^y é limitado, se bem-definido.

Teorema 2.12 (Ver [6]). *O inverso de um número apreciável é também apreciável.*

Teorema 2.13 (Ver [6]). *Sejam um número real ilimitado $\omega > 0$ e um número standard $m \in \mathbb{N}$. Então, $\omega - m$, $\frac{\omega}{m}$ e $\omega^{\frac{1}{m}}$ são números ilimitados. Também, $\log(\omega)$ é um número ilimitado.*

Teorema 2.14 (Ver [6]). *Sejam números reais infinitesimais $\delta, \varepsilon > 0$, um número real limitado x e um número standard positivo $m \in \mathbb{N}$. Então,*

[6] Gottfried Wilhelm Leibniz, polímata alemão (1646-1716)

(1) $\varepsilon + \delta$ *é infinitesimal.*

(2) εx *é infinitesimal.*

(3) $\varepsilon\delta$ *é infinitesimal.*

(4) Se $\varepsilon > 0$, *tem-se* $\varepsilon^{\frac{1}{m}}$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ *e* $\frac{1}{\log(\varepsilon)}$ *são infinitesimais.*

Definição 2.15 (Ver [6])**.** *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}$. *Diz-se que* x *e* y *são* infinitamente próximos, *e escreve-se* $x \simeq y$, *se* $x - y$ *é um infinitésimo. Se* $y \neq 0$, *diz-se que os números* x *e* y *são* assimptóticos, *e escreve-se* $x \sim y$, *se* $\frac{x}{y}$ *é infinitamente próximo a* 1.

Nota 2.16. *Escreve-se* $x \gtrsim y$, *respetivamente* $x \lesssim y$, *para dizer que* $x > y \vee x \simeq y$, *respetivamente* $x < y \vee x \simeq y$. *Também, se escreve* $x \gnsim y$, *respetivamente* $x \lnsim y$, *para dizer que* $x > y \wedge x \not\simeq y$, *respetivamente* $x < y \wedge x \not\simeq y$.

Se $x \simeq y$, *então existe* $\varepsilon \simeq 0$ *tal que* $x = y + \varepsilon$.

Por abuso de anotação, escreve-se $x \simeq +\infty$ *para dizer que* x *é positivo e ilimitado.*

Teorema 2.17 (Ver [6])**.** *Sejam os números apreciáveis* $x, y \in \mathbb{R}$. *Então,* $x \simeq y$ *se, e somente se,* $x \sim y$.

Teorema 2.18 (Ver [6])**.** *Sejam* $x, y, \zeta, \eta \in \mathbb{R}$ *tais que* $\zeta \simeq x$ *e* $\eta \simeq y$. *Então,*

(1) $\zeta + \eta \simeq x + y$.

(2) Se x, y *são limitados, então* $\zeta x \simeq \eta y$.

(3) Se x *é apreciável, então* $\frac{1}{\zeta} \simeq \frac{1}{x}$.

2.2.1 Conjunto interno e externo

Definição 2.19 (Ver [6])**.** *Uma fórmula da linguagem de ZFC,* $\{\in\}$, *é denominada* fórmula interna. *Uma fórmula da linguagem de ZFL,* $\{\in, \mathrm{st}\}$, *é denominada* fórmula externa.

Exemplo 2.20. *As fórmulas* $x = 0$, $\forall n \left(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\right)$, $[0, 1[\subset \mathbb{R}$ *são fórmulas internas, pois os símbolos* 0, $\mathbb{N}$, 2, $\Rightarrow$, 1, $[\ldots[$, $\subset$ e $\mathbb{R}$ *podem ser definidos na linguagem de* ZFC.

As fórmulas $\mathrm{st}\,(0)$, $\varepsilon \simeq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}\,(a$ *apreciável* $\Rightarrow a$ *limitada*) *são fórmulas externas, pois podem ser definidas na linguagem de ZFL, mas não na linguagem de ZFC.*

Há, no entanto, fórmulas externas equivalentes a fórmulas internas. Por exemplo, a fórmula

$$\forall x \left(x \simeq 0 \wedge \mathrm{st}\,(x) \Rightarrow \forall y > 0 \left(\mathrm{e}^{y} > x\right)\right)$$

é equivalente a

$$\forall x \left(x = 0 \Rightarrow \forall y > 0 \left(\mathrm{e}^{y} > x\right)\right).$$

Definição 2.21 (Ver [6])**.** *Um conjunto diz-se* interno *se é definido por uma fórmula interna. Um conjunto diz-se* externo *se é definido por uma fórmula externa.*

Exemplo 2.22. *Sejam* $\varepsilon > 0 \wedge \varepsilon \simeq 0$ *e o intervalo de números reais* $[0, \varepsilon]$. *Apesar de* $\varepsilon \simeq 0$ *ser uma fórmula externa, o conjunto* $[0, \varepsilon]$ *é interno, pois é representado pela fórmula interna,*

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \varepsilon\},$$

pois aqui ε é uma variável livre.

A fórmula $\forall\varepsilon > 0\,(\varepsilon \simeq 0 \Rightarrow [0,\varepsilon] \subset [0,1])$ é externa só pelo facto da declaração da variável ε.

Os símbolos que se seguem são utilizados para representar certos conjuntos:

$$\begin{aligned} \pounds &= \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é limitado}\}\,, \\ \oslash &= \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é infinitesimal}\}\,, \\ @ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \text{ é apreciável}\}\,, \\ \not\infty &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \text{ é ilimitado}\}\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, tem-se, por exemplo, $-\pounds = \pounds$, $\pounds + \pounds = \pounds$, $@\pounds = \pounds$, $\frac{1}{@} = @$, $\ln(@) = \pounds$, $\mathrm{e}^{\pounds} = @$, etc.

Com o intuito de identificar os diferentes conjuntos (internos e externos) na extensão da matemática clássica, introduz-se o axioma que se segue.

Axioma 1.7 Seja z um conjunto interno e ϕ uma fórmula, definida com os símbolos $\in$ e st e o uso dos quantificadores é permitido só com respeito aos conjuntos internos. Então,

$$\exists Y\,(x \in Y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \phi(x)))\,. \tag{2.3}$$

Definição 2.23 (Ver [6])**.** *A coleção $Y = \{x \in z \wedge \phi(x)\}$ é denominado* pré-conjunto externo. *Um pré-conjunto externo que não é interno, é denominado* conjunto externo.

Assim, pode-se identificar as coleções apresentadas em (2.2) como sendo conjuntos externos, com base na Definição 2.23, pois nas suas definições tem que se utilizar o símbolo st, conforme o que se segue. Os conjunto externos são representados por letras maiúsculas.

Nota 2.24. *Para facilitar a escrita passa-se a utilizar as seguintes abreviaturas:*

(1) $\exists^{\mathrm{st}} n\,(\ldots)$, em vez de $(\exists n \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{st}(n))\,(\ldots)$,

(2) $\forall^{\mathrm{st}} n\,(\ldots)$, em vez de $\forall n\,(\mathrm{st}(n) \to (\ldots))$,

(3) $x \gtrsim y$ (respetivamente $x \lesssim y$), em vez de $x > y \vee x \simeq y$ (respetivamente $x < y \vee x \simeq y$),

(4) $x \gnsim y$ (respetivamente $x \lnsim y$), em vez de $x > y \wedge x \not\simeq y$ (respetivamente $x < y \wedge x \not\simeq y$).

Tem-se então:

$$\begin{aligned} \pounds &= \left\{x \in \mathbb{R} : \exists^{\mathrm{st}} n\,(|x| < n)\right\}, \\ \oslash &= \left\{x \in \mathbb{R} : \forall^{\mathrm{st}} n \left(|x| < \frac{1}{n}\right)\right\}, \\ @ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \exists^{\mathrm{st}} n \left(\frac{1}{n} < x < n\right)\right\}, \\ \not\infty &= \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \forall^{\mathrm{st}} n\,(x > n)\right\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

O *Princípio de Cauchy* (Ver [15]) descrito no teorema que se segue, mostra que não existe conjunto que seja interno e externo simultaneamente.

Teorema 2.25 (Princípio de Cauchy)**.** *Nenhum conjunto externo é interno.*

Corolário 2.26. *Seja I um conjunto interno, e seja E um conjunto externo. Então:*

(1) Se $I \subseteq E$, então $I \subset E$.

(2) Se $E \subseteq I$, então $E \subset I$.

Pelo Corolário 2.26, uma propriedades interna $i(x)$ que é verificada pelos elementos de um conjunto externo E, também é verificada por elementos que estão fora de E, pois se $I = \{x : i(x)\}$ é interna e $E \subseteq I$, então $E \subset I$. Da mesma maneira, uma propriedade externa $e(x)$ que é verificadas pelos elementos de um conjunto interno I, também é verificada por elementos fora de I, pois de $E = \{x : e(x)\}$ é externo e $I \subseteq E$, então $I \subset E$.

Exemplo 2.27. *Seja $\varepsilon \simeq 0$, $\varepsilon > 0$. Seja a sucessão definida por $a_n = n\varepsilon$ ($n \in \mathbb{N}$). Para todo n limitado, tem-se $n\varepsilon \simeq 0$, logo $n\varepsilon < 1$. Então, pelo Princípio de Cauchy, existe n ilimitado que verifica a propriedade $n\varepsilon < 1$.*

De entre os conjuntos externos destaca-se duas classes, os *halos* e as *galáxias*, dado as suas utilizações nos capítulos que se seguem.

Definição 2.28. *Um conjunto externo G é uma* galáxia *se*

$$y \in G \Leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} n \left(\varphi\left(n, y\right)\right),$$

onde φ é uma fórmula interna.
Um conjunto externo H é um halo *se*

$$y \in H \Leftrightarrow \forall^{\mathrm{st}} n \left(\psi\left(n, y\right)\right),$$

onde ψ é uma fórmula interna.

Seja $A_n = \{y \in \mathbb{R} : \varphi(n, y)\}$. Então, uma galáxia G é união dos elementos de índice standard de uma sequência interna de conjuntos internos:

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{st}(n)} A_n.$$

De modo análogo, seja $B_n = \{y \in \mathbb{R} : \psi(n, y)\}$. Então, um halo H é intersecção dos elementos de índice standard de uma sequência de conjuntos internos:

$$H = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{st}(n)} B_n.$$

Exemplo 2.29. *Os conjuntos externos que se seguem são galáxias:*

(1) ${}^{\sigma}\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : \mathrm{st}(n)\}$, £ (galáxia principal), @, $\{x \in \mathbb{R} : 0 \lnapprox x \lnapprox 1\}$.

*(2) Para $\varepsilon > 0$, a ε-*galáxia *ε£ é definida por*

$$\varepsilon £ = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists^{\mathrm{st}} n \left(|x| < n\varepsilon\right)\right\}.$$

Elementos de uma ε-galáxia ε£ são denominados números reais de ordem ε.

Exemplo 2.30. *Os conjuntos externos que se seguem são halos:*

(1) $\{n \in \mathbb{N} : n \simeq +\infty\}$, $\oslash$, $\not\oslash$, $\{x \in \mathbb{R} : 0 \lesssim x < 1\}$.

(2) Para $\varepsilon > 0$, *o* ε-halo $\varepsilon\oslash$ *é definido por*

$$\varepsilon\oslash = \left\{x \in \mathbb{R} : \forall^{\mathrm{st}} n \left(|x| < \frac{\varepsilon}{n}\right)\right\}.$$

O *Teorema de Representação* (ver [1]), que se segue, é muito importante na identificação de galáxias e halos.

Teorema 2.31 (Teorema de Representação)**.** *Seja* X *um conjunto interno. Então,*

(1) Um conjunto externo $G \subset X$ *é uma galáxia se, e somente se,* $G = f^{-1}\left({}^{\sigma}\mathbb{N}\right)$*, onde* $f : X \to \mathbb{N}$ *é uma função interna.*

(2) Um conjunto externo $H \subset X$ *é um halo se, e somente se,* $H = f^{-1}(\oslash)$*, onde* $f : X \to \mathbb{N}$ *é uma função interna.*

O *Princípio de Fehrele* (Ver [6]), teorema seguinte, garante que nenhum halo é uma galáxia.

Teorema 2.32 (Princípio de Fehrele)**.** *Nenhum halo é uma galáxia.*

Definição 2.33. *Os axiomas do sistema axiomático ENA são os axiomas de ZFC, juntamente com Axioma 1.1, Axioma 1.2 e Axioma 1.6 de ZFL mais o seguinte axioma:*

Axioma 1.8 *(Indução Externa). Seja* Φ *uma fórmula (interna ou externa). Então,*

$$\Big(\Phi(0) \wedge \forall^{\mathrm{st}} n\left(\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)\right)\Big) \Rightarrow \forall^{\mathrm{st}} n\left(\Phi(n)\right).$$

O axioma da Indução Externa garante que o *Princípio de Indução em* $\mathbb{N}$ é válido para o conjunto dos números naturais standard, ${}^{\sigma}\mathbb{N}$, para qualquer fórmula matemática (interna ou externa). Este axioma é muito útil na demonstração de algumas propriedades como se pode ver mais adiante.

Teorema 2.34 (Ver [6])**.** *O sistema axiomático ENA implica os axiomas ZFL.*

O teorema anterior garante que os resultados obtidos a partir do sistema axiomático ZFL são válidos na ENA.

3

Números externos reais, o sólido $(\mathbb{E}, +, \cdot)$

Neste capítulo aborda-se o modelo para os axiomas algébricos, apresentados no capítulo anterior, dos números externos com suporte no corpo dos números reais, $\mathbb{R}$. Os conteúdos aqui expostos são, principalmente, frutos de [2], [6], [7] e [8].

Visando a fundamentação dos conteúdos expostos no Capítulo 4, apresenta-se alguns conceitos, bem como as suas propriedades, relativamente ao *conjunto dos números externos reais*, $\mathbb{E}$, introduzido em [7] e [8] como modelo matemático para ordem de magnitude em Análise Não-Standard.

No conjunto $\mathbb{E}$ destacam-se as *neutrizes* (ver Definição 3.1), que desempenham o papel de zeros generalizados. Os resultados apresentados, mais adiante, mostram que o conjunto $\mathbb{E}$ é um semigrupo aditivo comutativo regular, e que $\mathbb{E}$ exceto o conjunto dos neutrizes também forma um semigrupo multiplicativo comutativo regular (ver Proposição 3.9). Também pode-se ver que esses semigrupos são assembleias.

Embora a multiplicação não seja distributiva em relação à adição, existe a condição necessária e suficiente para que a distributividade ocorra.

Os resultados apresentados mostram, também, que o conjunto $\mathbb{E}$ é totalmente ordenado e que essa ordem é compatível com a adição e multiplicação.

As propriedades dos números externos reais atribuem ao conjunto $\mathbb{E}$, com a soma, multiplicação e ordem definidas, a estrutura de sólido.

Definição 3.1 (Neutriz)**.** *Uma* neutriz *é um subgrupo aditivo convexo de* $\mathbb{R}$.

Excetuando $\{0\}$ e $\mathbb{R}$, todas as neutrizes são conjunto externos, com elementos internos. Por exemplo, $\pounds$, conjunto externo dos números limitados, e $\oslash$, o conjunto externo dos números infinitesimais, são neutrizes (não triviais). O conjunto das neutrizes é representado por $\mathcal{N}$.

Se uma neutriz não inclui 1, então ela está contido em $\oslash$. Se uma neutriz inclui 1, então ela contém $\pounds$. Assim, a menor neutriz que contém estritamente $\oslash$ é $\pounds$.

Proposição 3.2 (Ver, [6])**.** *Seja $N \subseteq \mathbb{R}$. Então N é uma neutriz se, e somente se, N é convexo e $2N = -N = N$.*

Proposição 3.3. *Seja A uma neutriz. Se $a \in A$, então $a + A = A$.*

Demonstração. Sejam A uma neutriz e $a \in A$.

(1) Seja $x \in A$. Como A é um grupo aditivo comutativo, tem-se

$$x = x + 0 = x + a + (-a) = a + (x + (-a)) = a + a' \in a + A,$$

pois $a' \in A$, uma vez que $x, -a \in A$. Assim, $A \subseteq a + A$.

(2) Seja $y \in a+A$. Então $y = a+b$, para algum $b \in A$. Como $a, b \in A$, então $y \in A$, porque A é fechado em relação à adição. Assim, $a + A \subseteq A$.

Por *(1)* e *(2)*, tem-se $a + A = A$. □

Definição 3.4. *Um* número externo *α é a soma algébrica de um número real a com uma neutriz A, ou seja, $\alpha = a + A = \{x + a : a \in A\}$. O conjunto dos números externos é representada por $\mathbb{E}$.*

Definição 3.5. *Seja $\alpha = a+A \in \mathbb{E}$. Então, diz-se que a é um representante de α e $\mathrm{N}(\alpha) = A$ é a sua* parte neutricial.

Proposição 3.6 (Ver [6])**.** *Seja $\alpha = a + A \in \mathbb{E}$. Então, para todo $y \in \alpha$, tem-se $y + A = \alpha$. Em particular, se $0 \in \alpha$, então $0 + A = A = \alpha$.*

Definição 3.7. *Um número externo α diz-se* não-neutricial *se α não é uma neutriz.*

Definição 3.8. *As operações de* soma *e de* multiplicação *em $\mathbb{E}$ são definidas pelas operações de Minkowski*[1]*. Assim, para quaisquer $\alpha = a + A, \beta = b + B \in \mathbb{E}$, tem-se*

(1) $\alpha + \beta = \{a + x + b + y : x \in A, y \in B\}$,

(2) $\alpha\beta = \{(a + x)(b + y) : x \in A, y \in B\}$.

Proposição 3.9 (Ver [6])**.** *As estruturas $(\mathbb{E}, +)$ e $(\mathbb{E} \setminus \mathcal{N}, \cdot)$ são semigrupos comutativos regulares.*

[1] Hermann Minkowski, matemático alemão (1864-1909)

Teorema 3.10 (Ver [2]). *Os semigrupos comutativos regulares* $(\mathbb{E}, +)$ *e* $(\mathbb{E} \setminus \mathcal{N}, \cdot)$ *são assembleias.*

Relativamente à adição, dado $\alpha = a + A \in \mathbb{E}$, tem-se

$$\mathrm{e}(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha) = A$$

e

$$\mathrm{s}(\alpha) = -\alpha = -a + A.$$

Quanto à multiplicação, dado $\alpha = a + A \in \mathbb{E} \setminus \mathcal{N}$, tem-se

$$\mathrm{u}(\alpha) = 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha} = 1 + \frac{A}{a}$$

e

$$\mathrm{d}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a} + \frac{A}{a^2}.$$

3.1 Operações com neutrizes e números externos

Definição 3.11. *Sejam* $M, N \in \mathcal{N}$. *Então*

(1) $M + N = \{a + b : (a, b) \in M \times N\}$.

(2) $M \cdot N = \{a \cdot b : (a, b) \in M \times N\}$.

(3) $M : N = \{c \in \mathbb{R} : c \cdot N \subseteq M\}$.

Definição 3.12. *Sejam* $M, N \in \mathcal{N}$, *com* $M \subseteq N$. *Então* N *é o máximo, com respeito à inclusão de conjuntos, e escreve-se* $\max\{M, N\} = N$.

Teorema 3.13 (Ver [6]). *Sejam* $M, N \in \mathcal{N}$. *Então* $-M$, $M + N$ *e* $M \cdot N$ *são neutrizes. Mais ainda,*

(1) $M + N = \max\{M, N\}$.

(2) $\pounds \cdot M = M$.

(3) $\dfrac{1}{1 + M} = 1 + M$, *se* $M \subseteq \oslash$.

Proposição 3.14 (Ver [6]). *Sejam* $M, N \in \mathcal{N}$. *Então,* $M \cdot N$ *e* $M : N$ *são neutrizes.*

Proposição 3.15 (Ver [6]). *Sejam* $\alpha = a + A, \beta = b + B \in \mathbb{E}$. *Então,*

(1) $\alpha + \beta = a + b + A + B = a + b + \max\{A, B\}$;

(2) $\alpha \cdot \beta = a \cdot b + a \cdot B + b \cdot A + A \cdot B = a \cdot b + \max\{a \cdot B, b \cdot A, AB\}$.

(3) Se α *ou* β *é não neutricial, então* $\alpha \cdot \beta = a \cdot b + \max\{a \cdot B, b \cdot A\}$.

Teorema 3.16 (Ver, [6]). *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$. *Então, se* $\alpha = a + A$, *com* $a \in \mathbb{R}$ *e* $A \in \mathcal{N}$, *então* $-\alpha = -a + A$. *Se* α *é um número externo não-neutricial, então* $\dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{E}$ *e* $a \notin A$. *Para além disso,* *(1)* $\dfrac{A}{\alpha} = \dfrac{A}{a} \subseteq \oslash$.

(2) $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{A}{a^2} = \dfrac{\alpha}{a^2}$.

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{a^2}$.

Definição 3.17. *Sejam A uma neutriz e α um número externo. Diz-se que*

(1) α é apreciável *em relação a A se $\alpha A = A$.*

(2) α é um absorvente *de A se $\alpha A \subset A$.*

(3) α é um expansor *de A se $A \subset \alpha A$.*

Proposição 3.18 (Ver [6])**.** *Seja $A \subseteq \oslash$, $A \neq \{0\}$, uma neutriz. Então,*

(1) Todo elemento de A é um absorvente de A.

(2) Todo neutriz $B \subset A$ é um absorvente de A.

Definição 3.19 (Ver [7])**.** *Seja A uma neutriz. Então,*

(1) $\pounds_A$ é o conjunto dos elementos $t \in A$ tais que $tA \subseteq A$.

(2) $@_A$ é o conjunto dos elementos $s \in A$ tais que $sA = A$.

Definição 3.20 (Ver [7] e [8])**.** *Seja $I \in \mathcal{N}$. Diz-se que I é* idempotente *se*

$$I \cdot I = I.$$

Exemplo 3.21. *São idempotentes os seguintes neutrizes: $\oslash$, $\pounds$, $\pounds\epsilon^{\not\infty}$, $\pounds \mathrm{e}^{\frac{-@}{\epsilon}}$, para $\epsilon \simeq 0$ e $\epsilon > 0$.*

Definição 3.22. *Sejam $A \in \mathcal{N}$ e n um número natural standard. Define-se, por recursão, a* potência *de A de expoente n por*

$$\begin{cases} A^1 = A \\ A^n = A^{n-1} \cdot A. \end{cases}$$

Proposição 3.23. *Sejam I uma neutriz idempotente e n um número natural standard. Então, $I^n = I$.*

Demonstração. Sejam I um neutriz idempotente e n um número natural standard. Por Definição 3.22, $I^1 = I$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e n standard, suponha-se que $I^{n-1} = I$. Então, pelas Definições 3.20 e 3.22, tem-se

$$I^n = I^{n-1} \cdot I = I \cdot I = I. \qquad \square$$

Teorema 3.24 (Ver [8])**.** *Seja $N \in \mathcal{N}$, $N \neq \{0\}$. Então, existem um número real $p \neq 0$, e um, e um só, neutriz idempotente I tais que $N = pI$.*

Definição 3.25. *Sejam A uma neutriz e m um número natural standard. Então*

$$A^{\frac{1}{m}} = \{x \in \mathbb{R} : x^m \in A\}.$$

Proposição 3.26. *Sejam A uma neutriz e m um número natural standard. Então o conjunto $A^{\frac{1}{m}}$ é um neutriz.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2, $A^{\frac{1}{m}}$ é uma neutriz, pois:

(1) É convexo, uma vez que, para quaisquer números reais $x, y \in A^{\frac{1}{m}}$, $x < y$ e para todo o z tal que $x < z < y$, tem-se z^m entre x^m e y^m, logo, como A é convexo, $z^m \in A$ e, por conseguinte, $z \in A^{\frac{1}{m}}$.

(2) $2A^{\frac{1}{m}} = \left\{2x : x \in A^{\frac{1}{m}}\right\} \subseteq A^{\frac{1}{m}}$, uma vez que, para todo $x \in A^{\frac{1}{m}}$, como 2^m é limitado e $(2x)^m = 2^m x^m \in A$, então $2x \in A^{\frac{1}{m}}$. Também, $A^{\frac{1}{m}} \subseteq 2A^{\frac{1}{m}}$, uma vez que para todo $x \in A^{\frac{1}{m}}$, tem-se $x = 2\left(\frac{1}{2}x\right)$ e, como $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ é limitado, então $\left(\frac{1}{2}x\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^m x^m \in A$, logo $x \in 2A^{\frac{1}{m}}$. Assim, $2A^{\frac{1}{m}} = A^{\frac{1}{m}}$. Segue da Definição 3.25 que $-A^{\frac{1}{m}} = A^{\frac{1}{m}}$. □

3.2 Relação de ordem em $\mathbb{E}$

Proposição 3.27 (Ver [6])**.** *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$. Então,*

$$\alpha \cap \beta = \emptyset \vee \alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha.$$

Definição 3.28 (Ver [8])**.** *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$. Então:*

(1) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \forall x \in \alpha \forall y \in \beta \, (x < y)$;

(2) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall x \in \alpha \exists y \in \beta \, (x \leq y)$;

(3) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \forall x \in \alpha \forall y \in \beta \, (x > y)$;

(4) $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \forall x \in \alpha \exists y \in \beta \, (x \geq y)$.

Nota-se que

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta > \alpha.$$

No entanto, $\alpha \leq \beta$ e $\beta \geq \alpha$ não são necessariamente equivalentes. Por exemplo, $1 \leq 1 + \oslash$ é uma proposição verdadeira, enquanto que $1 + \oslash \geq 1$ é uma proposição falsa.

Em geral, se $\alpha \subset \beta$, então $\alpha \leq \beta$ e $\alpha \geq \beta$ são ambas verdadeiras, mas $\beta \leq \alpha \wedge \beta \geq \alpha$ é falsa.

Proposição 3.29 (Ver [6])**.** *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$. Então:*

(1) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \wedge \alpha \cap \beta = \emptyset$;

(2) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \geq \beta \wedge \alpha \cap \beta = \emptyset$;

(3) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha \subseteq \beta$;

(4) $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta \vee \alpha \subseteq \beta$.

Teorema 3.30 (Ver [6])**.** *A relação de ordem $\leq$ é uma relação de ordem total, e é compatível com a adição e multiplicação, no seguinte sentido:*

(1) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E} \, (\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma)$;

(2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E}\, (\mathrm{N}(\alpha) \leq \alpha \wedge \mathrm{N}(\beta) \leq \beta \Rightarrow \mathrm{N}(\alpha\beta) \leq \alpha\beta)$;

(3) $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E})\, (\mathrm{N}(\beta) \leq \beta \leq \alpha \wedge \mathrm{N}(\gamma) \leq \gamma \Rightarrow \beta\gamma \leq \alpha\gamma)$;

(4) Sempre que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E}$, *se* $\mathrm{N}(\alpha) < \alpha$ *e* $\beta \leq \gamma$, *então* $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$;

(5) Sempre que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E}$, *se* $\mathrm{N}(\beta) \leq \beta \leq \gamma$, *então* $\mathrm{N}(\alpha)\, \beta \leq \mathrm{N}(\alpha)\, \gamma$.

3.3 Valor absoluto em $\mathbb{E}$

Definição 3.31. *Seja* $\alpha = a + A \in \mathbb{E}$. *O* valor absoluto *de* α *é definido por*

$$|\alpha| = |a| + A.$$

Por consequência,

$$|A| = |0 + A| = |0| + A = A,$$

embora A contenha números negativos.

Proposição 3.32 (Ver [6]). *Se* $\alpha = a + A \in \mathbb{E} \setminus \mathcal{N}$, *então* $|\alpha| = \{|x| : x \in \alpha\}$.

Corolário 3.33 (Ver [6]). *Seja* $\alpha = a + A \in \mathbb{E} \setminus \mathcal{N}$. *Então, a definição do valor absoluto de* α *não depende da escolha do seu representante.*

3.4 Distributividade em $\mathbb{E}$

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{E}$ não se verifica em geral, no entanto, ela verifica-se em alguns casos particulares.

Uma vez que os números externos são intervalos de números reais, então há *sub-distributividade* da multiplicação em relação à adição nesse conjunto, ou seja, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E}$ tem-se

$$\alpha\, (\beta + \gamma) \subseteq \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Por exemplo,

$$(1 - 1)\, \pounds = \{0\} \subset \pounds - \pounds = \pounds.$$

O teorema que se segue mostra que para haver a igualdade entre as expressões $\alpha\beta + \alpha\gamma$ e $\alpha\,(\beta + \gamma)$ é necessário adicionar duas magnitudes ao segundo membro.

Teorema 3.34 (Ver [6]). *Sejam* $\alpha = a + A, \beta, \gamma \in \mathbb{E}$. *Então,*

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha\,(\beta + \gamma) + A\beta + A\gamma.$$

De seguida, apresenta-se progressivamente alguns resultados relativos ao estudo da distributividade em $\mathbb{E}$, que sustentam os estudos realizados mais adiante. Começa-se com alguns casos especiais, e termina-se com a condição suficiente e necessária para a distributividade.

A proposição que se segue apresenta um caso elementar onde a distributividade se verifica.

Proposição 3.35 (Ver [6]). *Sejam* $\alpha = a + A, \beta = B \in \mathbb{E}$. *Então,*

$$\alpha\beta = aB + AB.$$

Os conceitos de *incerteza relativa* e de *oposto*, em relação a uma neutriz, definidos a seguir, são muito importantes na caracterização da distributividade.

Definição 3.36 (Ver [6]). *Seja $\alpha = a + A \in \mathbb{E}$. A* incerteza relativa *de α é*

$$\mathcal{R}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{A}{a}, & \text{se } \alpha \text{ é não-neutricial} \\ \mathbb{R}, & \text{se } \alpha \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Definição 3.37 (Ver [6]). *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$. Diz-se que α é* mais preciso que *β se $\mathcal{R}(\alpha) \subseteq \mathcal{R}(\beta)$. Se $\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}(\beta)$ diz-se que α é* tão preciso quanto *β. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ diz-se que α é* preciso.

Nota-se que se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $\mathcal{R}(\alpha) = \{0\}$, assim números reais não nulos são mais precisos do que quaisquer outros números externos.

Definição 3.38 (Ver [6]). *Seja $A \in \mathcal{N}$, e sejam $\beta, \gamma \in \mathbb{E}$. Então β e γ dizem-se* opostos *em relação a A se $(\beta + \gamma) A \subset \max(|\beta|, |\gamma|) A$.*

Nota 3.39. *(Ver [6]) Em relação à Definição 3.38, as observações que se seguem são muito úteis:*

(1) *Se a e b são números reais opostos (simétricos), ou seja, se $a = -b$, então são opostos em relação a qualquer neutriz $A \neq \{0\}$.*

(2) *Se dois números externos são opostos em relação a uma neutriz A, então nenhum deles pode ser neutriz. Também, dois números externos com o mesmo sinal não são opostos em relação a qualquer neutriz.*

(3) *Se dois números externos, β e γ, são opostos em relação a A, então $\dfrac{\beta}{\gamma} \subseteq -1 + \oslash$ e $\beta A = \gamma A$.*

A seguinte proposição indica uma forma de distributividade que se verifica quando se multiplica por uma neutriz.

Proposição 3.40. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e seja $A \in \mathcal{N}$. Então,*

$$(ac - bd) A + (ad + bc) A = acA - bdA + adA + bcA. \tag{3.1}$$

Demonstração. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e seja $A \in \mathcal{N}$.

Se $a = 0 \lor b = 0 \lor c = 0 \lor d = 0$, então é evidente que (3.1) é verdadeira.

Então, suponha-se que $a \neq 0 \land b \neq 0 \land c \neq 0 \land d \neq 0$.

Se $(ac - bd) A = acA - bdA$ e $(ad + bc) A = adA + bcA$, então (3.1) é verdadeira.

Assim, suponha-se que

$$(ac - bd) A \subset acA - bdA \text{ ou } (ad + bc) A \subset adA + bcA.$$

Se $(ac - bd) A \subset acA - bdA$, então, $(ac - bd) A \subset \max(|ac|, |bd|) A$, logo, ac e $-bd$ são opostos em relação a A e, assim, pela Nota 3.39, existem $\epsilon, \epsilon' \in \oslash$ tais que

$$\frac{ac}{bd} = 1 - \epsilon \tag{3.2}$$

e

$$\frac{bd}{ac} = 1 - \epsilon'. \tag{3.3}$$

Seja $m = \max\left(|ad|, |bc|\right)$.

Se $m = |bc|$, então, a partir da fórmula (3.2), tem-se $a = (1-\epsilon)\,\dfrac{bd}{c}$. Logo,

$$ad + bc = (1-\epsilon)\,\frac{bd^2}{c} + bc = bc\left(1 + (1-\epsilon)\,\frac{d^2}{c^2}\right).$$

Assim, $|ad + bc| > |bc|$.

Também, $|ad + bc| \leq 2|bc|$, pois $m = |bc| = \max\left(|ad|, |bc|\right)$. Logo,

$$bcA \subseteq (ad + bc)\,A \subseteq 2bcA,$$

ou seja,

$$(ad + bc)\,A = bcA = adA + bcA. \tag{3.4}$$

Se $m = |ad|$, então, a partir da fórmula (3.2), tem-se $c = (1-\epsilon)\,\dfrac{bd}{a}$. Logo,

$$ad + bc = ad + (1-\epsilon)\,\frac{b^2 d}{a} = ad\left(1 + (1-\epsilon)\,\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Assim $|ad + bc| > |ad|$. Também, $|ad + bc| \leq 2|ad|$, pois $m = |ad| = \max\left(|ad|, |bc|\right)$. Logo,

$$adA \subseteq (ad + bc)\,A \subseteq 2adA,$$

ou seja,

$$(ad + bc)\,A = adA = adA + bcA. \tag{3.5}$$

A partir da fórmula (3.2), tem-se $ac = (1-\epsilon)\,bd$, então

$$acA = (1-\epsilon)\,bdA = bdA,$$

pois $1 - \epsilon \in @$, logo

$$(ac - bd)\,A \subset acA - bdA = acA = bdA. \tag{3.6}$$

Também, a partir da fórmula (3.3), tem-se $b = \dfrac{ac}{d}\left(1 - \epsilon'\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} ad + bc &= ad + \frac{ac^2}{d}\left(1-\epsilon'\right) = ac\left(\frac{d}{c} + \frac{c}{d}\left(1-\epsilon'\right)\right) \\ &= ac\left(\frac{d^2 + c^2\left(1-\epsilon'\right)}{cd}\right). \end{aligned}$$

Assim, como $\dfrac{d^2 + c^2\left(1-\epsilon'\right)}{cd} \sim \dfrac{d^2 + c^2}{cd}$ e $\left|\dfrac{c^2 + d^2}{cd}\right| > 1$, então, aplicando a fórmula (3.6), tem-se

$$\begin{aligned} (ad + bc)\,A &= ac\left(\frac{d^2 + c^2\left(1-\epsilon'\right)}{cd}\right)A = ac\left(\frac{c^2 + d^2}{cd}\right)A \\ &\supseteq acA = bdA = acA - bdA \supset (ac - bd)\,A. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Então, se $(ac - bd)\,A \subset acA - bdA$, aplicando as fórmulas (3.7), (3.4) e (3.5), tem-se

$$\begin{aligned}(ac - bd)\,A + (ad + bc)\,A &= (ad + bc)\,A \\ &= (ad + bc)\,A + acA - bdA \\ &= acA - bdA + adA + bcA.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Suponha-se, agora, $(ad + bc)\,A \subset adA + bcA$. Então $(ad + bc)\,A \subset \max(|ad|, |bc|)\,A$, ou seja, ad e bc são opostos em relação a A. Então, existem $\delta, \delta' \in \oslash$ tais que

$$\frac{ad}{bc} = -1 + \delta \tag{3.9}$$

e

$$\frac{bc}{ad} = -1 + \delta' \tag{3.10}$$

Seja $m' = \max(|ac|, |bd|)$.

Se $m' = |bd|$, então, aplicando a fórmula (3.9), tem-se $a = (-1 + \delta) \cdot \dfrac{bc}{d}$, logo

$$ac - bd = (-1 + \delta) \cdot \frac{bc^2}{b} - bd = -bd\left(1 + (1 - \delta)\,\frac{c^2}{d^2}\right).$$

Assim, $|ac - bd| > |bd|$.

Também, $|ac - bd| \leq 2|bd|$, pois $m' = |bd| = \max(|ac|, |bd|)$. Logo,

$$bdA \subseteq (ac - bd)\,A \subseteq 2bdA,$$

ou seja,

$$(ac - bd)\,A = bdA = acA - bdA. \tag{3.11}$$

Se $m' = |ac|$, então, aplicando a fórmula (3.9), tem-se $d = (-1 + \delta) \cdot \dfrac{bc}{a}$, logo

$$ac - bd = ac - (-1 + \delta) \cdot \frac{b^2c}{a} = ac\left(1 + (1 - \delta)\,\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Assim, $|ac - bd| > |ac|$.

Também, $|ac - bd| \leq 2|ac|$, pois $|ac| = \max(|ac|, |bd|)$. Logo,

$$acA \subseteq (ac - bd)\,A \subseteq 2acA,$$

ou seja,

$$(ac - bd)\,A = acA = acA - bdA. \tag{3.12}$$

Como $ad = (-1 + \delta)\,bc$ e $-1 + \delta \in @$, então

$$adA = (-1 + \delta)\,bc = bc,$$

logo

$$(ad + bc)\,A \subset adA + bcA = adA = bcA. \tag{3.13}$$

Também, pela fórmula (3.10), $\dfrac{bc}{ad}=-1+\delta'$, equivalente a, $b=(-1+\delta')\dfrac{ad}{c}$. Logo,

$$\begin{aligned} ac-bd &= ac-(-1+\delta')\frac{ad^2}{c}=ad\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}(1-\delta')\right)\\ &= ad\left(\frac{c^2+d^2(1-\delta')}{cd}\right)\end{aligned}$$

Como $\dfrac{d^2+c^2(1-\delta')}{cd}\sim\dfrac{d^2+c^2}{cd}$ e $\left|\dfrac{c^2+d^2}{cd}\right|>1$, então, aplicando a fórmula (3.13), tem-se

$$\begin{aligned}(ac-bd)\,A &= ad\left(\frac{d^2+c^2(1-\delta')}{cd}\right)A=ad\left(\frac{d^2+c^2}{cd}\right)A\\ &\supseteq adA=bcA=adA+bcA\supset(ad+bc)\,A.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Então, se $(ad+bc)\,A\subset adA+bcA$, aplicando as fórmulas (3.14), (3.11) e (3.12), tem-se:

$$\begin{aligned}(ac-bd)\,A+(ad+bc)\,A &= (ac-bd)\,A\\ &= (ac-bd)\,A+adA+bcA\\ &= acA-bdA+adA+bcA.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Assim, se $(ac-bd)\,A\subset acA+bdA$ ou $(ad+bc)\,A\subset adA+bcA$, aplicando as fórmulas (3.8) e (3.15), tem-se (3.1) é verdadeira. □

O teorema, que se segue, estabelece o critério de distributividade para casos em que pelo menos um dos operandos seja uma neutriz.

Teorema 3.41 (Ver [6]). *Sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{E}$.*

(1) Se $\alpha\in\mathcal{N}$ e $\beta,\gamma\notin\mathcal{N}$, então $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ se, e somente se, β e γ não são opostos em relação a α.

(2) Se $\beta\in\mathcal{N}$ ou $\gamma\in\mathcal{N}$, então $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

Outro caso muito importante da distributividade é aquele em que β e γ têm o mesmo sinal.

Teorema 3.42. *Sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{E}$. Se β e γ têm o mesmo sinal, então $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.*

O Teorema 3.43, que se segue, estabelece os critérios de distributividade para casos em que α, β e γ sejam não-neutriciais.

Teorema 3.43 (Ver [6]). *Sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{E}\setminus\mathcal{N}$.*

(1) Se $\beta+\gamma\in\mathcal{N}$, então $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ se, e somente se,

$$\mathcal{R}(\alpha)\leq\max(\mathcal{R}(\beta),\mathcal{R}(\gamma)).$$

(2) Se $\beta+\gamma\notin\mathcal{N}$, então $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ se, e somente se,

$$\mathcal{R}(\alpha)\leq\max(\mathcal{R}(\beta),\mathcal{R}(\gamma))\vee(\beta+\gamma)\,A=A\max(|\beta|,|\gamma|).$$

Por último, apresenta-se o Teorema 3.44 que faz a caracterização geral da distributividade no conjunto dos números externos, $\mathbb{E}$.

Teorema 3.44 (Ver [6])**.** *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E}$. Então $\alpha\left(\beta+\gamma\right)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ se, e somente,*

(1) α é mais preciso do que β ou do que γ, ou

(2) β e γ não são opostos em relação a $\mathrm{N}\left(\alpha\right)$.

4

Números externos complexos, o sólido não-ordenado $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$

Neste capítulo introduz-se a estrutura algébrica dos números externos complexos, como definidos na definição que se segue.

Definição 4.1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{N}$ *e* $i \in \mathbb{C} \wedge i^2 = -1$. *Um* número externo complexo *é definido por*

$$\alpha = a + ib + A + iA.$$

O conjunto dos números externos complexos representa-se por $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$, *ou seja,*

$$\mathbb{E} + i\mathbb{E} = \{a + ib + A + iA : a, b \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{N}\}.$$

O conjunto

$$\mathcal{N} + i\mathcal{N} = \{A + iA : A \in \mathcal{N}\} \subset \mathbb{E} + i\mathbb{E}$$

chama-se conjunto das neutrizes complexas quadradas.

Em analogia às neutrizes reais, pode-se definir uma neutriz complexo como um subgrupo convexo de $\mathbb{C}$. Segundo [16], estes têm uma decomposição como soma de duas neutrizes reais

A e B em direções ortogonais. Ora, pretende-se obter uma estrutura que sirva de base à resolução de equações polinomiais no conjunto dos números externos (reais ou complexos). Tendo em conta este objetivo, basta o estudo das propriedades aditivas e multiplicativas em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, em que as neutrizes são quadradas, ou seja, com a decomposição pelo eixo real e imaginário com neutrizes iguais. Observa-se que com o alargamento do estudo às neutrizes complexas gerais, entra-se em complicações desnecessárias, tendo em conta o objetivo preconizado.

Assim, define-se uma soma e uma multiplicação em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, de modo que a estrutura $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$ obedeça todas as propriedades de um sólido, excetuando aquelas que se relacionam com ordem.

Os conteúdos apresentados aqui estão organizados por secções:

Na Secção 4.1 apresenta-se a estrutura dos números externos complexos e a sua representação na forma polar. Define-se a igualdade, a soma e a multiplicação em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ e apresenta-se algumas propriedades relacionadas com estas operações. São tratados os conceitos de valor absoluto e conjugado de um número externo complexo, bem como algumas das suas propriedades;

Nas Secções 4.2 e 4.3 mostra-se que as estruturas $((\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N}),\cdot)$ e $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$ são semigrupos comutativos regulares e que esses semigrupos são assembleias. Também, mostra-se algumas propriedades que se verificam nelas;

Na Secção 4.4 faz-se a caracterização da distributividade em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$;

Na Secção 4.5 mostra-se que a estrutura $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$ é um sólido não-ordenado.

4.1 Conceitos e propriedades gerais dos elementos de $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$

Esta secção tem como propósito tratar os conceitos e as propriedades gerais dos números externos complexos. Essas propriedades relacionam-se entre si. Contudo, por questão de metodologia, os conteúdos são apresentados em quatro subsecções.

Na Subsecção 4.1.1 analisa-se a estrutura de um número externo complexo, destacando o seu representante, a sua parte neutricial, real e imaginária.

Na Subsecção 4.1.2 define-se a igualdade, a soma e a multiplicação de números externos complexos, e destaca-se algumas propriedades relacionadas com estes conceitos.

Na Subsecção 4.1.3 define-se o valor absoluto e o conjugado de números externos complexos e apresenta-se algumas propriedades relacionadas com estes conceitos.

Na Subsecção 4.1.4 representa-se um número externo complexo na forma polar.

4.1.1 Estrutura dos números externos complexos

Definição 4.2. *Seja* $\alpha=a+ib+A+iA\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. *Então, um* representante *de* α *é* $a+ib$ *e a* parte neutricial *de* α *é* $\mathrm{N}(\alpha)=A+iA$. *Também,* $\mathrm{Re}(\alpha)=a+A$ *diz-se* parte real *de* α *e* $\mathrm{Im}(\alpha)=b+A$ *diz-se* parte imaginária *de* α.

Como $\{0\}$ pertence a $\mathcal{N}$, então o número externo $\{0\}+i\{0\}\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$. À semelhança do que se fez em $\mathbb{E}$, tem-se

$$0+i0\equiv\{0\}+i\{0\}. \tag{4.1}$$

Deste modo, qualquer número complexo $a+ib$ corresponde ao número externo complexo

$a + ib + \{0\} + i\{0\}$, ou seja,

$$a + ib \equiv a + ib + \{0\} + i\{0\}. \tag{4.2}$$

Proposição 4.3. *Seja $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então, $\alpha = \mathrm{N}(\alpha)$ se, e somente se, $\alpha \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$.*

Demonstração. Seja $\alpha = a + ib + A + iA \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Se $\alpha = \mathrm{N}(\alpha)$, então, pela Definição 4.2, $\alpha = A + iA \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$.

Por outro lado, se $\alpha \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, então $\alpha = B + iB$, para algum $B \in \mathcal{N}$. Assim, pela Definição 4.2, $\mathrm{N}(\alpha) = B + iB = \alpha$.

Por conseguinte, $\alpha = \mathrm{N}(\alpha)$ se, e somente se, $\alpha \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. □

Proposição 4.4. *Sejam uma neutriz A e $a + ib \in \mathbb{C}$. Então, $a + ib \notin A + iA$ se, e somente se, $|a + ib| \notin A + iA$.*

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{N}$ e $a + ib \in \mathbb{C}$. Pelo Teorema 3.24, existem um número real $p \neq 0$ e um neutriz idempotente $I \in \mathcal{N}$, tais que $A = pI$.

Nota-se que $a + ib \notin A + iA$ se, e só se, $a \notin A \vee b \notin A$, ou equivalentemente, se, e só se, $m = \max(|a|, |b|) \notin A$. Sem perda de generalidade, suponha-se que $m = |a|$. Logo, $0 \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 1$ e, por conseguinte, $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \in @$. Então,

(1) Se $|a + ib| \notin A + iA$, então $\sqrt{a^2 + b^2} \notin A = pI$, logo $a^2 + b^2 \notin p^2 I$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 \notin p^2 I &\Rightarrow \frac{a^2}{p^2}\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \notin I \Rightarrow \frac{a^2}{p^2} \notin I \\ &\Rightarrow \frac{a}{p} \notin I \Rightarrow a \notin pI \Rightarrow a + ib \notin A + iA. \end{aligned}$$

(2) Se $a + ib \notin A + iA$, então $a \notin A \vee b \notin A$, logo $m = \max(|a|, |b|) \notin A$. Como $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} > m$, então $|a + ib| \notin A$ e, por conseguinte, $|a + ib| \notin A + iA$.

Por *(1)* e *(2)*, tem-se $a + ib \notin A + iA$ se, e somente se, $|a + ib| \notin A + iA$. □

Proposição 4.5. *Seja $\alpha = a + ib + A + iA \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então, qualquer elemento $x + iy \in \alpha$ pode ser seu representante, ou seja, $\alpha = x + iy + A + iA$*

Demonstração. Seja $\alpha = a + ib + A + iA \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Seja $x + iy$ um elemento arbitrário de α. Então,

$$x + iy = a + ib + c' + id',$$

com $c', d' \in A$. Assim,

$$x + iy + A + iA = a + ib + c' + id' + A + iA = a + ib + A + iA = \alpha,$$

pois, pela Proposição 3.3, $c' + A = A$ e $d' + A = A$. □

4.1.2 Igualdade, soma e multiplicação de números externos complexos

Igualdade de números externos complexos

Definição 4.6 (Igualdade em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$). *Sejam α e β números externos complexos. Diz-se que $\alpha=\beta$ se $\alpha\subseteq\beta$ e $\beta\subseteq\alpha$.*

Proposição 4.7. *Sejam α e β números externos complexos. Então, $\alpha=\beta$ se, e somente se, $\mathrm{Re}\,(\alpha)=\mathrm{Re}\,(\beta)$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha)=\mathrm{Im}\,(\beta)$.*

Demonstração. Sejam $\alpha=a+A+i\,(b+A)$ e $\beta=c+B+i\,(d+B)$ números externos complexos arbitrários.

(1) Se $\mathrm{Re}\,(\alpha)=\mathrm{Re}\,(\beta)$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha)=\mathrm{Im}\,(\beta)$, então $a+A=c+B$ e $b+A=d+B$, logo $a+A+i\,(b+A)=c+B+i\,(d+B)$, assim $\alpha=\beta$.

(2) Se $\alpha=\beta$, então $\alpha\subseteq\beta$ e $\beta\subseteq\alpha$, ou seja, $a+A+i\,(b+A)\subseteq c+B+i\,(d+B)$ e $c+B+i\,(d+B)\subseteq a+A+i\,(b+A)$. Logo

$$a+A\subseteq c+B\wedge b+A\subseteq d+B$$

e

$$c+B\subseteq a+A\wedge d+B\subseteq b+A,$$

assim $a+A=c+B$ e $b+A=d+B$, o que é equivalente a $\mathrm{Re}\,(\alpha)=\mathrm{Re}\,(\beta)$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha)=\mathrm{Im}\,(\beta)$.

Por *(1)* e *(2)*, tem-se $\alpha=\beta$ se, e somente se, $\mathrm{Re}\,(\alpha)=\mathrm{Re}\,(\beta)$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha)=\mathrm{Im}\,(\beta)$. □

Soma e multiplicação de números externos complexos.

Por abuso de linguagem utiliza-se os mesmos símbolos da soma e da multiplicação para representar essas operações no conjunto $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$.

Definição 4.8 (Soma e multiplicação em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$). *À semelhança do que acontece em $\mathbb{E}$, as operações de* soma *e* multiplicação *em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ são definidas pelas operações de Minkowski. Assim, para quaisquer $\alpha=a+ib+A+iA,\beta=c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se*

(1) $\alpha+\beta=\{(a+ib+(x+iy))+(c+id+(z+iw)):x,y\in A,z,w\in B\}$,

(2) $\alpha\beta=\{(a+ib+(x+iy))\,(c+id+(z+iw)):x,y\in A,z,w\in B\}$.

Antes de apresentar um método que permita a adição de quaisquer dois números externos complexos, considera-se o seguinte lema que retrata dois casos particulares da soma.

Proposição 4.9. *Sejam $a+ib\in\mathbb{C}$ e $A+iA,B+iB\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$. Então,*

(1) Se $a+ib\in A+iA$, então $a+ib+A+iA=A+iA$.

(2) $(A+iA)+(B+iB)=A+B+i\,(A+B)$.

Demonstração. Sejam $a+ib\in\mathbb{C}$ e $A+iA, B+iB\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$.

(1) Se $a+ib\in A+iA$, então $a,b\in A$, logo, como A é grupo, tem-se $-a,-b\in A$ e, por conseguinte, $-a-ib\in A+iA$. Assim, aplicando a Proposição 4.5 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$, tem-se

$$a+ib+A+iA=a+ib+(-a-ib)+A+iA=0+i0+A+iA=A+iA.$$

(2) Aplicando a Definição 4.8 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}(A+iA)+(B+iB)&=\{(x+iy)+(z+iw):x,y\in A,z,w\in B\}\\&=\{x+z+i\,(y+w):x,y\in A,z,w\in B\}\\&=A+B+i\,(A+B)\,.\end{aligned}$$

□

À semelhança do que acontece em $\mathcal{N}$, as neutrizes complexos são ordenadas por inclusão. Assim, há lugar para o seguinte corolário.

Corolário 4.10. *Sejam $\alpha,\beta\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$. Então, $\alpha+\beta=\max(\alpha,\beta)$, o que é equivalente a, $\alpha+\beta=\alpha$ ou $\alpha+\beta=\beta$.*

Demonstração. Sejam $\alpha=A+iA,\beta=B+iB\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$. Então, aplicando a Proposição 4.9, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=(A+iA)+(B+iB)=A+B+i\,(A+B)\\&=\max(A,B)+i\max(A,B)=\max(\alpha,\beta)\,,\end{aligned}$$

equivalentemente a,

$$\alpha+\beta=A+iA=\alpha \text{ ou } \alpha+\beta=B+iB=\beta.$$

□

A proposição, que se segue, fornece um método para adicionar dois números externos complexos. O que se pode depreender dali é que $\mathrm{Re}\,(\alpha+\beta)=\mathrm{Re}\,(\alpha)+\mathrm{Re}\,(\beta)$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha+\beta)=\mathrm{Im}\,(\alpha)+\mathrm{Im}\,(\beta)$.

Proposição 4.11. *Sejam $\alpha=a+ib+A+iA,\beta=c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então, tem-se*

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=(a+ib)+(c+id)+(A+iA)+(B+iB)\\&=(a+ib)+(c+id)+A+B+i\,(A+B)\\&=a+c+i\,(b+d)+A+B+i\,(A+B)\\&=a+c+A+B+i\,(b+d+A+B)\,.\end{aligned}$$

Em particular, se $a+ib\in A+iA$ e $c+id\in B+iB$, então $\alpha+\beta=A+B+i\,(A+B)$.

Demonstração. Sejam $\alpha=a+ib+A+iA,\beta=c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Aplicando a Definição 4.8, a Proposição 4.9 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta &= \{(a+ib+(x+iy))+(c+id+(z+iw)) : x,y\in A, z,w\in B\}\\
&= \{(a+ib)+(c+id)+(x+iy)+(z+iw) : x,y\in A, z,w\in B\}\\
&= (a+ib)+(c+id)+\{(x+iy)+(z+iw) : x,y\in A, z,w\in B\}\\
&= (a+ib)+(c+id)+(A+iA)+(B+iB)\\
&= a+c+i\,(b+d)+A+B+i\,(A+B)\\
&= a+c+A+B+i\,(b+d+A+B)\,.
\end{aligned}$$

Se $a+ib\in A+iA$ e $c+id\in B+iB$, então, aplicando a Proposição 4.9, tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta &= (a+ib+A+iA)+(c+id+B+iB)\\
&= (A+iA)+(B+iB)=A+B+i\,(A+B)\,.
\end{aligned}$$ □

Relativamente à multiplicação, antes de apresentar um método para multiplicar quaisquer dois números externos complexos, apresenta-se, de seguida, uma proposição que aborda alguns casos particulares.

Proposição 4.12. *Sejam* $a+ib\in\mathbb{C}, A+iA, B+iB\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}, c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}.$ *Então, tem-se*

(1) $(a+ib)\,(B+iB)=(B+iB)\,(a+ib).$

(2) $(a+ib)\,(B+iB)=a\,(B+iB)+ib\,(B+iB)=aB+bB+i\,(aB+bB).$

(3) $(a+ib)\,(c+id+B+iB)=(a+ib)\,(c+id)+(a+ib)\,(B+iB).$

(4) $(A+iA)\,(B+iB)=AB+iAB.$

(5) $(A+iA)\,(c+id+B+iB)=(A+iA)\,(c+id)+(A+iA)\,(B+iB).$

Demonstração. Sejam $a+ib\in\mathbb{C}, A+iA, B+iB\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}, c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}.$

(1) Aplicando a Definição 4.8 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{E}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(a+ib)\,(B+iB) &= \{(a+ib)\,(x+iy) : x,y\in B\}\\
&= \{(x+iy)\,(a+ib) : x,y\in B\}=(B+iB)\,(a+ib)\,.
\end{aligned}$$

(2) Como $(a+ib)\,(B+iB)=\{ax-by+i\,(ay+bx) : x,y\in B\}$, então

$$\operatorname{Re}\left((a+ib)\,(B+iB)\right)=\{ax-by : x,y\in B\}=aB+bB$$

e

$$\operatorname{Im}\left((a+ib)\,(B+iB)\right)=\{ay+bx : x,y\in B\}=aB+bB.$$

Também,

$$\begin{aligned}
a\,(B+iB)+ib\,(B+iB) &= \{a\,(x+iy)+ib\,(z+iw) : x,y,z,w\in B\}\\
&= \{ax+iay+ibz-bw : x,y,z,w\in B\}\\
&= \{ax-bw+i\,(ay+bz) : x,y,z,w\in B\}\,.
\end{aligned}$$

Assim

$$\operatorname{Re}\left(a\,(B+iB)+ib\,(B+iB)\right)=\{ax-bw : x,w\in B\}=aB+bB$$

e

$$\operatorname{Im}\left(a\left(B+iB\right)+ib\left(B+iB\right)\right)=\left\{ay+bz:y,z\in B\right\}=aB+bB,$$

logo, pela Proposição 4.7, tem-se

$$\begin{aligned}\left(a+ib\right)\left(B+iB\right)&=\left(B+iB\right)\left(a+ib\right)\\&=a\left(B+iB\right)+ib\left(B+iB\right)=aB+bB+i\left(aB+bB\right).\end{aligned}$$

(3) Aplicando a Definição 4.8 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}\left(a+ib\right)\left(c+id+B+iB\right)&=\left\{\left(a+ib\right)\left(c+id+x+iy\right):x,y\in B\right\}\\&=\left\{\left(a+ib\right)\left(c+id\right)+\left(a+ib\right)\left(x+iy\right):x,y\in B\right\}\\&=\left(a+ib\right)\left(c+id\right)+\left\{\left(a+ib\right)\left(x+iy\right):x,y\in B\right\}\\&=\left(a+ib\right)\left(c+id\right)+\left(a+ib\right)\left(B+iB\right).\end{aligned}$$

(4) Aplicando a Definição 4.8 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}\left(A+iA\right)\left(B+iB\right)&=\left\{\left(x+iy\right)\left(z+iw\right):x,y\in A,z,w\in B\right\}\\&=\left\{xz-yw+i\left(xw+yz\right):x,y\in A,z,w\in B\right\},\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\left(A+iA\right)\left(B+iB\right)\right)&=\left\{xz-yw:x,y\in A,z,w\in B\right\}\\&=\left\{xz:x\in A,z\in B\right\}+\left\{-yw:y\in A,w\in B\right\}\\&=AB+AB=AB\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\operatorname{Im}\left(\left(A+iA\right)\left(B+iB\right)\right)=\left\{xw+yz:x,y\in A,z,w\in B\right\}=AB,$$

logo, aplicando a Proposição 4.7, tem-se $\left(A+iA\right)\left(B+iB\right)=AB+iAB$.

(5) Aplicando a Definição 4.8 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}\left(A+iA\right)\left(c+id+\left(B+iB\right)\right)&=\left\{\left(x+iy\right)\left(c+id+z+iw\right):x,y\in A,z,w\in B\right\}\\&=\{\left(c+z\right)x+\left(-d-w\right)y+\\&\quad+i\left(\left(d+w\right)x+\left(c+z\right)y\right):x,y\in A,z,w\in B\},\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\left(A+iA\right)\left(c+id+\left(B+iB\right)\right)\right)&=\left\{\left(c+z\right)x+\left(-d-w\right)y:x,y\in A,z,w\in B\right\}\\&=\left\{\left(c+z\right)x:x\in A,z\in B\right\}+\\&\quad+\left\{\left(-d-w\right)y:y\in A,w\in B\right\}\\&=\left(c+B\right)A+\left(-d-B\right)A\\&=cA+AB+dA+AB=cA+dA+AB\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\left(A+iA\right)\left(c+id+\left(B+iB\right)\right)\right)&=\left\{\left(d+w\right)x+\left(c+z\right)y:x,y\in A,z,w\in B\right\}\\&=\left(d+B\right)A+\left(c+B\right)A=cA+dB+AB,\end{aligned}$$

logo $\left(A+iA\right)\left(c+id+\left(B+iB\right)\right)=cA+dA+AB+i\left(cA+dA+AB\right)$.

Também, pela aplicação de *(1)*, *(2)*, *(3)* e *(4)*, tem-se

$$\begin{aligned}(A+iA)(c+id)+(A+iA)(B+iB) &= cA+dA+i(cA+dA)+AB+iAB \\ &= cA+dA+AB+i(cA+dA+AB) \\ &= (A+iA)(c+id+B+iB). \qquad \square\end{aligned}$$

A proposição que se segue vai permitir mostrar que $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ é fechado para a multiplicação.

Proposição 4.13. *Sejam* $\alpha=a+ib+A+iA, \beta=c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. *Então, tem-se*

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= ac-bd+i(ad+bc)+aB+bB+cA+dA+AB+i(aB+bB+cA+dA+AB) \\ &= \operatorname{Re}(\alpha)\operatorname{Re}(\beta)-\operatorname{Im}(\alpha)\operatorname{Im}(\beta)+i(\operatorname{Re}(\alpha)\operatorname{Im}(\beta)+\operatorname{Im}(\alpha)\operatorname{Re}(\beta)).\end{aligned}$$

Em particular, se $a+ib\in A+iA$ *e* $c+id\in B+iB$, *então* $\alpha\beta=AB+i(AB)$.

Demonstração. Sejam $\alpha=a+ib+A+iA, \beta=c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$.

Aplicando a Definição 4.8, as propriedades de operações em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{E}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \{(a+ib+(x+iy))(c+id+(z+iw)) : x,y\in A, z,w\in B\} \\ &= \{(a+x+i(b+y))(c+z+i(d+w)) : x,y\in A, z,w\in B\} \\ &= \{(a+x)(c+z)-(b+y)(d+w)+ \\ &\quad +i((a+x)(d+w)+(b+y)(c+z)) : x,y\in A, z,w\in B\},\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\alpha\beta) &= \{(a+x)(c+z)-(b+y)(d+w) : x,y\in A, z,w\in B\} \\ &= (a+A)(c+B)-(b+A)(d+B) \\ &= ac-bd+aB+bB+cA+dA+AB \\ &= \operatorname{Re}(\alpha)\operatorname{Re}(\beta)-\operatorname{Im}(\alpha)\operatorname{Im}(\beta)\end{aligned} \tag{4.3}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\alpha\beta) &= \{(a+x)(d+w)+(b+y)(c+z) : x,y\in A, z,w\in B\} \\ &= (a+A)(d+B)+(b+A)(c+B) \\ &= ad+bc+aB+bB+cA+dA+AB \\ &= \operatorname{Re}(\alpha)\operatorname{Im}(\beta)+\operatorname{Im}(\alpha)\operatorname{Re}(\beta).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Combinando os resultados em (4.3) e (4.4), tem-se

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= ac-bd+i(ad+bc)+aB+bB+cA+dA+AB+i(aB+bB+cA+dA+AB) \\ &= \operatorname{Re}(\alpha)\operatorname{Re}(\beta)-\operatorname{Im}(\alpha)\operatorname{Im}(\beta)+i(\operatorname{Re}(\alpha)\operatorname{Im}(\beta)+\operatorname{Im}(\alpha)\operatorname{Re}(\beta)).\end{aligned}$$

Se $a+ib\in A+iA$ e $c+id\in B+iB$, então aplicando as Proposições 4.9 e 4.12, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a+ib+A+iA)(c+id+B+iB)=(A+iA)(B+iB) \\ &= AB+iAB. \qquad \square\end{aligned}$$

Corolário 4.14. $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ *é fechado para a adição e a multiplicação.*

Demonstração. Pelas Proposições 4.13 e 4.11, se $\alpha,\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, então $\alpha+\beta, \alpha\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. $\square$

Corolário 4.15. *Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Se $\alpha \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$ ou $\beta \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$, então*

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= ac - bd + i\,(ad+bc) + aB + bB + dA + cA + \\ &\quad + i\,(aB + bB + dA + cA)\,.\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Se $\alpha \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$ ou $\beta \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$, então $\max(|a|,|b|) > A$ ou $\max(|c|,|d|) > B$, pois $a \notin A$ ou $b \notin A$ ou $c \notin B$ ou $d \notin B$. Assim,

$$\begin{aligned}AB &\subseteq \max(|a|,|b|)\,A + \max(|c|,|d|)\,B \\ &= aB + bB + cA + dA,\end{aligned}$$

logo

$$aB + bB + dA + cA + AB = aB + bB + dA + cA.$$

Então, pela Proposição (4.13), tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= ac - bd + i\,(ad+bc) + aB + bB + dA + cA + \\ &\quad + i\,(aB + bB + dA + cA)\,.\end{aligned}$$ □

Corolário 4.16. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$ e $z \in \mathbb{C}$. Então,*

(1) $\alpha + \mathrm{N}(\alpha) = \alpha$.

(2) $\mathrm{N}(\alpha+\beta) = \mathrm{N}(\alpha) + \mathrm{N}(\beta)$.

(3) $\mathrm{N}(z\alpha) = z\mathrm{N}(\alpha)$.

Demonstração. Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$ e $z \in \mathbb{C}$.

(1) Aplicando a Proposição 4.11 e as propriedades de operações em $\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha + \mathrm{N}(\alpha) &= a+ib+A+iA+A+iA = a+ib+2A+i\,(2A) \\ &= a+ib+A+iA = \alpha.\end{aligned}$$

(2) Aplicando a Proposição 4.11, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\alpha+\beta) &= \mathrm{N}(a+c+i\,(b+d)+A+B+i\,(A+B)) \\ &= A+B+i\,(A+B) = A+iA+B+iB = \mathrm{N}(\alpha)+\mathrm{N}(\beta)\,.\end{aligned}$$

(3) Aplicando a Proposição 4.12, tem-se

$$\mathrm{N}(z\alpha) = \mathrm{N}(z\,(a+ib) + z\mathrm{N}(\alpha)) = z\mathrm{N}(\alpha)\,.$$ □

Proposição 4.17. *Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então*

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a+ib)\,\beta + (A+iA)\,\beta \\ &= (a+ib)\,(c+id) + (a+ib)\,(B+iB) + (c+id)\,(A+iA) + (A+iA)\,(B+iB)\,.\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Aplicando as

Proposições 4.13 e 4.12 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= ac - bd + i\,(ad+bc) + aB + bB + cA + dA + AB + \\ &\quad + i\,(aB + bB + cA + dA + AB) \\ &= (a+ib)\,(c+id) + aB + bB + i\,(aB+bB) + cA + dA + i\,(cA+dA) + \\ &\quad + AB + i\,(AB) \\ &= (a+ib)\,(c+id) + (a+ib)\,(B+iB) + (c+id)\,(A+iA) + (A+iA)\,(B+iB) \\ &= (a+ib)\,(c+id+A+iA) + (A+iA)\,(c+id+B+iB) \\ &= (a+ib)\,\beta + (A+iA)\,\beta. \qquad \square\end{aligned}$$

Proposição 4.18. *Sejam uma neutriz $M \subseteq \oslash$ e um número natural standard m. Então,*

$$(1+M+iM)^m = 1+M+iM.$$

Demonstração. Sejam uma neutriz $M \subseteq \oslash$ e m um número natural standard. Mostra-se o resultado por Indução Externa sobre m. Tem-se $(1+M+iM)^1 = 1+M+iM$. Suponha-se que $(1+M+iM)^{m-1} = 1+M+iM$. Então, aplicando a Proposição 4.13, tem-se

$$\begin{aligned}(1+M+iM)^m &= (1+M+iM)^{m-1}\,(1+M+iM) \\ &= (1+M+iM)\,(1+M+iM) \\ &= 1+M+iM+M^2+iM^2 \\ &= 1+M+M^2+i\left(M+M^2\right) = 1+M+iM,\end{aligned}$$

pois, como $M \subseteq \oslash$, tem-se e, portanto, $M+M^2 = M$. $\square$

Proposição 4.19. *Sejam $A+iA \in \mathcal{N}+i\mathcal{N}$ e um neutriz $M \subseteq \oslash$. Então,*

$$(A+iA)\,(1+M+iM) = A+iA.$$

Demonstração. Sejam $A+iA \in \mathcal{N}+i\mathcal{N}$ e um neutriz $M \subseteq \oslash$. Então, como $MA \subseteq A$, aplicando as Proposições 4.12 e 4.11, tem-se

$$\begin{aligned}(A+iA)\,(1+M+iM) &= A+iA+(A+iA)\,(M+iM) \\ &= A+iA+AM+i\,(AM) \\ &= A+AM+i\,(A+AM) = A+iA. \qquad \square\end{aligned}$$

Recorda-se que uma função f é de classe S^1, se f, f' são limitadas e S-contínuas para argumentos limitados.

A Proposição que se segue aplica-se na demonstração do Teorema 4.21 e outros resultados mais adiante.

Proposição 4.20. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe S^1, um número limitado $a \in \mathbb{R}$ e uma neutriz $M \subseteq \oslash$. Então,*

(1) Existe um intervalo externo $C \subseteq M$ tal que $f(a+M) = f(a)+C$.

(2) Se $f'(a) \not\simeq 0$, então $f(a+M) = f(a)+M$.

Demonstração. Seja $x \in M$. Então, pelo Teorema de Valor Médio, para algum $0 < \theta < 1$, tem-se
$$f(a+x) = f(a) + xf'(a+\theta x). \tag{4.5}$$

(1) Seja $C = \{xf'(a+\theta x) : x \in M\}$. Como f é de classe S^1, então $C \subseteq \pounds M = M$. Logo
$$f(a+M) = f(a) + C \subseteq f(a) + \pounds M = f(a) + M.$$

(2) Suponha-se que $f'(a) > 0$ e $f'(a) \not\simeq 0$.

Sejam $M^+ = \{x \in M : x \geq 0\}$, $y \in M^+$, $z = \dfrac{2y}{f'(a)}$. Então, $z \in M^+$. Pelo Teorema do Valor Médio (ver [14]), para algum $0 < \epsilon < 1$, tem-se
$$f(a+z) = f(a) + zf'(a+\epsilon z). \tag{4.6}$$

Como f é de classe S^1 e $a \simeq a + \epsilon z$, então, $\dfrac{f'(a+\epsilon z)}{f'(a)} \simeq 1$.

Uma vez que $z = \dfrac{2y}{f'(a)}$, a partir da fórmula (4.6) tem-se
$$f(a+z) = f(a) + \frac{2y}{f'(a)} f'(a+\epsilon z) > f(a) + y.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe um x, $0 \leq x < z$, tal que $f(a+x) = f(a)+y$. Assim, $f(a+M^+) \supseteq f(a)+M^+$. Também, pelo Ponto *(1)*, tem-se $f(a+M^+) \subseteq f(a)+M^+$. Logo,
$$f(a+M^+) = f(a) + M^+. \tag{4.7}$$

Sejam $M^- = \{x \in M : x \leq 0\}$, $y \in M^-$, $z = \dfrac{2y}{f'(a)}$. Então, $z \in M^-$. A partir da fórmula (4.6), tem-se
$$f(a+z) = f(a) + \frac{2y}{f'(a)} f'(a+\epsilon z) < f(a) + y.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe um x, $z < x \leq 0$, tal que $f(a+x) = f(a)+y$. Assim, $f(a+M^-) \supseteq f(a)+M^-$. Também, pelo Ponto *(1)*, tem-se $f(a+M^-) \subseteq f(a)+M^-$. Logo,
$$f(a+M^-) = f(a) + M^-. \tag{4.8}$$

Assim, por (4.7) e (4.8), tem-se
$$f(a+M) = f\left(\left(a+M^+\right) \cup (a+M^-)\right) = \left(f(a)+M^+\right) \cup (f(a)+M^-) = f(a) + M.$$

Suponha-se, agora, que $f'(a) < 0$ e $f'(a) \not\simeq 0$.

Sejam $y \in M^+$, $z = -\dfrac{2y}{f'(a)}$. Então, $z \in M^+$. Logo, a partir da fórmula (4.6), tem-se
$$f(a+z) = f(a) - \frac{2y}{f'(a)} f'(a+\epsilon z) < f(a) - y.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe um x, $0 \leq x < z$, tal que $f(a+x) = f(a)-y$.

Assim,

$$f(a+M^{+}) \supseteq f(a)+M^{-}. \tag{4.9}$$

Sejam $y \in M^{-}$, $z=-\dfrac{2y}{f'(a)}$. Então, $z \in M^{-}$. A partir da fórmula (4.6), tem-se

$$f(a+z)=f(a)-\frac{2y}{f'(a)}f'(a+\epsilon z)>f(a)-y.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe um x, $z<x\leq 0$, tal que $f(a+x)=f(a)-y$. Assim,

$$f(a+M^{-}) \supseteq f(a)+M^{-}. \tag{4.10}$$

Assim, por (4.9) e (4.10), tem-se

$$f\left(a+M\right)=f\left(\left(a+M^{+}\right)\cup\left(a+M^{-}\right)\right)=\left(f\left(a\right)+M^{-}\right)\cup\left(f\left(a\right)+M^{+}\right)=f\left(a\right)+M. \ \square$$

Teorema 4.21. *Seja uma neutriz $M \subseteq \oslash$. Então,*

$$\frac{1}{1+M+iM}=1+M+iM.$$

Demonstração. Aplicando as operações de Minkowski, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+M+iM} &= \left\{\frac{1}{1+a+ib}:a,b\in M\right\}\\ &= \left\{\frac{1+a}{\left(1+a\right)^{2}+b^{2}}+i\left(-\frac{b}{\left(1+a\right)^{2}+b^{2}}\right):a,b\in M\right\}\\ &= \left\{\frac{1+a}{\left(1+a\right)^{2}+b^{2}}:a,b\in M\right\}+i\left\{-\frac{b}{\left(1+a\right)^{2}+b^{2}}:a,b\in M\right\}\end{aligned} \tag{4.11}$$

Relativamente à parte real, sejam $a,b\in M$. Considera-se $f_b(a)\equiv f(a,b)=\dfrac{1+a}{(1+a)^2+b}$. Então, $f_b'(a)=\dfrac{\partial f}{\partial a}\left(a,b\right)=\dfrac{-\left(1+a\right)^{2}+b}{\left(\left(1+a\right)^{2}+b\right)^{2}}$, assim $\dfrac{\partial f}{\partial a}(0,b)\simeq -1$. Pela Proposição 4.20, Ponto *(2)*, tem-se

$$f_b(0+M)=f_b(0)+M \Leftrightarrow f(M,b)=f(0,b)+M, \tag{4.12}$$

para todo $b\in M$. Seja $g(b)\equiv f(0,b)=\dfrac{1}{1+b}$. Então, $g'(b)=\dfrac{-1}{\left(1+b\right)^{2}}$, assim $g'(0)=-1$. Logo, pela Proposição 4.20, Ponto *(2)*, tem-se

$$g(0+M)=g(0)+M \Leftrightarrow f(0,M)=f(0,0)+M \Leftrightarrow f(0,M)=1+M. \tag{4.13}$$

Combinando os resultados em (4.12) e (4.13), tem-se $f(M,M)=1+M$.

Relativamente à parte imaginária, sejam $a,b\in M$ e $h_a(b)\equiv h(a,b)=-\dfrac{b}{\left(1+a\right)^{2}+b^{2}}$. Então, $h_a'(b)=\dfrac{\partial h}{\partial b}\left(a,b\right)=\dfrac{-\left(1+a\right)^{2}+b^{2}}{\left(\left(1+a\right)^{2}+b^{2}\right)^{2}}$, assim $\dfrac{\partial h}{\partial b}(a,0)\simeq -1$. Pela Proposição 4.20, Ponto

(2), tem-se

$$h_a(0+M)=h_a(0)+M \Leftrightarrow h(a,M)=h(a,0)+M \Leftrightarrow h(a,M)=M, \tag{4.14}$$

para todo $a \in M$. Assim, $h(M,M)=M$.

Assim, a partir da fórmula (4.11), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+M+iM} &= \left\{\frac{1+a}{(1+a)^2+b^2} : a,b \in M\right\} + i\left\{-\frac{b}{(1+a)^2+b^2} : a,b \in M\right\} \\ &= 1+M+iM.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.22. *Seja* $\alpha = a+ib+A+iA \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$*. Então,*

$$\frac{A+iA}{a+ib} = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot(aA+bA+i\,(aA+bA)) \subseteq \oslash + i\oslash\,.$$

Demonstração. Sejam $\alpha = a+ib+A+iA \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$ e $m = \max(|a|,|b|)$.

Como $\alpha \notin \mathcal{N}+i\mathcal{N}$, então $a+ib \notin A+iA$, logo $a \notin A$ ou $b \notin A$. Assim, $m \notin A$. Aplicando a Proposição 4.12, as propriedades de operações em $\mathbb{C}$ e o Teorema 3.16, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{A+iA}{a+ib} &= \frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)(A+iA) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\cdot(aA+bA+i\,(aA+bA)). \\ &= \frac{m}{a^2+b^2}\cdot(A+iA) \subseteq \frac{m}{m^2}(A+iA) = \frac{A}{m}+i\frac{A}{m} \subseteq \oslash + i\oslash\,.\end{aligned}$$

□

Corolário 4.23. *Seja* $\alpha = a+ib+A+iA \notin (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$*. Então,*

(1) $\dfrac{1}{1+\dfrac{A+iA}{a+ib}} = 1+\dfrac{A+iA}{a+ib}.$

(2) $\dfrac{A+iA}{\alpha} = \dfrac{A+iA}{a+ib} = \dfrac{A+iA}{a-ib}.$

Demonstração. Seja $\alpha = a+ib+A+iA \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$.

(1) Pelo Teorema 4.22, tem-se $\dfrac{A+iA}{a+ib} \subseteq \oslash + i\oslash$, logo, aplicando o Teorema 4.21, tem-se

$$\frac{1}{1+\dfrac{A+iA}{a+ib}} = 1+\frac{A+iA}{a+ib}.$$

(2) Aplicando as propriedades de operações em $\mathbb{C}$, o resultado em *(1)*, o Teorema 4.22 e a

Proposição 4.19, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{A+iA}{\alpha} &= \frac{A+iA}{a+ib+A+iA} = \frac{1}{a+ib}\cdot\frac{A+iA}{1+\frac{A+iA}{a+ib}} \\ &= \frac{1}{a+ib}\left(A+iA\right)\left(1+\frac{A+iA}{a+ib}\right) \\ &= \frac{1}{a+ib}\left(A+iA\right) = \frac{A+iA}{a+ib}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

A partir da fórmula (4.15), aplicando o Teorema 4.22, a Proposição 4.12 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{A+iA}{\alpha} &= \frac{A+iA}{a+ib} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(aA+bA+i\left(aA+bA\right)\right) \\ &= \frac{a+ib}{a^2+b^2}\left(A+iA\right) = \frac{1}{a-ib}\left(A+iA\right) = \frac{A+iA}{a-ib}.\end{aligned}$$

□

4.1.3 Valor absoluto e conjugado de números externos complexos

O valor absoluto e o conjugado dos números externos complexos têm propriedades semelhantes às que se verificam em $\mathbb{C}$. Ao longo desta subsecção são apresentados os resultados dos estudos realizados sobre estes dois conceitos. Em primeiro lugar apresenta-se o estudo sobre o valor absoluto e de seguida sobre o conjugado.

Valor absoluto de um número externo complexo

Definição 4.24. *Seja $\alpha = a+A+ib+iA \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$. O* valor absoluto *de α define-se por*

$$|\alpha| = \begin{cases} A & \text{se } \alpha \in \mathcal{N}+i\mathcal{N} \\ \sqrt{(a+A)^2+(b+A)^2} & \text{se } \alpha \notin \mathcal{N}+i\mathcal{N}. \end{cases}$$

Pela proposição que se segue, apresenta-se um método para cálculo do valor absoluto de um número externo complexo.

Proposição 4.25. *Sejam $\alpha = a+ib+A+iA \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$ e $r = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$. Então,*

$$|\alpha| = r + A.$$

Na demonstração desta proposição utiliza-se, para além dos resultados obtidos anteriormente, os resultados expressos nos Lemas 4.26 e 4.27, apresentados abaixo.

Lema 4.26. *Seja uma neutriz $M \subseteq \oslash$. Então,*

$$\sqrt{1+M} = 1+M.$$

Demonstração. Como para todo $\epsilon \in M$, a função $f(x) = \sqrt{1+x}$ é contínua e diferenciável em $[0,\epsilon]$, para $\epsilon > 0$, e em $[\epsilon, 0]$, para $\epsilon < 0$, então, pelo Teorema do Valor Médio, existem $\theta_1 \in]0,\epsilon[$ e $\theta_2 \in]\epsilon, 0[$ tais que

$$\sqrt{1+\epsilon} - 1 = \frac{1}{2}\epsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\theta_1}}$$

e

$$\sqrt{1+\epsilon} - 1 = \frac{1}{2}\epsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\theta_2}}.$$

Então, para $\epsilon > 0$, tem-se

$$\frac{1}{4}\epsilon < \sqrt{1+\epsilon} - 1 < \frac{1}{2}\epsilon \tag{4.16}$$

e para $\epsilon < 0$, tem-se

$$\frac{1}{2}\epsilon < \sqrt{1+\epsilon} - 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon. \tag{4.17}$$

Pela fórmulas (4.16) e (4.17), para todo $\epsilon \in M$ tem-se

$$\frac{1}{4}\epsilon < \sqrt{1+\epsilon} - 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon,$$

logo

$$\frac{1}{4}M \leq \sqrt{1+M} - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}M. \tag{4.18}$$

Como $\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \in @$, então $\frac{1}{4}M = \frac{\sqrt{2}}{2}M = M$, logo, pela fórmula (4.18), tem-se

$$1 + M \leq \sqrt{1+M} \leq 1 + M$$

e, portanto, $\sqrt{1+M} = 1 + M$. □

Lema 4.27. *Sejam $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{N}$, $m = \max(|a|, |b|)$ e $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Então,*

$$mA = rA.$$

Demonstração. Sejam $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $m = \max(|a|, |b|)$, $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ e $A \in \mathcal{N}$. Como $\sqrt{a^2} = |a|$ e $\sqrt{b^2} = |b|$, então $r \geq \max(|a|, |b|) = m$. Também, $r \leq \sqrt{m^2+m^2} = \sqrt{2}m < 2m$. Assim, tem-se

$$m \leq r \leq \sqrt{2}m < 2m. \tag{4.19}$$

Aplicando a fórmula (4.19) tem-se

$$mA \subseteq rA \subseteq 2mA = mA, \tag{4.20}$$

logo

$$mA = rA.$$ □

Apresenta-se agora a demonstração da Proposição 4.25.

Demonstração da Proposição 4.25. Sejam $\alpha = a + ib + A + iA \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$ e $m = \max(|a|, |b|)$.

(1) Se $\alpha \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, então $a, b \in A$. Como A é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, então $m \in A$. Pela fórmula (4.19) tem-se $r < 2m \in A$. Como A é convexo, então $r \in A$. Assim, $|\alpha| = A = r + A$.

(2) Se $\alpha \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, então $a \notin A$ ou $b \notin A$, ou seja, $|a| > A$ ou $|b| > A$, logo $r = \sqrt{a^2+b^2} \geq \max(|a|, |b|) > A$. Assim, $\frac{A}{r} \subseteq \oslash$.

Aplicando a Definição 4.24, os Lemas 4.26 e 4.27 e as propriedades de operações em $\mathbb{E}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
|\alpha| &= \sqrt{(a+A)^2 + (b+A)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + aA + bA + A^2} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2 + mA + A^2} = \sqrt{r^2 + mA} \\
&= \sqrt{r^2\left(1 + \frac{mA}{r^2}\right)} = r\sqrt{1 + \frac{rA}{r^2}} = r\sqrt{1 + \frac{A}{r}} \\
&= r\left(1 + \frac{A}{r}\right) = r + A.
\end{aligned}$$

Por *(1)* e *(2)*, tem-se $|\alpha| = r + A$, para todo $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. □

Corolário 4.28. *Seja $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então, $\alpha \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$ se, e somente se, $|\alpha| \notin \mathcal{N}$, ou seja, α é não-neutricial se, e somente se, $|\alpha|$ é não-neutricial.*

Demonstração. Seja $\alpha = a + A + ib + A \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$.

(1) Se $\alpha \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, então, $a \notin A$ ou $b \notin A$, logo $m = \max(|a|, |b|) \notin A$. Aplicando a Proposição 4.25, tem-se $|\alpha| = r + A \notin \mathcal{N}$, pois $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq m > A$.

(2) Se $\alpha \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, então pela Definição 4.24, tem-se $|\alpha| = A \in \mathcal{N}$.

Por *(1)* e *(2)*, para todo $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$, tem-se $\alpha \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$ se, e somente se, $|\alpha| \notin \mathcal{N}$. □

Proposição 4.29. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então,*

(1) $|\alpha| \geq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))$.

(2) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.

(3) Se $\beta \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, então $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$.

Mostra-se a propriedade *(3)* mais adiante (na página 49) porque na sua demonstração utiliza-se argumentos relacionados com o conjugado.

Demonstração da Proposição 4.29, (1) e (2). Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$.

(1) Se $\alpha \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, então $a, b \in A$ e, por conseguinte, $\mathrm{Re}(\alpha) = a + A = A$. Assim, aplicando a Definição 4.24, tem-se

$$\mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha)) = A = |A|. \tag{4.21}$$

Se $\alpha \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, então $a \notin A$ ou $b \notin A$ e, por conseguinte, $m = \max(|a|, |b|) > A$. Assim, $r = \sqrt{a^2 + b^2} > m > A$, logo, aplicando a Proposição 4.25, tem-se

$$|\alpha| = r + A > A = \mathrm{N}(a + A) = \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha)). \tag{4.22}$$

Assim, pelas fórmulas (4.21) e (4.22), tem-se $|\alpha| \geq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))$, para todo $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$.

(2) Sejam $m=\max(|a|,|b|)$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $n=\max(|c|,|d|)$ e $s=\sqrt{c^2+d^2}$. Então, $aB+bB=mB$ e $cA+dA=nA$ e, pelo Lema 4.27, tem-se $mB=rB$ e $nA=sA$. Assim, aplicando as Proposições 4.12, 4.13 e 4.25 e as propriedades das operações em $\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}|\alpha\beta| &= |(a+ib+A+iA)(c+id+B+iB)|\\ &= |(a+ib)(c+id)+aB+bB+cA+dA+AB+\\ &\quad +i(aB+bB+cA+dA+AB)|\\ &= |(a+ib)(c+id)|+aB+bB+cA+dA+AB\\ &= |a+ib||c+id|+mB+nA+AB\\ &= rs+rB+sA+AB=(r+A)(s+B)=|\alpha||\beta|.\end{aligned}$$ □

Teorema 4.30. *Seja* $\alpha=a+ib+A+iA\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$, *e seja* $r=|a+ib|$. *Então,*

$$\frac{A+iA}{|\alpha|}=\frac{A+iA}{r}\subseteq\oslash+i\oslash.$$

Demonstração. Sejam $\alpha=a+ib+A+iA\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$ e $r=|a+ib|$.

Como $\alpha\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, então, pelo Corolário 4.28, tem-se $r>A$. Assim, aplicando a Proposição 4.25, os Teoremas 3.16 e 3.13, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{A+iA}{|\alpha|} &= \frac{A+iA}{r+A}=\frac{1}{r}\frac{A+iA}{1+\frac{A}{r}}=\frac{1}{r}(A+iA)\left(1+\frac{A}{r}\right)\\ &= \frac{1}{r}\left(A\left(1+\frac{A}{r}\right)+iA\left(1+\frac{A}{r}\right)\right)=\frac{1}{r}(A+iA)\\ &= \frac{A+iA}{r}\subseteq\oslash+i\oslash.\end{aligned}$$ □

Conjugado de um número externo complexo

Definição 4.31. *Seja* $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Conjugado *de* α *é o número externo*

$$\overline{\alpha}=\mathrm{Re}(\alpha)-i(\mathrm{Im}(\alpha)).$$

Pela definição anterior, se $\alpha=a+ib+A+iA\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, então $\overline{\alpha}=a-ib+A+iA$.

Proposição 4.32. *Seja* $\alpha=a+ib+A+iA\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. *Então,*

(1) $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{a+ib}+\dfrac{A+iA}{(a+ib)^2}=\dfrac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}$ *e* $\dfrac{1}{\alpha}\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$.

(2) $\dfrac{\alpha}{\alpha}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}}=1+\dfrac{\mathrm{N}(\overline{\alpha})}{\overline{\alpha}}=1+\dfrac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}$ *e* $\dfrac{\alpha}{\alpha}\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$.

(3) $\alpha\left(1+\dfrac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right)=\alpha+\mathrm{N}(\alpha)=\alpha.$

Demonstração. Seja $\alpha=a+ib+A+iA\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$.

(1) Como $\alpha\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, pelo Teorema 4.22, tem-se $\dfrac{A+iA}{a+ib}\subseteq\oslash+i\oslash$. Também, para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$, tem-se $a^2+b^2\geq ab$, logo $(a^2+b^2)A+abA=(a^2+b^2)A$. Assim,

aplicando as propriedades de operações em $\mathbb{C}$ e em $\mathcal{N}$, o Corolário 4.23 e a Proposição 4.12, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{a+ib+A+iA} = \frac{1}{a+ib}\cdot\frac{1}{1+\frac{A+iA}{a+ib}} = \frac{1}{a+ib}\left(1+\frac{A+iA}{a+ib}\right)\\
&= \frac{1}{a+ib}+\frac{1}{a+ib}\frac{A+iA}{a+ib}\\
&= \frac{1}{a+ib}+\frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)\frac{1}{a^2+b^2}(aA+bA+i(aA+bA))\\
&= \frac{1}{a+ib}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left(\left(a^2+b^2\right)A+abA+i\left(\left(a^2+b^2\right)A+abA\right)\right)\\
&= \frac{1}{a+ib}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left(\left(a^2+b^2\right)A+i\left(a^2+b^2\right)A\right)\\
&= \frac{1}{a+ib}+\frac{1}{a^2+b^2}(A+iA) = \frac{1}{a^2+b^2}(a-ib+A+iA) = \frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

Como $a+ib\notin A+iA$, então $\frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)\notin\frac{1}{a^2+b^2}(A+iA)$, logo $\frac{1}{\alpha}\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$.

(2) Aplicando as propriedades das operações em $\mathbb{C}$, o Corolário 4.23, as Proposições 4.12 e 4.18 e o Teorema 4.22, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha} &= \frac{a+ib+A+iA}{a+ib+A+iA} = \frac{1}{a+ib}\frac{a+ib+A+iA}{1+\frac{A+iA}{a+ib}}\\
&= \frac{1}{a+ib}(a+ib+A+iA)\left(1+\frac{A+iA}{a+ib}\right)\\
&= \left(1+\frac{A+iA}{a+ib}\right)\left(1+\frac{A+iA}{a+ib}\right) = 1+\frac{A+iA}{a+ib}\\
&= 1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N}).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} &= \frac{a-ib+A+iA}{a-ib+A+iA} = \left(1+\frac{A+iA}{a-ib}\right)\left(1+\frac{A+iA}{a-ib}\right)\\
&= \left(1+\frac{A+iA}{a-ib}\right) = 1+\frac{\mathrm{N}(\overline{\alpha})}{\overline{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 4.23, tem-se $\frac{A+iA}{a+ib}=\frac{A+iA}{a-ib}$, logo $1+\frac{\mathrm{N}(\overline{\alpha})}{\overline{\alpha}}=1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}$.

(3) Pelo Teorema 4.22, tem-se $\frac{A+iA}{a+ib}\subseteq\oslash+i\oslash$, logo

$$(A+iA)\frac{A+iA}{a+ib}\subseteq A\oslash+i(A\oslash)\subseteq A+iA.$$

Assim, aplicando a Proposição 4.13, o Corolário 4.23 e o Corolário 4.10, tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha\left(1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right) &= (a+ib+A+iA)\left(1+\frac{A+iA}{a+ib}\right)\\
&= a+ib+A+iA+A+iA+(A+iA)\,\frac{A+iA}{a+ib}\\
&= a+ib+A+iA+A+iA\\
&= \alpha+\mathrm{N}(\alpha)=\alpha.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.33. *Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então,*

(1) $\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$.

(2) Se $\alpha\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, *então* $\overline{\alpha}=\alpha$.

(3) $\mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{N}(\overline{\alpha})$.

(4) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$.

(5) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$.

(6) Se $\beta\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, *então* $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$.

(7) $\alpha=\overline{\alpha}$ *se, e somente se,* $\mathrm{Im}(\alpha)\in\mathcal{N}$, *ou seja, se, e somente se,* α *admite um representante real.*

(8) $\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\overline{\alpha})=\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}\right)$.

(9) $\mathrm{Im}(\alpha)=-\mathrm{Im}(\overline{\alpha})=\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}\right)$.

(10) $\mathrm{Re}(\alpha\overline{\alpha})=|\alpha|^2$.

(11) $|\alpha|=|\overline{\alpha}|$.

Demonstração. Sejam $\alpha=a+ib+A+iA,\beta=c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$.

(1) Aplicando a Definição 4.31, tem-se

$$\begin{aligned}
\overline{(\overline{\alpha})} &= \overline{\overline{(a+ib+A+iA)}}=\overline{(a-ib+A+iA)}\\
&= a+ib+A+iA=\alpha.
\end{aligned}$$

(2) Se $\alpha\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, então, aplicando a Proposição 4.3, tem-se $\alpha=A+iA$. Assim, aplicando a Definição 4.31 e as propriedades das operações em $\mathcal{N}$, tem-se

$$\overline{\alpha}=\overline{A+iA}=A+i\,(-A)=A+iA=\alpha.$$

(3) Aplicando as Definições 4.2 e 4.31, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\alpha) &= \mathrm{N}(a+ib+A+iA)=A+iA\\
&= \mathrm{N}(a-ib+A+iA)=\mathrm{N}(\overline{\alpha}).
\end{aligned}$$

(4) Aplicando a Definição 4.31, a Proposição 4.13, o Corolário 4.16, a propriedade comutativa da adição em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, o Teorema 4.41, e as propriedades das operações em $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta} &= \overline{(a+ib)+(c+id)+\mathrm{N}(\alpha)+\mathrm{N}(\beta)}\\ &= \overline{(a+ib)+(c+id)}+\mathrm{N}(\alpha)+\mathrm{N}(\beta)\\ &= \overline{a+ib}+\overline{c+id}+\mathrm{N}(\alpha)+\mathrm{N}(\beta)\\ &= \overline{a+ib}+\mathrm{N}(\alpha)+\overline{c+id}+\mathrm{N}(\beta)\\ &= \overline{a+ib+\mathrm{N}(\alpha)}+\overline{c+id+\mathrm{N}(\beta)}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}.\end{aligned}$$

(5) Aplicando as Proposições 4.13 e 4.12, o resultado em *(2)* e as propriedades das operações em $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} &= \overline{(a+ib)(c+id)+(a+ib)(B+iB)+(c+id)(A+iA)+(A+iA)(B+iB)}\\ &= \overline{(a+ib)(c+id)}+(a+ib)(B+iB)+(c+id)(A+iA)+(A+iA)(B+iB)\\ &= (a-ib)(c-id)+(a-ib)(B+iB)+(c-id)(A+iA)+(A+iA)(B+iB)\\ &= (a-ib+A+iA)(c-id+B+iB)=\overline{\alpha}\overline{\beta}.\end{aligned}$$

(6) Suponha-se que $\beta\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$. Seja $s=|c+id|=|c-id|$. Então, aplicando a Proposição 4.32, tem-se

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} &= \overline{\alpha\left(\frac{1}{\beta}\right)}=\overline{\alpha}\overline{\left(\frac{1}{\beta}\right)}=\overline{\alpha}\overline{\left(\frac{1}{s^2}\overline{\beta}\right)}=\overline{\alpha}\left(\frac{1}{s^2}\overline{\overline{\beta}}\right)\\ &= \overline{\alpha}\left(\frac{1}{s^2}\overline{\overline{\beta}}\right)=\overline{\alpha}\frac{1}{\overline{\beta}}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

(7) Suponha-se que $\alpha=\overline{\alpha}$. Como $\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\overline{\alpha})$, então, aplicando a Proposição 4.7, tem-se $\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\overline{\alpha})$, o que é equivalente a $b+A=-b+A$. Mas, aplicando as propriedades das operações em $\mathcal{N}$, tem-se

$$b+A=-b+A\Leftrightarrow 2b+A=A\Leftrightarrow\frac{1}{2}(2b+A)=\frac{1}{2}A\Leftrightarrow b+A=A,$$

assim, $\mathrm{Im}(\alpha)=b+A=A\in\mathcal{N}$.

Por outro lado, se $\mathrm{Im}(\alpha)\in\mathcal{N}$, então $b+A\in\mathcal{N}$, logo $b\in A$. Por conseguinte, $\alpha=a+A+iA=\overline{\alpha}$.

(8) Aplicando a Proposição 4.12, as propriedades das operações em $\mathcal{N}$ e a Definição 4.31, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}(2a+A+iA)\right)=\mathrm{Re}(a+A+iA)\\ &= a+A=\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\overline{\alpha}).\end{aligned}$$

(9) Como $\mathrm{Im}(\alpha)=b+A$ e $\mathrm{Im}(\overline{\alpha})=-b+A=-\mathrm{Im}(\alpha)$, então aplicando a Proposição 4.12, Definição 4.31 e as propriedades das operações em $\mathcal{N}$ e $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}(2bi+A+iA)\right)=\mathrm{Re}\left(b-\frac{1}{2}i(A+iA)\right)\\ &= \mathrm{Re}(b+A+iA)=b+A=\mathrm{Im}(\alpha)=-\mathrm{Im}(\overline{\alpha}).\end{aligned}$$

(10) Seja $r=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$. Aplicando a Proposição 4.13, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=a^2+b^2+aA+bA+A^2+i\left(aA+bA+A^2\right)\\&=r^2+aA+bA+A^2+i\left(aA+bA+A^2\right).\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.27, tem-se $aA+bA=\max(|a|,|b|)A=rA$. Assim, aplicando as propriedades das operações em $\mathcal{N}$ e a Proposição 4.25, tem-se

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\alpha\overline{\alpha})&=r^2+aA+bA+A^2=r^2+rA+A^2\\&=(r+A)(r+A)=|\alpha|^2.\end{aligned}$$

(11) Como $|a+ib|=|a-ib|=r$, então aplicando a Proposição 4.25, tem-se

$$\begin{aligned}|\alpha|&=|a+ib+A+iA|=|a+ib|+A\\&=|a-ib|+A=|a-ib+A+iA|=|\overline{\alpha}|.\end{aligned}$$ □

Apresenta-se agora a demonstração da Proposição 4.29, *(3)*, enunciada na página 44.

Demonstração da Proposição 4.29, (3), p. 44. Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, $\beta=c+id+B+iB\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$ e $s=|c+id|$. Então, aplicando o Corolário 4.28 e a Proposição 4.25, tem-se $|\beta|=s+B\notin\mathcal{N}$. Assim, pela aplicação do Teorema 3.16, das Proposições 4.29.*(2)*, 4.32 e 4.33, tem-se

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|&=|\alpha|\left|\frac{1}{\beta}\right|=|\alpha|\left|\frac{\overline{\beta}}{s^2}\right|=|\alpha|\left|\frac{1}{s^2}\right|\left|\overline{\beta}\right|=|\alpha|\frac{\left|\overline{\beta}\right|}{s^2}\\&=|\alpha|\frac{s+B}{s^2}=|\alpha|\frac{1}{s+B}=|\alpha|\frac{1}{|\beta|}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}.\end{aligned}$$ □

4.1.4 Representação de um número externo complexo na forma polar

Mostra-se que um número externo complexo não-neutricial pode ser representado na forma polar, à semelhança do que acontece com os números complexos não nulos.

Recorde-se que se f é uma função real interna, de domínio $D\subseteq\mathbb{R}$, e e $S\subseteq D$, então

$$f(S)=\{f(x):x\in S\}.$$

Teorema 4.34. *Seja um número externo complexo não neutricial $\alpha=a+bi+A+iA$. Sejam $r=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\phi=\arg(a+ib)$. Então,*

$$\alpha=(r+A)\exp[i(\phi+A/r)].$$

Observe-se que, como para $M\subseteq\oslash$ e $\phi\in\mathbb{R}$, $|\cos(\phi+M)|\leq 1$, $|\operatorname{sen}(\phi+M)|\leq 1$ e $|\exp[i(\phi+A/r)]|=1$, estas expressões não são números externos. Ora, obtém-se números externos ao multiplicá-las por $1+M$. Assim, para demonstrar o teorema anterior são necessários alguns resultados preliminares.

Proposição 4.35. *Sejam $\phi\in\mathbb{R}$ e uma neutriz $M\subseteq\oslash$. Então, existem intervalos convexos $C,C'\subseteq M$ tais que*

(1)

$$\cos(\phi+M)=\begin{cases}\cos(\phi)+M & \textit{se } \phi\not\simeq 0 \mod \pi\\ \cos(\phi)+C\subseteq\cos(\phi)+M\subseteq 1+\oslash & \textit{se } \phi\simeq 0 \mod 2\pi\\ \cos(\phi)+C\subseteq\cos(\phi)+M\subseteq -1+\oslash & \textit{se } \phi\simeq \pi \mod 2\pi.\end{cases}$$

(2)

$$\operatorname{sen}(\phi+M)=\begin{cases}\operatorname{sen}(\phi)+M & \textit{se } \phi\not\simeq \pi/2 \mod \pi\\ \operatorname{sen}(\phi)+C'\subseteq\operatorname{sen}(\phi)+M\subseteq 1+\oslash & \textit{se } \phi\simeq \pi/2 \mod 2\pi\\ \operatorname{sen}(\phi)+C'\subseteq\sin(\phi)+M\subseteq -1+\oslash & \textit{se } \phi\simeq -\pi/2 \mod 2\pi.\end{cases}$$

Proposição 4.36. *Sejam $\phi\in\mathbb{R}$ e um neutriz $M\subseteq\oslash$. Então,*

(1) $(1+M)\cos(\phi+M)=\cos(\phi)+M$.

(2) $(1+M)\operatorname{sen}(\phi+M)=\operatorname{sen}(\phi)+M$.

Proposição 4.37. *Sejam $\phi\in\mathbb{R}$ e um neutriz $M\subseteq\oslash$. Então,*

$$(1+M)\exp[i(\phi+M)]=\cos(\phi)+M+i(\operatorname{sen}(\phi)+M). \tag{4.24}$$

Demonstração da Proposição 4.35. Sejam $\phi\in\mathbb{R}$ e $M\subseteq\oslash$.

(1) Primeiramente, considera-se $\phi\not\simeq 0 \mod \pi$. Neste caso, $\cos'(\phi)=-\sin(\phi)\not\simeq 0$, logo, pela Proposição 4.20, tem-se $\cos(\phi+M)=\cos(\phi)+M$.

Agora, seja $\phi\simeq 0 \mod 2\pi$. Neste caso, pela aplicação da Proposição 4.20, tem-se $\cos(\phi+M)=\cos(\phi)+C$, onde C é um intervalo externo tal que $C\subseteq M\subseteq\oslash$. Assim, $\cos(\phi+M)\subseteq 1+\oslash$.

Por último, se $\phi\simeq\pi \mod 2\pi$, também $\cos(\phi+M)=\cos(\phi)+C$, onde C é um intervalo externo tal que $C\subseteq M\subseteq\oslash$ e, consequentemente, $\cos(\phi+M)\subseteq -1+\oslash$.

(2) Primeiramente, seja $\phi\not\simeq\pi/2 \mod \pi$. Neste caso, $\sin'(\phi)=\cos(\phi)\not\simeq 0$, logo, pela Proposição 4.20, tem-se $\sin(\phi+M)=\sin(\phi)+M$.

Agora, seja $\phi\simeq\pi/2 \mod 2\pi$. Neste caso, pela aplicação da Proposição 4.20, tem-se $\operatorname{sen}(\phi+M)=\operatorname{sen}(\phi)+C'$, onde C' é um intervalo externo tal que $C'\subseteq M\subseteq\oslash$. Assim, $\operatorname{sen}(\phi+M)\subseteq 1+\oslash$.

Por último, se $\phi\simeq-\pi/2 \mod 2\pi$, também $\operatorname{sen}(\phi+M)=\operatorname{sen}(\phi)+C'$, onde C' é um intervalo externo tal que $C'\subseteq M\subseteq\oslash$ e, consequentemente, $\operatorname{sen}(\phi+M)\subseteq -1+\oslash$. □

Demonstração da Proposição 4.36. Sejam $\phi\in\mathbb{R}$ e $M\subseteq\oslash$.

(1) Primeiramente, seja $\phi\not\simeq 0 \mod \pi$. Como $M\subseteq\oslash$ e $\cos(\phi)M\subseteq M$, pois $\cos(\phi)\in\pounds$ então, pela Proposição 4.35, ponto *(1)*, tem-se

$$\begin{aligned}(1+M)\cos(\phi+M)&=(1+M)(\cos(\phi)+M)\\&=\cos(\phi)+M+\cos(\phi)M+M^2=\cos(\phi)+M.\end{aligned}$$

Seja, agora, $\phi\simeq 0 \mod 2\pi$. pela Proposição 4.35, ponto *(1)*, tem-se $\cos(\phi+M)=\cos(\phi)+C$, onde C é um intervalo externo tal que $C\subseteq M\subseteq\oslash$. Como $M\cos(\phi)=M$, pois

$\cos(\phi) \in @$, e $CM \subseteq M$ então, tem-se

$$\begin{aligned}(1+M)\cos(\phi+M) &= (1+M)(\cos(\phi)+C)\\ &= \cos(\phi)+C+\cos(\phi)M+CM = cos(\phi)+M.\end{aligned}$$

O caso $\phi \simeq \pi \mod 2\pi$ resolve-se de forma análoga ao caso anterior.

(2) Primeiramente, seja $x \not\simeq \pi/2 \mod \pi$. Como $M \subseteq \oslash$ e $\operatorname{sen}(\phi)\, M \subseteq M$, pois $\operatorname{sen}(\phi) \in \pounds$ então, pela Proposição 4.35, ponto *(2)*, tem-se

$$\begin{aligned}(1+M)\operatorname{sen}(\phi+M) &= (1+M)(\operatorname{sen}(\phi)+M)\\ &= \operatorname{sen}(\phi)+M+\operatorname{sen}(\phi)\,M+M^2 = \operatorname{sen}(\phi)+M.\end{aligned}$$

Seja, agora, $\phi \simeq \pi/2 \mod 2\pi$. pela Proposição 4.35, ponto *(2)*, tem-se $\operatorname{sen}(\phi+M) = \operatorname{sen}(\phi)+C'$, onde C' é um intervalo externo tal que $C' \subseteq M \subseteq \oslash$. Como $\operatorname{sen}(\phi)\, M = M$, pois $\operatorname{sen}(\phi) \in @$, e $C'M \subseteq M$ então, tem-se

$$\begin{aligned}(1+M)\operatorname{sen}(\phi+M) &= (1+M)\left(\operatorname{sen}(\phi)+C'\right)\\ &= \operatorname{sen}(\phi)+C'+\operatorname{sen}(\phi)\,M+MC' = \operatorname{sen}(\phi)+M.\end{aligned}$$

O caso $\phi \simeq -\pi/2 \mod 2\pi$ resolve-se de forma análoga ao caso anterior. □

Demonstração da Proposição 4.37. Tem-se,

$$\begin{aligned}(1+M)\exp[i(\phi+M)] &= (1+M)\{\exp[i(\phi+x)] | x \in M\}\\ &= (1+M)\{\cos(\phi+x)+i\sin(\phi+x) | x\in M\}.\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 4.35, tem-se

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}((1+M)\exp[i(\phi+M)]) &= (1+M)\{\cos(\phi+x)|x\in M\}\\ &= (1+M)\cos(\phi+M) = \cos(\phi)+M.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\operatorname{Im}((1+M)\exp[i(\phi+M)]) = \sin(\phi)+M.$$

Como a parte real e a parte imaginária de $(1+M)\exp[i(\phi+M)]$ são números externos, tem-se

$$\begin{aligned}(1+M)\exp[i(\phi+M)] &= \cos(\phi)+M+i(\sin(\phi)+M)\\ &= \cos(\phi)+i\sin(\phi)+M+iM.\end{aligned}$$ □

Demonstração do Teorema 4.34. Aplicando a Proposição 4.37, tem-se

$$\begin{aligned}(r+A)\exp[i(\phi+A/r)] &= r\,[(1+A/r)\exp[i(\phi+A/r)]]\\ &= r\left(\cos(\phi)+i\operatorname{sen}(\phi)+\frac{A}{r}+i\frac{A}{r}\right)\\ &= r\cos(\phi)+i\,(r\operatorname{sen}(\phi))+A+iA\\ &= a+ib+A+iA.\end{aligned}$$ □

4.2 Propriedades da adição em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$

Nesta secção mostra-se que o conjunto $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, associado à operação da adição, é uma assembleia, em que os elementos neutros e simétricos individualizados são definidos por intermédio de funções.

Os conteúdos estão apresentados em três subsecções.

Na Subsecção 4.2.1 mostra-se que $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$ é um semigrupo comutativo regular.

Na Subsecção 4.2.2 mostra-se que $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$ é uma assembleia.

Na Subsecção **??** apresenta-se outras propriedades dos elementos da assembleia $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$.

4.2.1 O semigrupo comutativo regular $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$

Mostra-se aqui, por intermédio do Teorema 4.41, que a estrutura $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$ é um semigrupo comutativo regular.

Para facilitar a demonstração de alguns resultados desta subsecção, em particular, e da Secção 4.2, em geral, apresenta-se algumas noções e resultados preliminares.

Definição 4.38. *Seja* $\alpha=a+ib+A+iA\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. *Chama-se* simétrico *de* α *ao número externo complexo*

$$-\alpha=-1\alpha=-a-ib+A+iA.$$

Proposição 4.39. *Sejam* $\alpha,\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. *Então,*

(1) $-(-\alpha)=\alpha$.

(2) $-(\alpha+\beta)=-\alpha+(-\beta)$.

Demonstração. Sejam $\alpha=a+ib+A+iA,\beta=c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então,

(1) $-(-\alpha)=-(-(a+ib)+A+iA)=a+ib+A+iA=\alpha$.

(2) Aplicando as Proposições 4.11 e 4.12 e as propriedades de operações em $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}-(\alpha+\beta)&=-((a+ib)+(c+id)+A+iA+B+iB)\\&=-((a+ib)+(c+id))+A+iA+B+iB\\&=-(a+ib)-(c+id)+A+iA+B+iB\\&=-(a+ib)+A+iA+(-(c+id)+B+iB)\\&=-\alpha+(-\beta).\end{aligned}$$

□

Proposição 4.40. *Seja* $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. *Então,* $\alpha+(-\alpha)=\mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{N}(-\alpha)$.

Demonstração. Seja $\alpha=a+ib+A+iA\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então, aplicando a Proposição 4.13, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha+(-\alpha)&=a+ib+A+iA+(-a-ib+A+iA)\\&=A+iA=\mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{N}(-\alpha).\end{aligned}$$

□

Teorema 4.41. *A estrutura* $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$ *é um semigrupo comutativo regular.*

Demonstração. Sejam

$$\alpha = a_1 + ib_1 + A_1 + iA_1, \beta = a_2 + ib_2 + A_2 + iA_2, \delta = a_3 + ib_3 + A_3 + iA_3 \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}.$$

(1) Pelo Corolário 4.14, $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$ é fechado para a adição.

(2) A adição goza da propriedade associativa em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$, pois, aplicando a Proposição 4.11 e a propriedade associativa da adição em $\mathbb{E}$ e em $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \delta) &= a_1 + ib_1 + A_1 + iA_1 + ((a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3) + A_2 + A_3 + \\ &\quad + i\,(A_2 + A_3)) \\ &= (a_1 + ib_1) + ((a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)) + A_1 + (A_2 + A_3) + \\ &\quad + i\,(A_1 + (A_2 + A_3)) \\ &= ((a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)) + (a_3 + ib_3) + (A_1 + A_2) + A_3 + \\ &\quad + i\,((A_1 + A_2) + A_3) \\ &= ((a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + (A_1 + A_2) + i\,(A_1 + A_2)) + \\ &\quad + (a_3 + ib_3 + A_3 + iA_3) \\ &= (\alpha + \beta) + \delta.\end{aligned}$$

(3) A comutatividade da adição em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$ também se verifica, pois, aplicando a Proposição 4.11 e a propriedade comutativa da adição em $\mathbb{E}$ e em $\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + A_1 + A_2 + i\,(A_1 + A_2) \\ &= (a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1) + A_2 + A_1 + i\,(A_2 + A_1) \\ &= \beta + \alpha.\end{aligned}$$

(4) Todo elemento $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$ é regular, pois, aplicando a Proposição 4.40, o Corolário 4.16, a associatividade e a comutatividade da adição em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$, tem-se

$$\alpha + (-\alpha) + \alpha = (\alpha + (-\alpha)) + \alpha = \mathrm{N}\,(\alpha) + \alpha = \alpha + \mathrm{N}\,(\alpha) = \alpha.$$

Logo, pela Definição 2.3, tem-se que $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}, +)$ é um semigrupo comutativo regular. □

4.2.2 A assembleia $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}, +)$

Mostra-se que o semigrupo comutativo regular $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}, +)$ é uma assembleia. Para isso, tem que se o provar os estipulados em *(3)*, *(4)* e *(5)* da Definição 2.4. Neste sentido, em primeira mão, demonstra-se as Proposições 4.42, 4.43 e 4.45, que verificam as condições estipuladas nos três pontos apresentados anteriormente, para depois apresentar o Teorema 4.46, que garante que $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}, +)$ é uma assembleia.

Proposição 4.42. *Existe uma, e uma só, função* $\mathrm{e} : \mathbb{E} + i\mathbb{E} \to \mathbb{E} + i\mathbb{E}$ *tal que:*

(e.1) $\alpha + \mathrm{e}\,(\alpha) = \alpha$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$,

(e.2) *Se* $\mathrm{f} : \mathbb{E} + i\mathbb{E} \to \mathbb{E} + i\mathbb{E}$ *é uma função tal que* $\alpha + \mathrm{f}(\alpha) = \alpha$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$, *então* $\mathrm{e}(\alpha) + \mathrm{f}(\alpha) = \mathrm{e}(\alpha)$.

De facto, $\mathrm{e}\,(\alpha) = \mathrm{N}\,(\alpha)$.

Demonstração. Seja $\mathrm{e}:\mathbb{E}+i\mathbb{E}\to\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ a função definida por $\mathrm{e}(\alpha)=\mathrm{N}(\alpha)$, para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$.

(1) A função e satisfaz *(e.1)*, uma vez que aplicando o Corolário 4.16, tem-se

$$\alpha+\mathrm{e}(\alpha)=\alpha+\mathrm{N}(\alpha)=\alpha.$$

(2) A função e também satisfaz *(e.2)*. Com efeito, seja $\mathrm{f}:\mathbb{E}+i\mathbb{E}\to\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ uma função tal que $\alpha+\mathrm{f}(\alpha)=\alpha$, para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então, uma vez que as funções e e f satisfazem a propriedade *(e.1)*, aplicando a comutatividade e a associatividade da adição em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, a Proposição 4.40 e o Corolário 4.16, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{e}(\alpha)+\mathrm{f}(\alpha)&=\mathrm{N}(\alpha)+f(\alpha)=\alpha+(-\alpha)+\mathrm{f}(\alpha)=-\alpha+\alpha+\mathrm{f}(\alpha)\\&=-\alpha+\alpha=\mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha).\end{aligned}$$

(3) Com vista à demonstração da unicidade da função e, seja $\mathrm{e}':\mathbb{E}+i\mathbb{E}\to\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ uma função que satisfaz as propriedades *(e.1)* e *(e.2)*. Então, para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se $\mathrm{e}(\alpha)+\mathrm{e}'(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha)$, pois $\alpha+\mathrm{e}'(\alpha)=\alpha$, e $\mathrm{e}'(\alpha)+\mathrm{e}(\alpha)=\mathrm{e}'(\alpha)$, pois $\alpha+\mathrm{e}(\alpha)=\alpha$, logo, aplicando a propriedade comutativa da adição, tem-se:

$$\mathrm{e}'(\alpha)=\mathrm{e}'(\alpha)+\mathrm{e}(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha)+\mathrm{e}'(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha).$$

Assim, $\mathrm{e}=\mathrm{e}'$, o que prova a unicidade da função e. □

Proposição 4.43. *Existe uma, e uma só, função* $\mathrm{s}:\mathbb{E}+i\mathbb{E}\to\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ *tal que, para todo* $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$*, tem-se:*

(s.1) $\alpha+\mathrm{s}(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha)$,

(s.2) $\mathrm{e}(\mathrm{s}(\alpha))=\mathrm{e}(\alpha)$.

De facto, $\mathrm{s}(\alpha)=-\alpha$.

Demonstração. Seja $\mathrm{s}:\mathbb{E}+i\mathbb{E}\to\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ a função definida por $\mathrm{s}(\alpha)=-\alpha$, para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$.

(1) A função s satisfaz a *(s.1)*, pois, aplicando a Proposição 4.40, tem-se

$$\alpha+\mathrm{s}(\alpha)=\alpha+(-\alpha)=\mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha).$$

(2) A função s satisfaz *(s.2)*, pois, aplicando a Proposição 4.40, tem-se

$$\mathrm{e}(\mathrm{s}(\alpha))=\mathrm{e}(-\alpha)=\mathrm{N}(-\alpha)=\mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha).$$

(3) Com vista à demonstração da unicidade da função s, seja $\mathrm{s}':\mathbb{E}+i\mathbb{E}\to\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ uma função que satisfaz as propriedades *(s.1)* e *(s.2)*. Então, para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se $\mathrm{e}(\mathrm{s}'(\alpha))=\mathrm{e}(\mathrm{s}(\alpha))=\mathrm{e}(\alpha)$, por *(s.2)*, $\alpha+\mathrm{s}(\alpha)=\alpha+\mathrm{s}'(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha)$, por *(s.1)* e, por *(e.1)* tem-se $\mathrm{s}'(\alpha)+\mathrm{e}(\mathrm{s}'(\alpha))=\mathrm{s}'(\alpha)$ e $\mathrm{s}(\alpha)+\mathrm{e}(\mathrm{s}(\alpha))=\mathrm{s}(\alpha)$, logo, aplicando as propriedades comutativa e associativa da adição em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{s}'(\alpha)&=\mathrm{s}'(\alpha)+\mathrm{e}(\mathrm{s}'(\alpha))=\mathrm{s}'(\alpha)+\mathrm{e}(\alpha)=\mathrm{s}'(\alpha)+\alpha+\mathrm{s}(\alpha)\\&=\alpha+\mathrm{s}'(\alpha)+\mathrm{s}(\alpha)=\mathrm{e}(\alpha)+\mathrm{s}(\alpha)=\mathrm{e}(s(\alpha))+\mathrm{s}(\alpha)\\&=\mathrm{s}(\alpha)+\mathrm{e}(s(\alpha))=\mathrm{s}(\alpha).\end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{s}' = \mathrm{s}$, o que prova a unicidade de s. $\square$

Corolário 4.44 (Lei do Corte)**.** *Sejam* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$*. Então,*

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow e(\alpha) + \beta = e(\alpha) + \gamma.$$

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então, aplicando as Proposições 4.42 4.43 e a propriedade associativa da adição em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$, tem-se:

(1) Se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, então $(\mathrm{s}(\alpha) + \alpha) + \beta = (\mathrm{s}(\alpha) + \alpha) + \gamma$, logo $\mathrm{e}(\alpha) + \beta = \mathrm{e}(\alpha) + \gamma$.

(2) Se $e(\alpha) + \beta = e(\alpha) + \gamma$, então $(\alpha + e(\alpha)) + \beta = (\alpha + e(\alpha)) + \gamma$, logo $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$.

Por *(1)* e *(2)*, tem-se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow e(\alpha) + \beta = e(\alpha) + \gamma$. $\square$

Proposição 4.45. *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$*. Então,*

$$\mathrm{e}(\alpha + \beta) = \mathrm{e}(\alpha) \text{ ou } \mathrm{e}(\alpha + \beta) = \mathrm{e}(\beta).$$

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então, aplicando os Corolários 4.16 e 4.10 e a Proposição 4.42, tem-se

$$\mathrm{e}(\alpha + \beta) = \mathrm{N}(\alpha + \beta) = \mathrm{N}(\alpha) + \mathrm{N}(\beta),$$

logo

$$\mathrm{e}(\alpha + \beta) = \mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{e}(\alpha) \text{ ou } \mathrm{e}(\alpha + \beta) = \mathrm{N}(\beta) = \mathrm{e}(\beta).$$ $\square$

Teorema 4.46. *O semigrupo comutativo regular* $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}, +)$*, associado às funções* e *e* s*, definidas nas Proposições 4.42 e 4.43, é uma assembleia.*

Demonstração. Pelas Proposições 4.42, 4.43 e 4.45, conclui-se que o semigrupo comutativo regular $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}, +)$ é uma assembleia. $\square$

Sendo $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}, +)$, associado às funções e e s, uma assembleia, apresenta-se mais propriedades das funções e e s.

Corolário 4.47. *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$*. Então:*

(1) $\mathrm{e}(\mathrm{e}(\alpha)) = \mathrm{e}(\alpha)$*;*

(2) $\mathrm{e}(\alpha) + \mathrm{e}(\alpha) = \mathrm{e}(\alpha)$*;*

(3) $\mathrm{e}(\alpha + \beta) = \mathrm{e}(\alpha) + \mathrm{e}(\beta)$*;*

(4) $\mathrm{s}(\mathrm{s}(\alpha)) = \alpha$*;*

(5) $\mathrm{s}(\alpha + \beta) = \mathrm{s}(\alpha) + \mathrm{s}(\beta)$*;*

(6) $\mathrm{e}(\mathrm{s}(\alpha)) = \mathrm{s}(\mathrm{e}(\alpha)) = \mathrm{e}(\alpha)$*;*

(7) Se $\alpha \neq \mathrm{e}(\alpha)$*, então* $\alpha \neq \mathrm{e}(\beta)$.

Demonstração. Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então, pelas Proposições 4.42 e 4.43, tem-se $\mathrm{e}(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha)$, $\mathrm{e}(\beta) = \mathrm{N}(\beta)$, $\mathrm{e}(\alpha+\beta) = \mathrm{N}(\alpha+\beta)$, $\mathrm{s}(\alpha) = -\alpha$ e $\mathrm{s}(\beta) = -\beta$.

(1) $\mathrm{e}(\mathrm{e}(\alpha)) = \mathrm{N}(\mathrm{N}(\alpha)) = \mathrm{N}(A+iA) = A+iA = \mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{e}(\alpha)$.

(2) Aplicando o Corolário 4.10, tem-se $\mathrm{e}(\alpha)+\mathrm{e}(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha)+\mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{e}(\alpha)$.

(3) Aplicando o Corolário 4.16, tem-se

$$\mathrm{e}(\alpha+\beta) = \mathrm{N}(\alpha+\beta) = \mathrm{N}(\alpha)+\mathrm{N}(\beta) = \mathrm{e}(\alpha)+\mathrm{e}(\beta).$$

(4) Aplicando a Proposição 4.39, tem-se $\mathrm{s}(\mathrm{s}(\alpha)) = \mathrm{s}(-\alpha) = -(-\alpha) = \alpha$.

(5) Aplicando a Proposição 4.39, tem-se

$$\mathrm{s}(\alpha+\beta) = -(\alpha+\beta) = -\alpha+(-\beta) = \mathrm{s}(\alpha)+\mathrm{s}(\beta).$$

(6) Aplicando a Proposição 4.40 e o Corolário 4.16, tem-se

$$\mathrm{e}(\mathrm{s}(\alpha)) = \mathrm{e}(-\alpha) = \mathrm{N}(-\alpha) = -\mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{s}(\mathrm{N}(\alpha)) = \mathrm{s}(\mathrm{e}(\alpha)) = \mathrm{e}(\alpha).$$

Ponto *(7)*. Aplicando a Proposição 4.3, se $\alpha \neq \mathrm{e}(\alpha)$, então $\alpha \notin \mathcal{N}+i\mathcal{N}$, logo $\alpha \neq \mathrm{e}(\beta) = \mathrm{N}(\beta) \in \mathcal{N}+i\mathcal{N}$. □

4.3 Propriedades da multiplicação em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$

Nesta secção mostra-se que o conjunto $(\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$, conjunto dos números externos complexos não-neutriciais, associado à multiplicação, é uma assembleia, em que as unidades e os inverso individualizados são definidos por intermédio de funções.

À semelhança da Secção 4.2, os conteúdos são apresentados em três subsecções.

Na Subsecção 4.3.1 mostra-se que $((\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}), \cdot)$ é um semigrupo comutativo regular.

Na Subsecção 4.3.2 mostra-se que $((\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}), \cdot)$ é uma assembleia.

Na Subsecção 4.3.3 apresenta-se outras propriedades dos elementos da assembleia $((\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}), \cdot)$.

4.3.1 O semigrupo comutativo regular $((\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}), \cdot)$

As demonstrações das propriedades da multiplicação dos números externos complexos não-neutriciais exigem um pouco mais de perícia do que as demonstrações das propriedades da adição. Neste sentido, antes de apresentar o teorema central desta subsecção – Teorema 4.53, que estabelece que o conjunto dos números externos não-neutriciais, associado à multiplicação, é um semigrupo comutativo regular – apresenta-se as Proposições 4.49, 4.51 e 4.52 que garantem a verificação das propriedades do semigrupo comutativo regular $((\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}), \cdot)$.

A Proposição 4.32 motiva a seguinte definição.

Definição 4.48. *Seja* $\alpha = a+ib+A+iA \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. *Chama-se* inverso *de* α

ao número externo

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{a+ib}+\frac{A+iA}{(a+ib)^2}=\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}.$$

Proposição 4.49. $(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$ *é fechado para a multiplicação.*

Demonstração. Sejam

$$\alpha=a+ib+A+iA, \beta=c+id+B+iB\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N}).$$

Pelo Corolário 4.28, tem-se $|\alpha|,|\beta|\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$.

Sejam $r_1=|a+ib|$ e $r_2=|c+id|$.

Aplicando as Proposições 4.25, 4.29 e 3.9, tem-se

$$|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|=(r_1+A)(r_2+B)\notin\mathcal{N}, \tag{4.25}$$

logo, pelo Corolário 4.28, tem-se $\alpha\beta\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$. Assim, $(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$ é fechado para a multiplicação. □

O lema que se segue trata de dois casos especiais de distributividade e aplica-se na demonstração da propriedade associativa.

Lema 4.50. *Sejam* $z\in\mathbb{C}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, $C+iC, D+iD, E+iE\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$. *Então,*

(1) $z(\alpha+\beta)=z\alpha+z\beta$.

(2) $(C+iC)(D+iD+E+iE)=(C+iC)(D+iD)+(C+iC)(E+iE)$.

Demonstração. Sejam $z=e+if\in\mathbb{C}$, $\alpha=a+ib+A+iA, \beta=c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, $C+iC, D+iD, E+iE\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$.

Aplicando as Proposições 4.9, 4.11 e 4.12 e as propriedades das operações em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}
z(\alpha+\beta)&=(e+if)((a+ib+A+iA)+(c+id+B+iB))\\
&=(e+if)((a+ib)+(c+id)+A+B+i(A+B))\\
&=(e+if)((a+ib)+(c+id))+(e+if)(A+B+i(A+B))\\
&=(e+if)(a+ib)+(e+if)(c+id)+eA+eB+fA+fB+\\
&\quad+i(eA+eB+fA+fB)\\
&=(e+if)(a+ib)+(e+if)(c+id)+eA+fA+i(eA+fA)+\\
&\quad+eB+fB+i(eB+fB)\\
&=(e+if)(a+ib)+(e+if)(c+id)+(e+if)(A+iA)+\\
&\quad+(e+if)B+iB\\
&=(e+if)(a+ib+A+iA)+(e+if)a(c+id+B+iB)\\
&=z\alpha+z\beta.
\end{aligned}$$

(2) Aplicando as Proposições 4.9 e 4.12 e as propriedades de operações em $\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}(C+iC)(D+iD+E+iE) &= (C+iC)((D+E)+i(D+E))\\ &= C(D+E)+i(C(D+E))\\ &= CD+CE+i(CD+CE)\\ &= CD+iCD+CE+iCE\\ &= (C+iC)(D+iD)+(C+iC)(E+iE). \qquad \square\end{aligned}$$

Proposição 4.51. *A multiplicação goza da propriedade comutativa e associativa em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$.*

Demonstração da propriedade comutativa. Sejam

$$\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}.$$

Pela Proposição 4.13, tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a+ib+A+iA)(c+id+B+iB)\\ &= ac-bd+i(ad+bc)+aB+bB+cA+dA+AB+ \qquad (4.26)\\ &\quad +i(aB+bB+cA+dA+AB)\\ \beta\alpha &= (c+id+B+iB)(a+ib+A+iA)\\ &= ca-db+i(cb+da)+cA+dA+aB+bB+AB+ \qquad (4.27)\\ &\quad i(cA+dA+aB+bB+AB)\end{aligned}$$

Sabendo que a multiplicação e a adição gozam da propriedade comutativa em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{E}$, então, pelas fórmulas (4.26) e (4.27), conclui-se que $\alpha\beta = \beta\alpha$. $\square$

Demonstração da propriedade associativa. Sejam

$$\alpha = a_1+ib_1+A_1+iA_1, \beta = a_2+ib_2+A_2+iA_2, \delta = a_3+ib_3+A_3+iA_3 \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}.$$

Aplicando a Proposição 4.17 e o Lema 4.50, e a propriedade comutativa da multiplicação em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\delta) &= (a_1+ib_1+A_1+iA_1)((a_2+ib_2+A_2+iA_2)(a_3+ib_3+A_3+iA_3))\\ &= (a_1+ib_1+A_1+iA_1)((a_2+ib_2)(a_3+ib_3)+(a_2+ib_2)(A_3+iA_3)+\\ &\quad +(a_3+ib_3)(A_2+iA_2)+(A_2+iA_2)(A_3+iA_3))\\ &= (a_1+ib_1)(a_2+ib_2)(a_3+ib_3)+(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)(A_3+iA_3)+\\ &\quad +(a_1+ib_1)(a_3+ib_3)(A_2+iA_2)+(a_1+ib_1)(A_2+iA_2)(A_3+iA_3)+\\ &\quad +(a_2+ib_2)(a_3+ib_3)(A_1+iA_1)+(a_2+ib_2)(A_3+iA_3)(A_1+iA_1)+\\ &\quad +(a_3+ib_3)(A_2+iA_2)(A_1+iA_1)+(A_1+iA_1)(A_2+iA_2)(A_3+iA_3)\\ &= ((a_1+ib_1)(a_2+ib_2)+(a_1+ib_1)(A_2+iA_2)+(a_2+ib_2)(A_1+iA_1)+\\ &\quad +(A_2+iA_2)(A_1+iA_1))(a+ib_3)+\\ &\quad +((a_1+ib_1)(a_2+ib_2)+(a_1+ib_1)(A_2+iA_2)+(a_2+ib_2)(A_1+iA_1)+\\ &\quad +(A_2+iA_2)(A_1+iA_1))(A+iA_3)\\ &= (\alpha\beta)\delta. \qquad \square\end{aligned}$$

Proposição 4.52. *Todo o elemento de $(\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$ é regular.*

Demonstração. Seja $\alpha \in (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$.

Aplicando a propriedade comutativa da multiplicação em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$ e a Proposição 4.32, tem-se $\frac{1}{\alpha} \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$ e

$$\alpha\frac{1}{\alpha}\alpha = \left(\alpha\frac{1}{\alpha}\right)\alpha = \left(1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right)\alpha = \alpha\left(1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right) = \alpha,$$

assim, todo o $\alpha \in (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$ é regular. □

Teorema 4.53. $((\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}), \cdot)$ *é um semigrupo comutativo regular.*

Demonstração. $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$ é fechado para a multiplicação, pela Proposição 4.49. Também, pela Proposição 4.51, a multiplicação goza da propriedade comutativa e associativa em $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$, pois $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}) \subset \mathbb{E} + i\mathbb{E}$, e, pela Proposição 4.52, todo elemento de $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$ é regular. Assim, de acordo com a Definição 2.3, $((\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}), \cdot)$ é um semigrupo comutativo regular. □

4.3.2 A assembleia $((\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}), \cdot)$

Mostra-se que o semigrupo comutativo regular $((\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}), \cdot)$ é uma assembleia. Para isso, tem que se o provar os estipulados em *(3)*, *(4)* e *(5)* da Definição 2.4. Neste sentido, em primeira mão, demonstra-se as Proposições 4.54, 4.55 e 4.58, que verificam as condições estipuladas nos três pontos apresentados anteriormente, para depois apresentar o Teorema 4.59, que garante que $((\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}), \cdot)$ é uma assembleia.

Proposição 4.54. *Existe uma, e uma só, função*

$$\mathrm{u} : (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}) \to (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$$

tal que:

(u.1) $\alpha \cdot \mathrm{u}(\alpha) = \alpha$, *para todo* $\alpha \in (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$,

(u.2) Se $\mathrm{v} : (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}) \to (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$ *é uma função que verifica* $\alpha \cdot \mathrm{v}(\alpha) = \alpha$, *para todo* $\alpha \in (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$, *então* $\mathrm{u}(\alpha) \cdot \mathrm{v}(\alpha) = \mathrm{u}(\alpha)$.

De facto, $\mathrm{u}(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}$.

Demonstração. Seja $\mathrm{u} : (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N}) \to (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$ a função definida por

$$\mathrm{u}(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha},$$

para todo $\alpha \in (\mathbb{E} + i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N} + i\mathcal{N})$.

(1) A função u satisfaz *(u.1)*, pois aplicando as propriedades de operações em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$ e a Proposição 4.32, tem-se

$$\mathrm{u}(\alpha)\,\alpha = \left(1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right)\alpha = \alpha\left(1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right) = \alpha.$$

(2) A função u satisfaz *(u.2)*. Com efeito, seja v uma função que verifica *(u.2)*. Então, para todo $\alpha \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$, tem-se $\alpha \mathrm{v}(\alpha) = \alpha$. Assim, aplicando as propriedades das operações em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se

$$\mathrm{u}(\alpha) \cdot \mathrm{v}(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha}\mathrm{v}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(\alpha \mathrm{v}(\alpha)) = \frac{1}{\alpha}\alpha = \frac{\alpha}{\alpha} = \mathrm{u}(\alpha).$$

(3) Com vista à demonstração da unicidade da função u, seja

$$\mathrm{u}' : (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}) \to (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$$

uma função que satisfaz as propriedades *(u.1)* e *(u.2)*. Então, para todo $\alpha \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$, tem-se $\mathrm{u}'(\alpha)\mathrm{u}(\alpha) = \mathrm{u}'(\alpha)$, pois $\alpha\mathrm{u}(\alpha) = \alpha$, e $\mathrm{u}(\alpha)\mathrm{u}'(\alpha) = \mathrm{u}(\alpha)$, pois $\alpha\mathrm{u}'(\alpha) = \alpha$. Assim, aplicando a propriedade comutativa da multiplicação em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se

$$\mathrm{u}'(\alpha) = \mathrm{u}'(\alpha)\,\mathrm{u}(\alpha) = \mathrm{u}(\alpha)\,\mathrm{u}'(\alpha) = \mathrm{u}(\alpha),$$

logo $\mathrm{u} = \mathrm{u}'$, o que prova a unicidade da função u. □

Proposição 4.55. *Existe uma, e uma só, função*

$$\mathrm{d} : (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}) \to (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$$

tal que:

(d.1) $\alpha \cdot \mathrm{d}(\alpha) = \mathrm{u}(\alpha)$,

(d.2) $\mathrm{u}(\mathrm{d}(\alpha)) = \mathrm{u}(\alpha)$,

para todo $\alpha \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. *De facto,* $\mathrm{d}(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}$.

Demonstração. Seja $\mathrm{d} : (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}) \to (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$ a função definida por

$$\mathrm{d}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2},$$

para todo $\alpha = a + ib + A + iA \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$.

(1) A função d satisfaz *(d.1)*, pois

$$\alpha\mathrm{d}(\alpha) = \alpha\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = \mathrm{u}(\alpha).$$

(2) A função d satisfaz a propriedade *(d.2)*, pois aplicando a Proposição 4.32, tem-se

$$\mathrm{u}(\mathrm{d}(\alpha)) = \mathrm{u}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mathrm{u}\left(\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}\right) = \frac{\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}}{\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha} = \mathrm{u}(\alpha).$$

(3) Com vista à demonstração da unicidade da função d, seja

$$\mathrm{d}' : (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N}) \to (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$$

uma função que satisfaz as propriedades *(d.1)* e *(d.2)*.

Então, para todo $\alpha \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E})\backslash(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$, tem-se $\mathrm{d}'(\alpha)\,\mathrm{u}(\mathrm{d}'(\alpha)) = \mathrm{d}'(\alpha)$ e $\mathrm{d}(\alpha)\,\mathrm{u}(d(\alpha)) = \mathrm{d}(\alpha)$, pois a função u satisfaz *(u.1)*, $\mathrm{u}(\mathrm{d}'(\alpha)) = \mathrm{u}(\alpha) = \mathrm{u}(\mathrm{d}(\alpha))$, pois as funções d e d' satisfazem *(d.2)* e $\alpha\mathrm{d}'(\alpha) = \mathrm{u}(\alpha)$, pois a função d' satisfaz a propriedade *(d.1)*. Assim, aplicando a propriedade comutativa e associativa da multiplicação, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{d}'(\alpha) &= \mathrm{d}'(\alpha)\,\mathrm{u}(\mathrm{d}'(\alpha)) = \mathrm{d}'(\alpha)\,\mathrm{u}(\alpha) = \mathrm{d}'(\alpha)\,\alpha\mathrm{d}(\alpha) = \alpha\mathrm{d}'(\alpha)\,\mathrm{d}(\alpha)\\ &= \mathrm{u}(\alpha)\,\mathrm{d}(\alpha) = \mathrm{u}(d(\alpha))\,\mathrm{d}(\alpha) = \mathrm{d}(\alpha)\,\mathrm{u}(d(\alpha)) = \mathrm{d}(\alpha)\,,\end{aligned}$$

logo $\mathrm{d}' = \mathrm{d}$, o que prova a unicidade da função d. □

Corolário 4.56 (Lei do corte)**.** *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. Então,*

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \mathrm{u}(\alpha)\,\beta = \mathrm{u}(\alpha)\,\gamma.$$

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. Então, aplicando as Proposições 4.54 e 4.55 e a propriedade comutativa e associativa da multiplicação em $(\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$, tem-se:

(1) Se $\alpha\beta = \alpha\gamma$, então $\mathrm{d}(\alpha)\,\alpha\beta = \mathrm{d}(\alpha)\,\alpha\gamma$, logo $\mathrm{u}(\alpha)\,\beta = \mathrm{u}(\alpha)\,\gamma$.

(2) Se $\mathrm{u}(\alpha)\,\beta = \mathrm{u}(\alpha)\,\gamma$, então $\alpha\mathrm{u}(\alpha)\,\beta = \alpha\mathrm{u}(\alpha)\,\gamma$, logo $\alpha\beta = \alpha\gamma$.

Por *(1)* e *(2)*, tem-se $\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \mathrm{u}(\alpha)\,\beta = \mathrm{u}(\alpha)\,\gamma$. □

Lema 4.57. *Sejam $\alpha, \beta \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. Então,*

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha} + \frac{\mathrm{N}(\beta)}{\beta}.$$

Demonstração. Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta = c+id+B+iB \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. Aplicando o Corolário 4.15 e Proposição 4.13, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a+ib+A+iA)\,(c+id+B+iB)\\ &= (a+ib)\,(c+id) + (a+ib)\,(B+iB) + (c+id)\,(A+iA)\,.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a Proposição 4.32, o Corolário 4.23 e o Lema 4.50, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} &= 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha\beta)}{\alpha\beta} = 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha\beta)}{(a+ib)\,(c+id)}\\ &= 1 + \frac{1}{(a+ib)\,(c+id)}\,((a+ib)\,(B+iB) + (c+id)\,(A+iA))\\ &= 1 + \frac{A+iA}{a+ib} + \frac{B+iB}{c+id} = 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha} + \frac{\mathrm{N}(\beta)}{\beta}.\end{aligned}$$ □

Proposição 4.58. *Sejam $\alpha, \beta \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. Então, tem-se*

$$\mathrm{u}(\alpha\cdot\beta) = \mathrm{u}(\alpha) \;\; \textit{ou} \;\; \mathrm{u}(\alpha\cdot\beta) = \mathrm{u}(\beta)\,.$$

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. Então, aplicando o Lema 4.57, tem-se

$$\mathrm{u}(\alpha\cdot\beta) = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha} + \frac{\mathrm{N}(\beta)}{\beta},$$

logo, aplicando o Corolário 4.10, tem-se

$$\mathrm{u}(\alpha\cdot\beta)=1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}=\mathrm{u}(\alpha) \text{ ou } \mathrm{u}(\alpha\cdot\beta)=1+\frac{\mathrm{N}(\beta)}{\beta}=\mathrm{u}(\beta). \qquad \square$$

Teorema 4.59. *O semigrupo comutativo regular* $((\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N}),\cdot)$, *associado às funções* u *e* d, *é uma assembleia.*

Demonstração. Pelas Proposições 4.54, 4.55 e 4.58, conclui-se que o semigrupo comutativo regular $((\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N}),\cdot)$ é uma assembleia. $\square$

4.3.3 Outras propriedades em $((\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N}),\cdot)$

À semelhança do que se passa com a assembleia $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$, apresenta-se-se mais propriedades das funções u e d.

Lema 4.60. *Seja* $\alpha\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. *Então,* $\alpha=\mathrm{u}(\alpha)$ *se, e somente se,* $\alpha\subseteq 1+\oslash+i\oslash$.

Demonstração. Seja $\alpha\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$.

(1) Aplicando o Teorema 4.22 e o Corolário 4.23, se $\alpha=\mathrm{u}(\alpha)$, então

$$\alpha=1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\subseteq 1+\oslash+i\oslash.$$

(2) Se $\alpha\subseteq 1+\oslash+i\oslash$, então existe um neutriz $M\subseteq\oslash$, tal que $\alpha=1+M+iM$. Aplicando o Teorema 4.21 e a Proposição 4.18, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(\alpha)=\mathrm{u}(1+M+iM)&=\frac{1+M+iM}{1+M+iM}\\&=(1+M+iM)(1+M+iM)\\&=1+M+iM=\alpha.\end{aligned}$$

Assim, por *(1)* e *(2)*, tem-se $\alpha=\mathrm{u}(\alpha)$ se, e somente se, $\alpha\subseteq 1+\oslash+i\oslash$. $\square$

Corolário 4.61. *Sejam* $\alpha,\beta\in(\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. *Então,*

(1) $\mathrm{u}(\alpha)\,\mathrm{u}(\alpha)=\mathrm{u}(\alpha)$;

(2) $\mathrm{u}(\mathrm{u}(\alpha))=\mathrm{u}(\alpha)$;

(3) $\mathrm{u}(\alpha\beta)=\mathrm{u}(\alpha)\,\mathrm{u}(\beta)$;

(4) $\mathrm{d}(\mathrm{d}(\alpha))=\alpha$;

(5) $\mathrm{d}(\alpha\beta)=\mathrm{d}(\alpha)\,\mathrm{d}(\beta)$;

(6) $\mathrm{u}(\mathrm{d}(\alpha))=\mathrm{d}(\mathrm{u}(\alpha))=\mathrm{u}(\alpha)$;

(7) *Se* $\alpha\neq\mathrm{u}(\alpha)$, *então* $\alpha\neq\mathrm{u}(\beta)$.

Demonstração. Sejam $\alpha = a+ib+A+iA, \beta \in (\mathbb{E}+i\mathbb{E}) \setminus (\mathcal{N}+i\mathcal{N})$. Tendo em conta as definições das funções u e d, tem-se:

(1) Aplicando a Proposição 4.18, tem-se

$$\mathrm{u}(\alpha)\,\mathrm{u}(\alpha) = \left(1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right) = 1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha} = \mathrm{u}(\alpha).$$

(2) Aplicando as Proposições 4.21 e 4.18, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(\mathrm{u}(\alpha)) &= \frac{\mathrm{u}(\alpha)}{\mathrm{u}(\alpha)} = \frac{1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}}{1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}} = \left(1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right)\\ &= 1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha} = \mathrm{u}(\alpha).\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{u}(\alpha\beta) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\alpha}{\alpha}\dfrac{\beta}{\beta} = \mathrm{u}(\alpha)\,\mathrm{u}(\beta)$.

(4) Aplicando a Proposição 4.32, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}(\alpha)) &= \mathrm{d}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}\right) = \left(a^2+b^2\right)\frac{1}{\overline{\alpha}}\\ &= \left(a^2+b^2\right)\frac{\alpha}{a^2+b^2} = \alpha.\end{aligned}$$

(5) Aplicando as Proposições 4.33 e 4.32

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\alpha\beta) &= \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{|a+ib|^2\,|c+id|^2}\overline{\alpha\beta} = \frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}\frac{\overline{\beta}}{c^2+d^2}\\ &= \mathrm{d}(\alpha)\,\mathrm{d}(\beta).\end{aligned}$$

(6) Aplicando a Proposição 4.32, tem-se

$$\mathrm{u}(\mathrm{d}(\alpha)) = \mathrm{u}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mathrm{u}\left(\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}\right) = \frac{\frac{1}{a^2+b^2}\overline{\alpha}}{\frac{1}{a^2+b^2}\overline{\alpha}} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha} = \mathrm{u}(\alpha).$$

Também, aplicando o Teorema 4.21, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(\alpha) &= \frac{\alpha}{\alpha} = 1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}}\\ &= \mathrm{d}\left(1+\frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right) = \mathrm{d}(\mathrm{u}(\alpha)).\end{aligned}$$

(7) Se $\alpha \neq \mathrm{u}(\alpha)$, então, pelo o Lema 4.60, $\alpha \nsubseteq 1+\oslash+i\oslash$, logo $\alpha \neq \mathrm{u}(\beta)$, pois, pelo Teorema 4.22 e pelo Corolário 4.23, $\mathrm{u}(\beta) = 1+\dfrac{\mathrm{N}(\beta)}{\beta} \subseteq 1+\oslash+i\oslash$. □

4.4 Distributividade em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$

À semelhança do que se passa no conjunto $\mathbb{E}$, a multiplicação não é distributiva em relação à adição em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Em geral, dados $\alpha=a+ib+A+iA,\beta,\gamma\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se

$$\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha\left(\beta+\gamma\right)+\left(A+iA\right)\beta+\left(A+iA\right)\gamma,$$

conforme o Teorema 4.64 apresentado mais abaixo.

Contudo, apresenta-se um critério para caracterizar a distributividade em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$.

Dos estudos feitos anteriormente neste trabalho, obteve-se alguns casos particulares de distributividade. Recorda-se que:

(1) Pelo Lema 4.50, dados $z\in\mathbb{C}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se

$$z\left(\alpha+\beta\right)=z\alpha+z\beta. \tag{4.28}$$

Também, se $\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, tem-se

$$\alpha\left(\beta+\gamma\right)=\alpha\beta+\alpha\gamma. \tag{4.29}$$

(2) Pela Proposição 4.12, dados $A+iA,B+iB\in\mathcal{N}+i\mathcal{N},c+id+B+iB\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ e $a+ib\in\mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\left(a+ib\right)\left(B+iB\right)&=a\left(B+iB\right)+ib\left(B+iB\right)\\&=aB+bB+i\left(aB+bB\right).\\\left(a+ib\right)\left(c+id+B+iB\right)&=\left(a+ib\right)\left(c+id\right)+\left(a+ib\right)\left(B+iB\right).\\\left(A+iA\right)\left(c+id+B+iB\right)&=\left(A+iA\right)\left(c+id\right)+\left(A+iA\right)\left(B+iB\right).\end{aligned}$$

(3) Pela Proposição 4.17, dados $\alpha=a+ib+A+iA,\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se

$$\alpha\beta=\left(a+ib\right)\beta+\left(A+iA\right)\beta. \tag{4.30}$$

A proposição que se segue mostra mais um caso particular de distributividade.

Proposição 4.62. *Sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Se β ou γ é uma neutriz complexa, então $\alpha\left(\beta+\gamma\right)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.*

Demonstração. Sejam $\alpha=a_1+ib_1+A_1+iA_1,\beta=a_2+ib_2+A_2+iA_2,\gamma=a_3+ib_3+A_3+iA_3\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Sem perda de generalidade, suponha-se que $\gamma\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, ou seja, $\gamma=A_3+iA_3$. Então, aplicando a Proposição 4.17 e o Lema 4.50, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha\left(\beta+\gamma\right)&=\left(a_1+ib_1+A_1+iA_1\right)\left(a_2+ib_2+A_2+iA_2+A_3+iA_3\right)\\&=\left(a_1+ib_1\right)\left(a_2+ib_2\right)+\left(a_1+ib_1\right)\left(A_2+iA_2+A_3+iA_3\right)+\\&\quad+\left(a_2+ib_2\right)\left(A_1+iA_1\right)+\left(A_1+iA_1\right)\left(A_2+iA_2+A_3+iA_3\right)\\&=\left(a_1+ib_1\right)\left(a_2+ib_2\right)+\left(a_1+ib_1\right)\left(A_2+iA_2\right)+\left(a_1+ib_1\right)\left(A_3+iA_3\right)+\\&\quad+\left(a_2+ib_2\right)\left(A_1+iA_1\right)+\left(A_1+iA_1\right)\left(A_2+iA_2\right)+\left(A_1+iA_1\right)\left(A_3+iA_3\right)\\&=\alpha\beta+\alpha\gamma.\end{aligned}$$ □

O lema que se segue indica um caso particular da sub-distributividade em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$.

Lema 4.63. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$, $D + iD \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Então,*

$$(D + iD)(\alpha + \beta) \subseteq (D + iD)\alpha + (D + iD)\beta.$$

Demonstração. Sejam $\alpha = a + ib + A + iA, \beta = c + id + B + iB \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$, $D + iD \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Aplicando a Proposição 4.12 e as propriedades de operações em $\mathbb{E}$, tem-se:

$$\begin{aligned}(D + iD)(\alpha + \beta) &= (D + iD)(a + c + i(b + d) + A + B + i(A + B)) \\ &= (D + iD)(a + c + i(b + d)) + (D + iD)(A + B + i(A + B)) \\ &= (a + c)D + (b + d)D + D(A + B) + \\ &\quad + i((a + c)D + (b + d)D + D(A + B)) \\ &\subseteq aD + cD + bD + dD + DA + DB + \\ &\quad + i(aD + cD + bD + dD + DA + DB) \\ &= aD + bD + AD + i(aD + bD + AD) + \\ &\quad + cD + dD + BD + i(cD + dD + BD) \\ &= (D + iD)\alpha + (D + iD)\beta. \qquad \square\end{aligned}$$

O teorema que se segue é análogo ao Teorema 3.34 e indica, no caso dos números externos complexos, os termos de correção a acrescentar à fórmula de distributividade.

Teorema 4.64. *Sejam $\alpha = a + ib + A + iA, \beta, \gamma \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então,*

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + (A + iA)\beta + (A + iA)\gamma.$$

Demonstração. Sejam $\alpha = a + ib + A + iA, \beta, \gamma \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$.

Aplicando a Proposição 4.17 e os Lemas 4.63 e 4.50, tem-se

$$\begin{aligned}&\alpha(\beta + \gamma) + (A + iA)\beta + (A + iA)\gamma = \\ &= (a + ib)(\beta + \gamma) + (A + iA)(\beta + \gamma) + (A + iA)\beta + (A + iA)\gamma \\ &= (a + ib)\beta + (a + ib)\gamma + (A + iA)\beta + (A + iA)\gamma \\ &= \alpha\beta + \alpha\gamma. \qquad \square\end{aligned}$$

Tendo em vista os critérios para a distributividade em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$, apresenta-se de seguida algumas notações.

Nota 4.65. *Sejam $\delta, \varepsilon \in \mathbb{E}$. Diz-se que δ é* absolutamente mais preciso *do que η se $\mathrm{N}(\delta) \subseteq \mathrm{N}(\varepsilon)$, e escreve-se*

$$\delta \sqsubseteq \varepsilon.$$

Nota 4.66. *Sejam $\delta, \varepsilon, \eta \in \mathbb{E}$.*

1. *Diz-se que δ é* (relativamente) mais preciso *do que ε, η se δ é (relativamente) mais preciso do que ε ou δ é (relativamente) mais preciso do que η, e escreve-se*

$$\delta \preccurlyeq (\varepsilon, \eta).$$

2. *Se ε, η são opostos com respeito com respeito a $\mathrm{N}(\delta)$ escreve-se*

$$\varepsilon, \eta \perp \mathrm{N}(\delta).$$

E se ε, η não são opostos a $\mathrm{N}(\delta)$ escreve-se

$$(\varepsilon, \eta) \not\leq \mathrm{N}(\delta).$$

Apresenta-se agora os critérios para a distributividade, conforme o que se segue.

Teorema 4.67. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$. Então*

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \tag{4.31}$$

se, e somente se, uma das condições seguintes é satisfeita.

(1) $(\mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Re}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha)) \vee \mathrm{Re}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Re}(\gamma))$ *e* $\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta) + \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\gamma) \sqsubseteq \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\gamma)$.

(2) $(\mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha)) \vee \mathrm{Im}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma))$ *e* $\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\gamma) \sqsubseteq \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta) + \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\gamma)$.

(3) $(\mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Re}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))$ *e* $(\mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha))$.

(4) $(\mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Re}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))$ *e* $\mathrm{Im}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma))$.

(5) $\mathrm{Re}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Re}(\gamma))$ *e* $(\mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha))$.

(6) $\mathrm{Re}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Re}(\gamma))$ *e* $\mathrm{Im}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma))$.

Demonstração. Sejam $\alpha = a_1 + A_1 + i\,(b_1 + A_1)$, $\beta = a_2 + A_2 + i\,(a_2 + b_2)$, $\gamma = a_3 + A_3 + i\,(b_3 + A_3)$ números externos complexos.

Aplicando as propriedades das operações em $\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ e os casos de distributividade já mostrados, tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha\,(\beta+\gamma) &= (\mathrm{Re}\,(\alpha) + i\mathrm{Im}\,(\alpha))\,(\mathrm{Re}\,(\beta) + \mathrm{Re}\,(\gamma) + i\,(\mathrm{Im}\,(\beta) + \mathrm{Im}\,(\gamma)))\\ &= \mathrm{Re}(\alpha)(\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) - \mathrm{Im}(\alpha)(\mathrm{Im}(\beta) + \mathrm{Im}(\gamma)) +\\ &\quad + i[\mathrm{Im}(\alpha)(\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) + \mathrm{Re}(\alpha)(\mathrm{Im}(\beta) + \mathrm{Im}(\gamma))],\end{aligned} \tag{4.32}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha\beta + \alpha\gamma = &\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\gamma) - (\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta) + \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\gamma)) +\\ &+ i[\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Re}(\gamma) + (\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta) + \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Im}(\gamma))].\end{aligned} \tag{4.33}$$

Pela Proposição 4.7, tem-se $\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ se, e somente se,

$$\mathrm{Re}\,(\alpha\,(\beta+\gamma)) = \mathrm{Re}\,(\alpha\beta + \alpha\gamma) \wedge \mathrm{Im}\,(\alpha\,(\beta+\gamma)) = \mathrm{Im}\,(\alpha\beta + \alpha\gamma)\,. \tag{4.34}$$

Como $\alpha\,(\beta+\gamma), \alpha\beta + \alpha\gamma \in \mathbb{E}+i\mathbb{E}$, então $\mathrm{N}\,(\mathrm{Re}\,(\alpha\,(\beta+\gamma))) = \mathrm{N}\,(\mathrm{Im}\,(\alpha\,(\beta+\gamma)))$ e $\mathrm{N}\,(\mathrm{Re}\,(\alpha\beta+\alpha\gamma)) = \mathrm{N}\,(\mathrm{Im}\,(\alpha\beta+\alpha\gamma))$. Observe-se que $\alpha\,(\beta+\gamma)$ e $\alpha\beta+\alpha\gamma$ têm representantes iguais, o número complexo

$$a_1\,(a_2+a_3) - b_1\,(b_2+b_3) + i\,(a_1\,(b_2+b_3) + b_1\,(a_2+a_3))\,.$$

Assim, $\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$ se, e somente se,

$$\mathrm{N}\,(\mathrm{Re}\,(\alpha\,(\beta+\gamma))) = \mathrm{N}\,(\mathrm{Re}\,(\alpha\beta+\alpha\gamma))\,. \tag{4.35}$$

Escreve-se

$$\begin{aligned} R_1 =& \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha(\beta+\gamma))), \\ R_2 =& \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha\beta+\alpha\gamma)), \\ S =& \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha)(\mathrm{Re}(\beta)+\mathrm{Re}(\gamma)), \\ T =& \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha)(\mathrm{Im}(\beta)+\mathrm{Im}(\gamma)), \\ U =& \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta)+\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\gamma)), \\ V =& \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta)+\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\gamma)). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Observe-se que

$$S \subseteq U, \tag{4.37}$$

$$T \subseteq V, \tag{4.38}$$

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma \Leftrightarrow R_1 = R_2, \tag{4.39}$$

$$R_1 = S + T, \tag{4.40}$$

$$R_2 = U + V. \tag{4.41}$$

Tem-se

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma \Leftrightarrow S+T = U+V. \tag{4.42}$$

Nota-se que

$$R_1 = \mathrm{Re}\,(\alpha)\,(A_2+A_3) + \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2+A_3) + (\mathrm{Re}\,(\beta)+\mathrm{Re}\,(\gamma))\,A_1 + (\mathrm{Im}\,(\beta)+\mathrm{Im}\,(\gamma))\,A_1.$$

e

$$R_2 = \mathrm{Re}\,(\alpha)\,(A_2+A_3) + \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2+A_3) + \mathrm{Re}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Re}\,(\gamma)\,A_1 + \mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1.$$

(A) Mostra-se que a disjunção das condições *(1)*, *(2)*, *(3)*, *(4)*, *(5)* e *(6)* é condição suficiente para $\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$

(A.1) Se $\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta)+\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\gamma) \sqsubseteq \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta)+\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\gamma)$, então (4.39) implica que (4.31) é equivalente a $S = U$. Ora, $S = U \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\alpha)(\mathrm{Re}(\beta)+\mathrm{Re}(\gamma)) = \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\gamma)$, então pelo Teorema 3.44

$$S = U \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha)) \vee \mathrm{Re}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma)). \tag{4.43}$$

(A.2) A demonstração é análoga à demonstração em *(A.1)*, e obtém-se

$$T = V \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha)) \vee \mathrm{Im}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma)). \tag{4.44}$$

(A.3) Se $\mathrm{Re}\,(\beta)$ e $\mathrm{Re}\,(\gamma)$, $\mathrm{Im}\,(\beta)$ e $\mathrm{Im}\,(\gamma)$ não são opostos em relação a A_1, então, pelo Teorema 3.41, tem-se $(\mathrm{Re}\,(\beta)+\mathrm{Re}\,(\gamma))\,A_1 = \mathrm{Re}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Re}\,(\gamma)\,A_1$ e $(\mathrm{Im}\,(\beta)+\mathrm{Im}\,(\gamma))\,A_1 = \mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1$ logo, $R_1 = R_2$.

(A.4) Se $(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma)) \not\leq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))$ e $\mathrm{Im}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma))$, considera-se os seguintes casos:

(a) Se $\mathrm{Im}\,(\alpha)\,,\mathrm{Im}\,(\beta)\,,\mathrm{Im}\,(\gamma) \in \mathcal{N}$, então $b_1 \in A_1$, logo $b_1\,(A_2+A_3) \subseteq A_1\,(A_2+A_3)$, e

$b_2 \in A_2, b_3 \in A_3$, logo $b_2 A_1 + b_3 A_1 \subseteq A_1 A_2 + A_1 A_3 = A_1 (A_2 + A_3)$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + (\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) A_1 \\ &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Re}(\beta) A_1 + \mathrm{Re}(\gamma) A_1. \end{aligned}$$

(b) Se $\mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Im}(\beta) \in \mathcal{N}, \mathrm{Im}(\gamma) \notin \mathcal{N}$, tem-se $b_1 (A_2 + A_3), b_2 A_1 \subseteq A_1 (A_2 + A_3)$ e $(b_2 + b_3) A_1 \subseteq (A_2 + b_3) A_1 = A_2 A_1 + b_3 A_1$, logo

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + (\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) A_1 + \mathrm{Im}(\gamma) A_1 \\ &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Re}(\beta) A_1 + \mathrm{Re}(\gamma) A_1 + \mathrm{Im}(\gamma) A_1. \end{aligned}$$

(c) Se $\mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Im}(\gamma) \in \mathcal{N}$ e $\mathrm{Im}(\beta) \notin \mathcal{N}$, de modo análogo, tem-se $b_1 (A_2 + A_3), b_3 A_1 \subseteq A_1 (A_2 + A_3)$ e $(b_2 + b_3) A_1 \subseteq (b_2 + A_3) A_1 = b_2 A_1 + A_1 A_3$, logo

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + (\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) A_1 + \mathrm{Im}(\beta) A_1 \\ &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Re}(\beta) A_1 + \mathrm{Re}(\gamma) A_1 + \mathrm{Im}(\beta) A_1. \end{aligned}$$

(d) Se $\mathrm{Im}(\alpha) \notin \mathcal{N}, \mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma) \in \mathcal{N}$, tem-se $|b_1| > A_1$, logo $A_1 (A_2 + A_3) \subseteq b_1 (A_2 + A_3)$. Também, $b_2 A_1 + b_3 A_1 \subseteq A_1 (A_2 + A_3)$.
Assim, tem-se

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + (\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) A_1 \\ &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Re}(\beta) A_1 + \mathrm{Re}(\gamma) A_1. \end{aligned}$$

(e) Se $\mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Im}(\beta) \notin \mathcal{N}, \mathrm{Im}(\gamma) \in \mathcal{N}$, tem-se $\dfrac{A_1}{b_1} \subseteq \dfrac{A_2}{b_2}$, logo $b_2 A_1 \subseteq b_1 A_2$.
Assim, $b_2 A_1, b_3 A_1, A_1 (A_2 + A_3) \subseteq b_1 (A_2 + A_3)$, logo

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}(\alpha)(A_2 + A_3) + (\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) A_1 \\ &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Re}(\beta) A_1 + \mathrm{Re}(\gamma) A_1. \end{aligned}$$

(f) Se $\mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Im}(\gamma) \notin \mathcal{N}, \mathrm{Im}(\beta) \in \mathcal{N}$, de modo análogo, tem-se $b_2 A_1, b_3 A_1, A_1 (A_2 + A_3) \subseteq b_1 (A_2 + A_3)$, logo

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}(\alpha)(A_2 + A_3) + (\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) A_1 \\ &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Re}(\beta) A_1 + \mathrm{Re}(\gamma) A_1. \end{aligned}$$

(g) Se $\mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma) \notin \mathcal{N}$, tem-se $\left(\dfrac{A_1}{b_1} \subseteq \dfrac{A_2}{b_2} \vee \dfrac{A_1}{b_1} \subseteq \dfrac{A_3}{b_3}\right)$, logo $b_2 A_1 \subseteq b_1 A_2 \vee b_3 A_1 \subseteq b_1 A_3$.
Uma vez que $\mathrm{Re}(\beta)$ e $\mathrm{Re}(\gamma)$ não são opostos em relação a A_1 então, se $\mathrm{Im}(\beta)$ e $\mathrm{Im}(\gamma)$ também não são opostos em relação a A_1, obtém-se o caso *(A.3)*. Então, sem perda de generalidade, suponha-se que $\mathrm{Im}(\beta)$ e $\mathrm{Im}(\gamma)$ são opostos em relação a A_1. Logo, $\mathrm{Im}(\gamma) / \mathrm{Im}(\beta) = -1 + \epsilon$, com $\epsilon \in \oslash$, assim $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\beta)(-1 + \epsilon)$ e, por conseguinte, tem-se

$$\mathrm{Im}(\gamma) A_1 = \mathrm{Im}(\beta)(-1 + \epsilon) A_1 = \mathrm{Im}(\beta) A_1.$$

Assim, com $\mathrm{Im}(\gamma) A_1 = \mathrm{Im}(\beta) A_1$ e $\mathrm{Im}(\beta) A_1 \subseteq \mathrm{Im}(\alpha) A_2 \vee \mathrm{Im}(\gamma) A_1 \subseteq \mathrm{Im}(\alpha) A_3$, tem-se $\mathrm{Im}(\beta) A_1 + \mathrm{Im}(\gamma) A_1 = \mathrm{Im}(\beta) A_1 \subseteq \mathrm{Im}(\alpha)(A_2 + A_3)$. Segue-se que

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}(\alpha)(A_2 + A_3) + (\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Re}(\gamma)) A_1 \\ &= \mathrm{Re}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}(\alpha)(A_2 + A_3) + \mathrm{Re}(\beta) A_1 + \mathrm{Re}(\gamma) A_1 = R_2. \end{aligned}$$

(A.5) Analogamente ao caso *(A.4)*, se $\mathrm{Re}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Re}(\gamma))$ e $(\mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma)) \not\preccurlyeq \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha))$, tem-se os seguintes casos:

(a) Se $\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(\beta)\,, \mathrm{Re}\,(\gamma) \in \mathcal{N}$, então

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + (\mathrm{Im}\,(\beta) + \mathrm{Im}\,(\gamma))\,A_1 \\ &= \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1 = R_2. \end{aligned}$$

(b) Se $\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(\beta) \in \mathcal{N}$ e $\mathrm{Re}\,(\gamma) \notin \mathcal{N}$, então

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + (\mathrm{Im}\,(\beta) + \mathrm{Im}\,(\gamma))\,A_1 + \mathrm{Re}\,(\gamma)\,A_1 \\ &= \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1 + \mathrm{Re}\,(\gamma)\,A_1 = R_2. \end{aligned}$$

(c) Se $\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(\gamma) \in \mathcal{N}$ e $\mathrm{Re}\,(\beta) \notin \mathcal{N}$, então

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + (\mathrm{Im}\,(\beta) + \mathrm{Im}\,(\gamma))\,A_1 + \mathrm{Re}\,(\beta)\,A_1 \\ &= \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1 + \mathrm{Re}\,(\beta)\,A_1 = R_2. \end{aligned}$$

(d) Se $\mathrm{Re}\,(\alpha) \notin \mathcal{N}$, para quaisquer $\mathrm{Re}\,(\beta)\,, \mathrm{Re}\,(\gamma) \in \mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{Re}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + (\mathrm{Im}\,(\beta) + \mathrm{Im}\,(\gamma))\,A_1 \\ &= \mathrm{Re}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2 + A_3) + \mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1 = R_2. \end{aligned}$$

(A.6) Suponha-se que $\mathrm{Re}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Re}(\gamma))$ e $\mathrm{Im}(\alpha) \preccurlyeq (\mathrm{Im}(\beta), \mathrm{Im}(\gamma))$.

$\mathrm{Re}\,(\alpha)$ é mais preciso do que $\mathrm{Re}\,(\beta)$ ou $\mathrm{Re}\,(\gamma)$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ é mais preciso do que $\mathrm{Im}\,(\beta)$ ou $\mathrm{Im}\,(\gamma)$.

Nota-se que, pela Proposição 4.62, se β ou γ é um neutriz complexo, então há distributividade.

Para além disso, tendo em consideração os casos *(A.3)*, *(A.4)* e *(A.5)* pode-se, supor que $\mathrm{Re}\,(\beta)\,, \mathrm{Re}\,(\gamma)$ e $\mathrm{Im}\,(\beta)\,, \mathrm{Im}\,(\gamma)$ são opostos em relação a A_1, logo $\mathrm{Re}\,(\beta)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma)$, $\mathrm{Im}\,(\beta)$ e $\mathrm{Im}\,(\gamma)$ são não-neutriciais e $\mathrm{Re}\,(\beta)\,N = \mathrm{Re}\,(\gamma)\,N$, $\mathrm{Im}\,(\beta)\,N = \mathrm{Im}\,(\gamma)\,N$ para todo neutriz N. Isto implica que $\mathrm{Re}\,(\alpha)$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ sejam também não-neutriciais, pois, por hipótese, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$ é mais preciso do que $\mathrm{Re}\,(\beta)$ ou $\mathrm{Re}\,(\gamma)$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ é mais preciso do que $\mathrm{Im}\,(\beta)$ ou $\mathrm{Im}\,(\gamma)$.

Assim, considera-se $\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(\beta)\,, \mathrm{Re}\,(\gamma)\,, \mathrm{Im}\,(\alpha)\,, \mathrm{Im}\,(\beta)\,, \mathrm{Im}\,(\gamma) \notin \mathcal{N}$. Então

$$\left(\frac{A_1}{a_1} \subseteq \frac{A_2}{a_2} \vee \frac{A_1}{a_1} \subseteq \frac{A_3}{a_3}\right) \wedge \left(\frac{A_1}{b_1} \subseteq \frac{A_2}{b_2} \vee \frac{A_1}{b_1} \subseteq \frac{A_3}{b_3}\right),$$

equivalente a,

$$(a_2 A_1 \subseteq a_1 A_2 \vee a_3 A_1 \subseteq a_1 A_3) \wedge (b_2 A_1 \subseteq b_1 A_2 \vee b_3 A_1 \subseteq b_1 A_3) \tag{4.45}$$

Como, por suposição, $\mathrm{Re}\,(\beta)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma)$ e $\mathrm{Im}\,(\beta)$, $\mathrm{Im}\,(\gamma)$ são opostos em relação a A_1, então existem $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \oslash$ tais que $\mathrm{Re}\,(\gamma) = \mathrm{Re}\,(\beta)\,(-1 + \epsilon_1)$ e $\mathrm{Im}\,(\gamma) = \mathrm{Im}\,(\beta)\,(-1 + \epsilon_2)$. Assim, $\mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 = \mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1$ e $\mathrm{Re}\,(\beta)\,A_1 = \mathrm{Re}\,(\gamma)\,A_1$ e, conjugando com os resultados em (4.45), tem-se:

$$(\mathrm{Re}\,(\beta) + \mathrm{Re}\,(\gamma))\,A_1 \subset \mathrm{Re}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Re}\,(\gamma)\,A_1 = \mathrm{Re}\,(\beta)\,A_1 \subseteq a_1\,(A_2 + A_3)$$

e

$$(\mathrm{Im}\,(\beta) + \mathrm{Im}\,(\gamma))\,A_1 \subset \mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 + \mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1 = \mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1 \subseteq b_1\,(A_2 + A_3)\,,$$

logo $\mathrm{Re}\,(\beta)\,A_1+\mathrm{Re}\,(\gamma)\,A_1+\mathrm{Im}\,(\beta)\,A_1+\mathrm{Im}\,(\gamma)\,A_1 \subseteq \mathrm{Re}\,(\alpha)\,(A_2+A_3)+\mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2+A_3)$. Assim,

$$R_1 = \mathrm{Re}\,(\alpha)\,(A_2+A_3)+\mathrm{Im}\,(\alpha)\,(A_2+A_3) = R_2.$$

(B) Mostra-se que a disjunção das condições *(1)*, *(2)*, *(3)*, *(4)*, *(5)* e *(6)* é condição necessária para $\alpha\,(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

Segue-se de (4.42) que

$$S+T=U+V. \tag{4.46}$$

Ora, (4.46) contradiz $S\subset U\wedge T\subset V$. Então, tem-se os seguintes casos

$$S=U\wedge T\subset V, \tag{4.47}$$

$$S\subset U\wedge T=V, \tag{4.48}$$

$$S=U\wedge T=V. \tag{4.49}$$

No caso (4.47), segue de (4.43) que $\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta)+\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\gamma)\sqsubseteq \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta)+\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\gamma)$ e $(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma))\not\subseteq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))\vee\mathrm{Re}(\alpha)\preccurlyeq(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma))$. Assim, este caso implica a condição *(1)*.

De modo análogo o caso (4.48) implica a condição *(2)*.

Finalmente, suponha-se que se verifica (4.49). Então, tem-se $S=U$ e $T=V$. Deduz-se de (4.43) e (4.44) que

$$[(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma))\not\subseteq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))\vee\mathrm{Re}(\alpha)\preccurlyeq(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma))]\wedge \tag{4.50}$$
$$[(\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma))\not\subseteq \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha))\vee\mathrm{Im}(\alpha)\preccurlyeq(\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma))]. \tag{4.51}$$

Segue da distributividade da disjunção em relação a conjunção que (4.50) é equivalente a

$$\begin{aligned}
&[(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma))\not\subseteq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))\wedge(\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma))\not\subseteq \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha))]\vee\\
&[(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma))\not\subseteq \mathrm{N}(\mathrm{Re}(\alpha))\wedge\mathrm{Im}(\alpha)\preccurlyeq(\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma))]\vee\\
&[\mathrm{Re}(\alpha)\preccurlyeq(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma))\wedge(\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma))\not\subseteq \mathrm{N}(\mathrm{Im}(\alpha))]\vee\\
&[\mathrm{Re}(\alpha)\preccurlyeq(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(\gamma))\wedge\mathrm{Im}(\alpha)\preccurlyeq(\mathrm{Im}(\beta),\mathrm{Im}(\gamma))].
\end{aligned}$$

Assim, conclui-se que o caso (4.49) implica pelo menos uma das condições *(3)*, *(4)*, *(5)* ou *(6)*. □

4.5 O sólido não-ordenado $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$

Nesta secção mostra-se que a estrutura $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$ é um sólido não-ordenado, ou seja, ela satisfaz todos os axiomas algébricos, exceto os Axiomas de ordem.

Dado que, pelos Teoremas 4.46 e 4.59 , $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+)$ e $((\mathbb{E}+i\mathbb{E})\setminus(\mathcal{N}+i\mathcal{N})\,,\cdot)$ são assembleias, então os Axiomas para a adição e os Axiomas para a multiplicação são satisfeitos em $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$.

A proposição, que se segue, mostra que $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$ satisfaz os Axiomas que relacionam a adição e a multiplicação. Então, pela Definição 2.6, $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$ é uma associação.

Proposição 4.68. *As funções* e, s, u *e* d *gozam das seguintes propriedades, para quaisquer* $\alpha,\beta\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$*:*

(1) Existe um $\gamma \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$ *tal que* $\mathrm{e}(\alpha)\beta = \mathrm{e}(\gamma)$*;*

(2) $\mathrm{e}(\alpha\beta) = \beta\mathrm{e}(\alpha) + \alpha\mathrm{e}(\beta)$*;*

(3) Se $\alpha \neq \mathrm{e}(\alpha)$*, então* $\mathrm{e}(\mathrm{u}(\alpha)) = \mathrm{e}(\alpha)\,\mathrm{d}(\alpha)$*;*

(4) Para todo $\gamma \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$*, tem-se* $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \mathrm{e}(\alpha)\beta + \mathrm{e}(\alpha)\gamma$*;*

(5) $\mathrm{s}(\alpha\beta) = \mathrm{s}(\alpha)\beta = \alpha\mathrm{s}(\beta)$*;*

(6) $\alpha\beta = \mathrm{e}(\alpha\beta) \Leftrightarrow \alpha = \mathrm{e}(\alpha) \vee \beta = \mathrm{e}(\beta)$*.*

Demonstração. Sejam $\alpha = a_1 + ib_1 + A_1 + iA_1, \beta = a_2 + ib_2 + A_2 + iA_2 \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então,

(1) Aplicando as Proposições 4.12 e 4.9, tem-se

$$\begin{aligned} e(\alpha)\beta &= (A_1 + iA_1)(a_2 + ib_2 + A_2 + iA_2) \\ &= (A_1 + iA_1)(a_2 + ib_2) + (A_1 + iA_1)(A_2 + iA_2) \\ &= a_2A_1 + b_2A_1 + i(a_2A_1 + b_2A_1) + A_1A_2 + i(A_1A_2) \\ &= a_2A_1 + b_2A_1 + A_1A_2 + i(a_2A_1 + b_2A_1 + A_1A_2). \end{aligned}$$

Tomando $A = a_2A_1 + b_2A_1 + A_1A_2$, dados $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $\gamma = a + ib + A + iA$.

(2) Aplicando a Proposição 4.13, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha\beta = {} & (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1)(A_2 + iA_2) + (a_2 + ib_2)(A_1 + iA_1) + \\ & + (A_1 + iA_1)(A_2 + iA_2), \end{aligned}$$

Assim, aplicando a propriedade comutativa e associativa da adição, a Proposição 4.12 e o Corolário 4.10, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{e}(\alpha\beta) &= (a_1 + ib_1)(A_2 + iA_2) + (a_2 + ib_2)(A_1 + iA_1) + (A_1 + iA_1)(A_2 + iA_2) \\ &= (a_1 + ib_1)(A_2 + iA_2) + (a_2 + ib_2)(A_1 + iA_1) + (A_1 + iA_1)(A_2 + iA_2) + \\ &\quad + (A_1 + iA_1)(A_2 + iA_2) \\ &= (a_2 + ib_2)(A_1 + iA_1) + (A_1 + iA_1)(A_2 + iA_2) + \\ &\quad + (a_1 + ib_1)(A_2 + iA_2) + (A_1 + iA_1)(A_2 + iA_2) \\ &= (a_2 + ib_2 + A_2 + iA_2)(A_1 + iA_1) + (a_1 + ib_1 + A_1 + iA_1)(A_2 + iA_2) \\ &= \beta\mathrm{e}(\alpha) + \alpha\mathrm{e}(\beta). \end{aligned}$$

(3) Se $\alpha \neq \mathrm{e}(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha)$, então, pela Proposição 4.3, tem-se $\alpha \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Logo

$$\mathrm{e}(\mathrm{u}(\alpha)) = \mathrm{e}\left(1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}\right) = \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha} = \mathrm{N}(\alpha)\frac{1}{\alpha} = \mathrm{e}(\alpha)\,\mathrm{d}(\alpha).$$

(4) Seja $\gamma \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então, pelo Teorema 4.64, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha\gamma &= (\beta + \gamma)\alpha + (A_1 + iA_1)\beta + (A_1 + iA_1)\gamma \\ &= (\beta + \gamma)\alpha + \mathrm{e}(\alpha)\beta + \mathrm{e}(\alpha)\gamma. \end{aligned}$$

(5) Aplicando a Proposição 4.13, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a_1+ib_1+A_1+iA_1)(a_2+ib_2+A_2+iA_2)\\ &= (a_1+ib_1)(a_2+ib_2)+(a_1+ib_1)(A_2+iA_2)+(a_2+ib_2)(A_1+iA_1)+\\ &\quad +(A_1+iA_1)(A_2+iA_2)\,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{s}(\alpha\beta) &= -(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)+(a_1+ib_1)(A_2+iA_2)+(a_2+ib_2)(A_1+iA_1)+\\ &\quad +(A_1+iA_1)(A_2+iA_2)\\ &= (-(a_1+ib_1)+A_1+iA_1)(a_2+ib_2+A_2+iA_2)\\ &= -(a_1+ib_1A_1+iA_1)(a_2+ib_2+A_2+iA_2)\\ &= \mathrm{s}(\alpha)\,\beta,\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}\mathrm{s}(\alpha\beta) &= -(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)+(a_1+ib_1)(A_2+iA_2)+(a_2+ib_2)(A_1+iA_1)+\\ &\quad +(A_1+iA_1)(A_2+iA_2)\\ &= (a_1+ib_1+A_1+iA_1)(-(a_2+ib_2)+A_2+iA_2)\\ &= (a_1+ib_1+A_1+iA_1)(-(a_2+ib_2+A_2+iA_2))\\ &= \alpha\mathrm{s}(\beta)\,.\end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{s}(\alpha\beta)=\mathrm{s}(\alpha)\,\beta=\alpha\mathrm{s}(\beta)$.

(6) Se $\alpha\neq\mathrm{e}(\alpha)=\mathrm{N}(\alpha)$ e $\beta\neq\mathrm{e}(\beta)=\mathrm{N}(\beta)$, então, pela Proposição 4.3, tem-se $\alpha,\beta\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$. Assim, pela Proposição 4.49, tem-se $\alpha\beta\notin\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, logo, pela Proposição 4.3, tem-se $\alpha\beta\neq\mathrm{N}(\alpha\beta)=\mathrm{e}(\alpha\beta)$. Então,

$$\alpha\beta=\mathrm{e}(\alpha\beta)\Rightarrow\alpha=\mathrm{e}(\alpha)\vee\beta=\mathrm{e}(\beta)\,. \tag{4.52}$$

Por outro lado, se $\alpha=\mathrm{e}(\alpha)=\mathrm{N}(\alpha)$ ou $\beta=\mathrm{e}(\beta)=\mathrm{N}(\beta)$, então, pela Proposição 4.12, tem-se $\alpha\beta\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, assim, aplicando a Proposição 4.3, tem-se $\alpha\beta=\mathrm{N}(\alpha\beta)=\mathrm{e}(\alpha\beta)$. Então,

$$\alpha=\mathrm{e}(\alpha)\vee\beta=\mathrm{e}(\beta)\Rightarrow\alpha\beta=\mathrm{e}(\alpha\beta)\,. \tag{4.53}$$

Por (4.52) e (4.53), tem-se $\alpha\beta=\mathrm{e}(\alpha\beta)\Leftrightarrow\alpha=\mathrm{e}(\alpha)\vee\beta=\mathrm{e}(\beta)$. □

A proposição, que se segue, mostra que a associação $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$ satisfaz os Axiomas de existência.

Proposição 4.69. *A associação $(\mathbb{E}+i\mathbb{E},+,\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) Existe um $m\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ tal que, para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se $m+\alpha=\alpha$;

(2) Existe um $u\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ tal que, para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se $u\alpha=\alpha$;

(3) Existe um $M\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ tal que, para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, tem-se $e(\alpha)+M=M$;

(4) Existe um $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ tal que, $\mathrm{e}(\alpha)\neq m$ e $\mathrm{e}(\alpha)\neq M$;

(5) Para todo $\alpha\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, existe um $z\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$ de modo que $\alpha=z+\mathrm{e}(\alpha)$ e $\mathrm{e}(z)=0$;

(6) Para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathcal{N}+i\mathcal{N}$, $\alpha\subset\beta$, existe um $\gamma\in\mathbb{E}+i\mathbb{E}$, $\gamma\neq\mathrm{e}(\gamma)$, tal que $\alpha+\gamma\neq\alpha$ e $\beta+\gamma=\beta$.

Demonstração. Sejam $m = \{0\} + i\{0\}, u = 1 + \{0\} + i\{0\}, M = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Seja $\alpha = a + ib + A + iA \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$ arbitrário. Então,

(1) Aplicando a Proposição 4.11, tem-se

$$\begin{aligned} m + \alpha &= (\{0\} + i\{0\}) + (a + ib + A + iA) \\ &= a + ib + A + \{0\} + i(A + \{0\}) = a + ib + A + iA = \alpha. \end{aligned}$$

(2) Aplicando a Proposição 4.13, tem-se

$$\begin{aligned} u\alpha &= (1 + \{0\} + i\{0\})(a + ib + A + iA) \\ &= a + ib + A + iA + (a + ib)(\{0\} + i\{0\}) + (\{0\} + i\{0\})(A + iA) \\ &= a + ib + A + iA + a\{0\} + b\{0\} + A\{0\} + i(a\{0\} + b\{0\} + A\{0\}) \\ &= \alpha + \{0\} + i\{0\} = \alpha. \end{aligned}$$

(3) Uma vez que $A \subseteq \mathbb{R}$, para $M = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$, aplicando o Corolário 4.10, tem-se

$$\mathrm{e}(\alpha) + M = (A + iA) + (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = M.$$

(4) Seja $\alpha = \oslash + i\oslash \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então $\mathrm{e}(\alpha) = \oslash + i\oslash$, logo $\mathrm{e}(\alpha) \neq m$ e $\mathrm{e}(\alpha) \neq M$.

(5) Seja $\alpha \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$. Então, pela Definição 4.1, existem $a, b \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{N}$ tais que $\alpha = a + ib + A + iA$. Logo $\alpha = z + \mathrm{e}(\alpha)$, com $z = a + ib$ e $\mathrm{e}(z) = \mathrm{e}(a + ib) = \{0\} + i\{0\} = 0$.

(6) Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$, $\alpha + \beta \neq \alpha$ e $\alpha + \beta = \beta$. Então, aplicando o Corolário 4.10, tem-se $\alpha \subset \beta$, logo existe $b \in \mathbb{C}$, tal que $b \in \beta$ e $b \notin \alpha$.

Seja $\gamma = b$. Então, $\gamma \neq \mathrm{e}(\gamma)$, pois $\gamma \in \mathbb{C}$ e $\gamma \neq 0$. Como $\gamma \notin \alpha$, $\gamma \in \beta$, tem-se $\alpha + \gamma \neq \alpha$ e $\beta + \gamma = \beta$. □

No contexto dos números externos reais, dá-se realce ao estudo dos neutrizes idempotentes. Recorda-se que, pelo Teorema 3.24, todo neutriz N é produto de um número real não nulo p e um neutriz idempotente I. Também, ideais maximais, de um neutriz idempotente, são idempotentes. Pode-se ver no Capítulo 5 que neutrizes idempotentes permitem a simplificação de equações. Através do estudo que seguidamente se apresenta, constata-se que neutrizes idempotentes em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$ têm propriedades semelhantes às que se verificam em $\mathbb{E}$.

Definição 4.70. *Seja $I + iI \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Diz-se que $I + iI$ é idempotente se $(I + iI)(I + iI) = I + iI$.*

Proposição 4.71. *Seja $I + iI \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Então $I + iI$ é idempotente se, e somente se, I é idempotente.*

Demonstração. (1) Suponha-se que I é idempotente, ou seja, $II = I$. Então, aplicando a Proposição 4.12, tem-se

$$(I + iI)(I + iI) = II + i(II) = I + iI,$$

logo $I + iI$ é idempotente.

(2) Suponha-se que $I + iI$ é idempotente. Então

$$(I + iI)(I + iI) = II + i(II) = I + iI,$$

logo $II = I$, ou seja, I é idempotente. □

Exemplo 4.72. *$\oslash + i\oslash$ e $\pounds + i\pounds$ são idempotentes.*

Definição 4.73. *Seja $I + iI$ um neutriz idempotente tal que $1 \in I + iI$. Um neutriz $J + iJ$ é um ideal de $I + iI$ se $(I + iI)(J + iJ) \subseteq J + iJ$. Um ideal $M + iM \subset I + iI$ diz-se* maximal *se, para todo ideal $J + iJ$ tal que $M + iM \subseteq J + iJ \subseteq I + iI$, tem-se $J + iJ = M + iM$ ou $J + iJ = I + iI$.*

Exemplo 4.74. *$\oslash + i\oslash$ é o ideal maximal de $\pounds + i\pounds$.*

Proposição 4.75. *Sejam uma neutriz idempotente $I + iI$ tal que $1 \in I + iI$, e $M + iM$ o seu ideal maximal. Então, $(I + iI)(M + iM) = M + iM$.*

Demonstração. Uma vez que $1 \in I + iI$, então, aplicando a Proposição 4.12 e o Corolário 4.10, tem-se

$$(I + iI)(M + iM) = (1 + I + iI)(M + iM) = M + iM + (I + iI)(M + iM),$$

logo $M + iM \subseteq (I + iI)(M + iM)$. Por outro lado, como $M + iM$ é o ideal maximal de $I + iI$, então $(I + iI)(M + iM) \subseteq M + iM$. Assim, tem-se

$$(I + iI)(M + iM) = M + iM. \qquad \square$$

Proposição 4.76. *Para toda neutriz $A + iA$, existem $z \in \mathbb{C}$ e um neutriz idempotente γ tais que $\alpha = z\gamma$.*

Demonstração. Seja $A + iA \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Pelo Teorema 3.24, existem um número real p e um, e um só, neutriz idempotente I tais que $A = pI$. Seja $\gamma = I + iI$ e $z = p$. Pela Proposição 4.71, tem-se que γ é idempotente. Também, aplicando a Proposição 4.12, tem-se

$$z\gamma = p(I + iI) = pI + i(pI) = A + iA = \alpha. \qquad \square$$

Para concluir esta secção, nota-se que os Teoremas 4.46 e 4.59 e as Proposições 4.69 e 4.68 implicam o seguinte teorema.

Teorema 4.77. *A estrutura $(\mathbb{E} + i\mathbb{E}, +, \cdot)$ é um sólido não-ordenado.*

5

Equações polinomiais em $\mathbb{E}$

Neste capítulo estuda-se as *inclusões polinomiais* da forma

$$P(x) \subseteq N, \tag{5.1}$$

em que os coeficientes de P são números externos, N é uma neutriz e $\deg(P) = m$, onde m é um número natural standard.

No caso de P ter só coeficientes reais, identifica-se $P(x) \in N$ com $\{P(x)\} \subseteq N$.

Definição 5.1. *O* (conjunto)-solução *da equação em* (5.1) *é*

$$S = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \subseteq N\}.$$

Em muitos casos, essas inclusões são equações, ou seja, $P(S) = N$. Pode-se ver, mais abaixo, que isto se verifica quando os coeficientes dos polinómios são números reais.

De facto as inclusões polinomiais são transformadas num sistema com inclusões neutriciais e uma inclusão polinomial, em que os coeficientes do polinómio são números reias.

Mostra-se que as soluções, quando existirem, são números externos.

Pode acontecer que a equação (5.1) tenha $1 \leq n \leq m$ raízes, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Neste caso, estuda-se a relação que existe entre as fatorizações

$$\Phi(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n) \tag{5.2}$$

e

$$F_n(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \tag{5.3}$$

em que $r_i \in \rho_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Assim, neste capítulo os conteúdos são apresentados em duas secções: na Secção 5.1 apresenta-se o estudo das raízes da equação (5.1) e na Secção 5.2 estuda-se a relação entre as fatorizações (5.2) e (5.3).

5.1 Determinação das raízes da equação polinomial em $\mathbb{E}$

Sejam um número standard $m \in \mathbb{N}$, os números externos $\alpha_0 = a_0 + A_0$, $\alpha_1 = a_1 + A_1$, ..., $\alpha_m = a_m + A_m \in \mathbb{E}$ e uma neutriz $N \neq \{0\}$. Estuda-se a equação

$$P(x) = \alpha_m x^m + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \subseteq N. \tag{5.4}$$

Começa-se por transformar a equação (5.4) num sistema de equações formado por uma equação, em que o primeiro membro é um polinómio, com coeficientes reais e cujo termo dominante tem coeficiente igual a 1, e o segundo membro igual a uma neutriz idempotente I $(II = I)$, e um conjunto de equações neutriciais.

Para começar, como N é um grupo, para $\alpha = a + A \in \mathbb{E}$ e $k \in \mathbb{N}$, a inclusão

$$(a + A)x^k \subseteq N$$

reduz-se ao sistema

$$\begin{cases} ax^k \in N \\ Ax^k \subseteq N. \end{cases}$$

Exemplo 5.2. *Seja* $\varepsilon \simeq 0$, $\varepsilon \neq 0$.

(1) A equação $(1+\varepsilon \pounds)x - 2 \subseteq \oslash$ *reduz-se ao sistema* $\begin{cases} x - 2 \in \oslash \\ \varepsilon \pounds x \subseteq \oslash \end{cases}$. *Por inspeção, pode-se ver que* $x = 2 + \oslash$ *é solução desta equação, uma vez que* $\varepsilon \pounds (2 + \oslash) \subseteq \oslash$.

(2) A equação $(1 + \oslash)x - 2 \subseteq \varepsilon \pounds$ *reduz-se ao sistema* $\begin{cases} x - 2 \in \varepsilon \pounds \\ \oslash x \subseteq \varepsilon \pounds \end{cases}$. *Por inspeção,* $x = 2 + \varepsilon \pounds$ *é candidato à solução. Contudo, a equação não tem solução pois* $\oslash(2 + \varepsilon y) = \oslash \nsubseteq \varepsilon \pounds$, *para todo* $y \in \pounds$.

Pelo Teorema 3.24, existe um neutriz idempotente I e um número real $p \neq 0$ tais que $N = pI$.

Supondo que P tem termos com coeficientes não-neutriciais, seja $n \leq m$ o índice maximal para o qual α_n é não-neutricial. Assim, a menos de uma mudança de variável, pode-se assumir que $a_n = 1$ e estudar o seguinte sistema

$$\begin{cases} R(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in I \\ A_m x^m \subseteq I \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ A_1 x \subseteq I \\ A_0 \subseteq I. \end{cases} \tag{5.5}$$

De facto, a mudança de variável referida acima é da forma $y = \sqrt[n]{\frac{a_n}{p}}x$. O polinómio R em (5.5) denomina-se por *polinómio representante reduzido* de P.

Ao longo deste capítulo, I refere-se ao neutriz idempotente tal que $N = pI$ e R representa o polinómio representante reduzido de P.

Se todos os coeficientes de (5.4) são neutriciais, então em (5.5) só restam equações neutriciais. A condição necessária para a existência de soluções é $A_0 \subseteq I$.

As equações neutriciais são resolvidas pelos neutrizes $I : A_1, \ldots, I : (A_m)^{\frac{1}{m}}$.

Definição 5.3. *Seja o sistema* (5.5). *Então, o seu* conjunto-viabilidade $\mathcal{F}$ *é definido por*

$$\mathcal{F} = (I : A_1) \cap \cdots \cap \left(I : (A_m)^{1/m}\right). \tag{5.6}$$

Note-se que $\mathcal{F}$ é uma neutriz. Pois, pela Proposição 3.14, a divisão de duas neutrizes é uma neutriz e, uma vez que as neutrizes estão ordenadas pela relação de inclusão, pela Indução Externa, a interseção de um número standard de neutrizes é a menor de todas, ou seja, uma neutriz.

De agora em diante, assume-se que $A_0 \subseteq I$ e que o sistema é não-singular, isto é, que $n \geq 1$. Então o sistema em (5.5) é equivalente a

$$\begin{cases} R(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in I \\ x \in \mathcal{F} \end{cases} \tag{5.7}$$

O polinómio R em (5.7) pode ser escrito na forma

$$R(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_l) \left((x - s_1)^2 + c_1\right) \cdots \left((x - s_m)^2 + c_m\right), \tag{5.8}$$

onde $r_1, \ldots, r_l, s_1, \ldots, s_m, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, $c_1, \cdots, c_m > 0$.

Definição 5.4. *Um número real r diz-se I-*próximo-de-raiz *de R se $R(r) \in I$. A multiplicidade de um I-próximo-de-raiz r é a soma dos graus de todos os fatores de*

$$R(r) = (r - r_1) \cdots (r - r_l) \left((r - s_1)^2 + c_1\right) \cdots \left((r - s_m)^2 + c_m\right) \tag{5.9}$$

que pertencem a I.

Note-se que $c_j \in I$ é condição necessária para contagem da multiplicidade do I-próximo-de-raiz r no fator $(r - s_j)^2 + c_j$.

Toda a raiz r_i de R é um seu I-próximo-de-raiz na equação $R(x) \in I$. Contudo, x^2+1 não tem raízes reais, mas se r é limitado, então r é um seu $\pounds$-próximo-de-raiz, com multiplicidade 2, em $x^2+1 \in \pounds$.

De agora em diante, assume-se que R tem pelo menos um I-próximo-de-raiz.

Definição 5.5. *O* conjunto-solução S *da equação* $R(x) \in I$ *é definido por*

$$S = \{x \in \mathbb{R} : R(x) \in I\}\,.$$

Uma sua raiz ρ *é um subconjunto convexo maximal de* S. *A* multiplicidade *da raiz* ρ *é a soma dos graus de todos os fatores de*

$$R(\rho) = (\rho - r_1)\cdots(\rho - r_l)\left((\rho - s_1)^2 + c_1\right)\cdots\left((\rho - s_m)^2 + c_m\right) \tag{5.10}$$

que estão contidos em I. *A* solução-admissível $\mathcal{S}$ *é a interseção da união de todas as raízes com* $\mathcal{F}$.

Exemplo 5.6. *Sejam* $\varepsilon \simeq 0$, $\varepsilon \neq 0$ *e* $\omega \simeq \infty$.

(1) $x = 2 + \oslash$ *é a raiz de* $(1 + \varepsilon\pounds)x - 2 \subseteq \oslash$.

(2) $\pounds$ *é a raiz de* $x^2 + 1 \in \pounds$.

(3) Por inspeção, as raízes da equação

$$(x-2)(x+5) \in \oslash. \tag{5.11}$$

são os números externos disjuntos $\rho_1 = 2 + \oslash$ *e* $\rho_2 = -5 + \oslash$.

(4) Também, por inspeção, as raízes da equação

$$(x-2)(x+\omega) \in \oslash. \tag{5.12}$$

são os números externos disjuntos $\rho_1 = 2 + \oslash/\omega$ *e* $\rho_2 = -\omega + \oslash/\omega$.

Teorema 5.7. *Considere-se o sistema* (5.7). *Então,*

(1) Toda a raiz ρ *é um número externo da forma* $\rho = r + tI$, *com* $r \in \mathbb{R}$ *e* $t \in \pounds_I$.

(2) O conjunto-viabilidade $\mathcal{F}$ *é uma neutriz externo.*

(3) A solução-admissível $\mathcal{S}$ *é uma união de cardinalidade standard de números externos.*

Já vimos que $\mathcal{F}$ é uma neutriz. Também, a interseção de um número externo com uma neutriz é um número externo. Consequentemente, podemos deduzir o Teorema 5.7 diretamente de *(1)*.

A demonstração de *(1)* baseia-se na Indução Externa em grau n. Distingue-se o caso $n = 1$ [7], o caso $n = 2$, com R irredutível ou com raiz dupla, e os passos de indução.

Caso (1) $n = 1$: A solução da equação $x + a \in I$ é o número externo $-a + I$.

Caso (2) $n = 2$**,** R **irredutível ou com raiz dupla**: Seja $D = b^2 - 4c$ o discriminante de $x^2 + bx + c = 0$. A solução da equação

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{D}{4} \in I$$

é o conjunto vazio, se $D < I$, e, se $D \in I$ a raiz dupla é o número externo $-\frac{b}{2} + I$, pois $I^2 - \frac{D}{4} = I - \frac{D}{4} = I$.

Caso (3) $n = 2$**,** R **com duas raízes, e** $n > 2$: destaca-se vários resultados preliminares.

Como na fórmula (5.8), escreve-se

$$R(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_l) \left((x - s_1)^2 + c_1\right) \cdots \left((x - s_m)^2 + c_m\right), \tag{5.13}$$

onde $r_1, \ldots, r_l, s_1, \ldots, s_m, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, $c_1, \cdots, c_m > 0$.

Define-se $J = \{j \in \mathbb{N} : c_j \in I\}$ e

$$G = \cup_{1 \le i \le l}(r_i + I) \bigcup \cup_{j \in J}(s_j + I). \tag{5.14}$$

Teorema 5.8. *$R(x) \in I \Rightarrow x \in G$.*

Demonstração. Se $x \notin G$, então valor absoluto de cada fator f_k em (5.13) é maior que I. Logo

$$|R(x)| > |f_1 \cdots f_l (f_{l+1})^2 \cdots (f_m)^2| > I^n = I. \qquad \square$$

Teorema 5.9. *Seja $r \in \mathbb{R}$. Se $G \subseteq r + I$ e r é um I-próximo-de-raiz de R, com multiplicidade n, então $\rho = r + I$ é a raiz de R, com multiplicidade n.*

Demonstração. Pela fórmula (5.8), $n = l + 2m$. Se r é um I-próximo-de-raiz de R, com multiplicidade n, então, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, tem-se $r - r_i \in I$ e, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tem-se $(r - s_j)^2 + c_j \in I$. Como, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tem-se $c_j > 0$, $(r - s_j)^2 \ge 0$ e $r - s_j \in I \Leftrightarrow (r - s_j)^2 \in I$, então

$$(r - s_j)^2 + c_j \in I \Leftrightarrow r - s_j \in I \wedge c_j \in I.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
R(\rho) &= (\rho - r_1) \cdots (\rho - r_l) \left((\rho - s_1)^2 + c_1\right) \cdots \left((\rho - s_m)^2 + c_m\right) \\
&= (r + I - r_1) \cdots (r + I - r_l) \left((r + I - s_1)^2 + c_1\right) \cdots \left((r + I - s_m)^2 + c_m\right) \\
&= (I) \cdots (I) \left(I^2 + c_1\right) \cdots \left(I^2 + c_m\right) \\
&= I^n = I.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.8, $R(x) \neq I$ sempre que $x \notin G \subseteq r + I$. Assim, $\rho = r + I$ é a raiz de $R(x) \in I$, com multiplicidade n. $\square$

Teorema 5.10. *Seja r um I-próximo-de-raiz de R, de multiplicidade menor que n. Então, existem um polinómio Q, com $1 \le \deg(Q) < \deg(R)$, e $d > I$ tais que, para $x \in r + I$, tem-se*

$$R(x) \in I \Leftrightarrow Q(y) \in I, \tag{5.15}$$

onde $y = xd^{1/g}$ e $g = \deg(Q)$.

Porque $\deg(Q) < \deg(R)$, é possível aplicar os passos de indução na demonstração do Teorema 5.7. A raiz $y = r' + t'I$, com $t' \in \pounds_I$, do polinómio Q corresponde a raiz $x = r + tI$ do polinómio R, com $t = \frac{t'}{d^{1/g}} \in \pounds_I$.

Exemplo 5.11. *Estuda-se as raízes do polinómio de grau* 2*, na forma redutível. Seja*

$$(x-2)(x+5) \in \oslash. \tag{5.16}$$

cujas raízes são $\rho_1 = 2+\oslash$ *e* $\rho_2 = -5+\oslash$*. Um método de cálculo direto consiste em reduzir o grau, obtendo uma equação linear já resolvida. De facto, para* $1 \leq x \leq 3$ *tem-se* $6 \leq x+5 \leq 8 \subseteq \frac{1}{@}$*, então, como* $\oslash$ *é estável pela divisão por números apreciáveis, para* $x \in [1,3]$ *a equação* (5.16) *é equivalente a*

$$x-2 \in \frac{\oslash}{x+5} \subseteq \oslash @ = \oslash. \tag{5.17}$$

A raiz de (5.17) *é* $\rho_1 = 2+\oslash$*. De uma forma análoga, pode-se obter a raíz* $\rho_2 = 5+\oslash$*.*

A justificação do método descrito acima é dado pelo Teorema de Substituição - ver [6], Teorema 9.2.1 para números externos, em [6]. Para uma boa compreensão deste teorema, antes introduz-se a seguinte definição.

Definição 5.12 (Ver [6])**.** *O* módulo $\mathrm{M}(\alpha)$ *de um número externo* α *é definido por*

$$\mathrm{M}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha x = \alpha\}.$$

$\mathrm{M}(\alpha)$ é o conjunto dos números reais que deixam α invariante pela multiplicação.

Se α é não-neutricial, tem-se $\mathrm{M}(\alpha) = \mathcal{R}(\alpha)$, com $\mathcal{R}(\alpha) = 1 + A/a \subseteq 1+\oslash$. Se $\alpha = A$, pode-se escrever $A = pJ$, com $p \in \mathbb{R}$ e J uma neutriz idempotente, isto é, $J = JJ$. Se $1 < J$, então J admite ideal maximal I, e $\mathrm{M}(\alpha) = J \backslash I$. Se $J < 1$, então é ideal maximal de uma neutriz idempotente K, com $1 < K$, e $\mathrm{M}(\alpha) = K \backslash J$. Note-se que, em ambos os casos, $\mathrm{M}(\alpha) \subseteq @$ e, assim, $\mathrm{M}(\alpha) = 1/\mathrm{M}(\alpha)$, logo os seus elementos também deixam α invariante pela divisão.

Teorema 5.13 (Teorema de Substituição - ver [6], Teorema 9.2.1)**.** *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função interna,* $S \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\alpha = a + A \in \mathbb{E}$*. Seja a equação*

$$f(x) \in \alpha, \tag{5.18}$$

com $x \in S$*. Então,*

(1) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função interna tal que* $f(x) - g(x) \in \mathrm{N}(\alpha) = A$*, para todo* $x \in S$*. Então, em* S *as equações* (5.18) *e* $g(x) \in \alpha$ *têm as mesmas soluções.*

(2) Suponha-se que f *é diferente de zero em* S*. Seja* $h : S \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *uma função interna tal que* $f(x)/h(x) \in \mathrm{M}(\alpha)$ *para todo* $x \in S$*. Então, em* S *as equações* (5.18) *e* $h(x) \in \alpha$ *têm as mesmas soluções.*

Nota 5.14. *No Teorema 5.13, (2) ainda se verifica se* f *e* h *têm os mesmos zeros em* S*.*

Demonstração do Teorema 5.13. Seja $x \in S$.

(1) Se $g(x) \in \alpha$, então $f(x) \in g(x) + A \subseteq \alpha + A = \alpha$. Por outro lado, se $f(x) \in \alpha$, então $g(x) \in f(x) - A \subseteq \alpha + A = \alpha$. Assim $f(x) \in \alpha$ é equivalente a $g(x) \in \alpha$.

(2) Se $h(x) \in \alpha$, então $f(x) \in \alpha\mathrm{M}(\alpha) = \alpha$. Por outro lado, se $f(x) \in \alpha$, então $h(x) \in f(x)/\mathrm{M}(\alpha) \subseteq \alpha\mathrm{M}(\alpha) = \alpha$. Assim, $f(x) \in \alpha$ é equivalente a $h(x) \in \alpha$. □

Demonstração do Teorema 5.10. Considera-se os conjuntos

$$\begin{aligned}
L &= \{i \in \{1,\dots,l\} : r_i \in r + I\},\\
M &= \{j \in \{1,\dots,m\} : s_j \in r + I \wedge c_j \in I\},\\
L' &= \{1,\dots,l\} \setminus L,\\
M' &= \{1,\dots,m\} \setminus M.
\end{aligned}$$

Se $L' \cup M' = \emptyset$, então $r - r_i \in I$, para todo $i \in \{1,\cdots,l\}$, e $(r-s_j)^2 + c_j \in I^2 + I = I$, para todo $j \in \{1,\cdots,m\}$, o que contradiz o facto de que a multiplicidade do I-próximo-de-raiz r é no máximo $n-1$. Assim, $L' \neq \emptyset$ ou $M' \neq \emptyset$. Toma-se

$$\begin{aligned}
Q'(x) &= \prod_{i\in L}(x-r_i)\prod_{j\in M}((x-s_j)^2+c_j),\\
d &= \prod_{i\in L'}|r-r_i|\prod_{j\in M'}((r-s_j)^2+c_j),\\
h &= \#L' + \#M'.
\end{aligned}$$

Como r tem multiplicidade no máximo $n-1$ e $h \geq 1$, então $1 \leq \deg(Q') < \deg(R)$. Para $i \in L'$, tem-se $|r - r_i| > I$ e para $j \in M'$, tem-se $|r - s_j| > I$ ou $c_j > I$, o que implica $(r-s_j)^2 + c_j > I$. Assim,

$$d > I^{\#L'+\#M'} = I^h = I.$$

Seja $x \in r + I$. Para $i \in L'$, tem-se

$$\frac{x-r_i}{r-r_i} \in \frac{r-r_i+I}{r-r_i} = 1 + \frac{I}{r-r_i} \subseteq 1 + \oslash.$$

Agora, seja $j \in M'$. Se $s_j \notin r + I$, tem-se

$$\frac{x-s_j}{r-s_j} \in \frac{r-s_j+I}{r-s_j} = 1 + \frac{I}{r-s_j}$$

e

$$\left(1+\frac{I}{r-s_j}\right)^2 = 1 + \frac{I}{r-s_j}.$$

Pelo facto de que $c_j > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{(x-s_j)^2+c_j}{(r-s_j)^2+c_j} &\in \frac{(1+\frac{I}{r-s_j})^2(r-s_j)^2+c_j}{(r-s_j)^2+c_j}\\
&= \frac{(r-s_j)^2+c_j+I(r-s_j)}{(r-s_j)^2+c_j}\\
&= 1 + \frac{I(r-s_j)}{(r-s_j)^2+c_j}\\
&\subseteq 1 + \frac{I}{r-s_j} \subseteq 1 + \oslash.
\end{aligned}$$

Se $s_j \in r + I$, tem-se $c_j > I$. Também, $x - s_j \in I$, assim $(x-s_j)^2 \in I$. Novamente, obtém-se

$$\frac{(x-s_j)^2+c_j}{(r-s_j)^2+c_j} \in \frac{(r-s_j)^2+c_j+I}{(r-s_j)^2+c_j} = 1 + \frac{I}{(r-s_j)^2+c_j} \subseteq 1 + \oslash.$$

Combinando esses resultados, conclui-se que

$$\frac{R(x)}{Q'(x)\,d} = \frac{\prod_{i\in L'}(x-r_i)\prod_{j\in M'}\left((x-s_j)^2+c_j\right)}{d} \subseteq (1+\oslash)^h = 1+\oslash \subset @_I.$$

Assim, pelo Teorema de Substituição - ver [6], Teorema 9.2.1, tem-se

$$R(x)\in I \Leftrightarrow Q'(x)d\in I. \tag{5.19}$$

Para finalizar, tem-se

$$Q'(x)d = \prod_{i\in L}\left(xd^{\frac{1}{g}} - r_i d^{\frac{1}{g}}\right)\prod_{j\in M}\left(\left(xd^{\frac{1}{g}} - s_j d^{\frac{1}{g}}\right)^2 + c_j d^{\frac{2}{g}}\right) = Q(y),$$

com $y = xd^{1/g}$ e $g = \deg(Q') = \deg(Q)$. Então, pela fórmula (5.19), para $x\in r+I$, tem-se

$$R(x)\in I \Leftrightarrow Q(y)\in I. \qquad \square$$

Nota 5.15. *Como I é idempotente e $d > I$, então $d > I^g = I \Rightarrow d^{\frac{1}{g}} > I$.*

Demonstração de (1), Teorema 5.7. Mostra-se por Indução Externa que toda a raiz ρ de R é um número externo da forma $\rho = r + tI$, com $t\in \pounds_I$.

Uma vez que o teorema já foi provado para o *Caso (1)*, $n=1$, para o *Caso (2)*, $n=2$, com R irredutível, e para o caso em que R tem uma raiz com multiplicidade n, então aplica-se os passos da indução apenas para o caso em que qualquer I-próximo-de-raiz de R tem multiplicidade no máximo igual $n-1$.

Suponha-se que o teorema se verifica para qualquer polinómio de grau $n-1\geq 1$. Pelo Teorema 5.8, todo I-próximo-de-raiz $\tilde{r}$ de R pertence ao conjunto G, dado por (5.14). Assim, $\tilde{r}\in\overline{r}+I$, com $\overline{r} = r_i$, para algum $i\in\{1,\cdots,l\}$, ou $\overline{r} = s_j$, para algum $j\in\{1,\cdots,m\}$. Escolhe-se um tal $\overline{r}$. Pelo facto da multiplicidade de $\overline{r}$ ser no máximo $n-1$, então, pelo Teorema 5.10, existe um polinómio Q, com $\deg(Q) < n$, tal que, para todo $x\in\overline{r}+I$, tem-se

$$R(x)\in I \Leftrightarrow Q(y)\in I, \tag{5.20}$$

onde $y = xu$, para algum $u > I$. Pela hipótese da indução, toda raiz σ de Q é da forma $\sigma = s + vI$, com $v\in\pounds_I$. Pela fórmula (5.20), a raiz σ corresponde à raiz $\rho = \frac{\sigma}{u} = \frac{s}{u} + tI$ de R, onde $t = \frac{v}{u}\in\pounds_I$, uma vez que $u > I$. O teorema fica provado pelo facto de que $\tilde{r}\in G$ é arbitrário. $\square$

5.2 Decomposição aproximada de um polinómio

Definição 5.16. *Seja k um número natural standard e sejam $n_1, n_2\ldots, n_k$ números naturais standard. Sejam $N_1, N_2, \ldots, N_k$ neutrizes e $R_1, R_2, \ldots, R_k$ polinómios reais internos tais que $\deg(R_i) = n_i$, com $i = 1,2,\ldots,k$. O polinómio Q dado por*

$$Q(x) = R_1(x)N_1 + R_2(x)N_2 + \cdots + R_k(x)N_k \tag{5.21}$$

é denominado por polinómio neutricial.

Definição 5.17. *Seja P o polinómio dado por* (5.4)*. Suponha-se que $A_0\subseteq I$. O polinómio*

S dado por

$$S(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \tag{5.22}$$

é denominado polinómio neutricial associado a *P.*

Proposição 5.18. *Seja o polinómio P dado por* (5.4)*. Então, para todo $x \in \mathcal{F}$, tem-se*

$$P(x) - R(x) \in I. \tag{5.23}$$

Demonstração. Seja e S o polinómio neutricial associado a P. Como $x \in \mathcal{F}$, então, para cada k tal que $0 \leq k \leq n$, tem-se $A_k x^k \subseteq I$. Assim, para todo $x \in \mathcal{F}$ tem-se $P(x) - R(x) = S(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} A_k x^k \subseteq I$. □

Definição 5.19. *Suponha-se que a equação em* (5.4) *tem n raízes $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Então, define-se* fatorização associada Φ *por*

$$\Phi(x) = (x - \rho_1) \cdots (x - \rho_n). \tag{5.24}$$

Suponha-se que $r_i \in \rho_i$, com $1 \leq i \leq n$ e considera-se

$$F(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_n). \tag{5.25}$$

Proposição 5.20. *Suponha-se que a equação em* (5.4) *tem n raízes reais $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Seja Φ a fatorização associada e $x \in \mathbb{R} \setminus (\rho_1 \cup \cdots \cup \rho_n)$. Então*

$$\Phi(x) \subseteq (1 + tI) F(x), \tag{5.26}$$

com $t > 0$ tal que $tI \subseteq \oslash$.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R} \setminus (\rho_1 \cup \cdots \cup \rho_n)$. Nota-se que, se $x \notin \rho_i = r_i + R_i$ então tem-se $R_i \subseteq \oslash |x - r_i|$. Assim, para alguns $s_1, s_2, \ldots, s_n > 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x)}{F(x)} &= \frac{(x - \rho_1) \cdots (x - \rho_n)}{(x - r_1) \cdots (x - r_n)} \\ &= \frac{(x - r_1 + R_1) \cdots (x - r_n + R_n)}{(x - r_1) \cdots (x - r_n)} \\ &= \left(1 + \frac{R_1}{|x - r_1|}\right) \cdots \left(1 + \frac{R_n}{|x - r_n|}\right) \\ &= \left(1 + \frac{s_1}{|x - r_1|} I\right) \cdots \left(1 + \frac{s_n}{|x - r_n|} I\right). \end{aligned}$$

Para cada $1 \leq i \leq n$ toma-se $t_i = \dfrac{s_1}{|x - r_i|}$. Então $t_i I \subseteq \oslash$ para todo $1 \leq i \leq n$. Assim,

$$\left(1 + \frac{s_1}{|x - r_1|} I\right) \cdots \left(1 + \frac{s_n}{|x - r_n|} I\right) \subseteq (1 + tI) \subseteq 1 + \oslash,$$

com $t = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i)$. Por conseguinte, $\Phi(x) \subseteq (1 + tI)\, F(x)$, com $tI \subseteq \oslash$. □

6

Equações polinomiais em $\mathbb{E} + i\mathbb{E}$

Sejam um número standard $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j = a_j + ib_j + A_j + iA_j \in \mathbb{E} + i\mathbb{E}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, e uma neutriz $N \neq \{0\}$. Estuda-se a equação

$$P(z) = \alpha_m z^m + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 \subseteq N + iN. \tag{6.1}$$

Aqui utiliza-se as mesmas convenções e terminologias utilizadas no Capítulo 5, relativamente à pertença, inclusão e equação.

À semelhança do que se fez no Capítulo 5, começa-se por transformar a equação (6.1) num sistema de equações formado por uma equação, em que o primeiro membro é um polinómio, com coeficientes complexos e cujo termo dominante tem coeficiente igual a 1, e o segundo membro igual a um neutriz idempotente $I + iI$, isto é, $(I + iI)(I + iI) = I + iI$, e um conjunto de equações neutriciais.

Assim, supondo que P tem termos com coeficientes não-neutriciais, seja $n \leq m$ o índice maximal para o qual α_n é não-neutricial. Portanto, a menos de uma mudança de variável, pode-se assumir que $a_n + ib_n = 1$ e estudar o seguinte sistema

$$\begin{cases} R(z) = z^n + (a_{n-1} + ib_{n-1})\, z^{n-1} + \cdots + a_0 + ib_0 \in I + iI \\ (A_m + iA_m)\, z^m \subseteq I + iI \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ (A_1 + iA_1)\, z \subseteq I + iI \\ (A_0 + iA_0) \subseteq I + iI. \end{cases} \tag{6.2}$$

Se todos os coeficientes de P em (6.1) são neutriciais, então em (6.2) só restam equações neutriciais da forma $(A + iA)\, z^k \subseteq I + iI$, onde k é um número natural standard.

Definição 6.1. *Sejam m um número natural standard e $A + iA \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Então*

$$(A + iA)^{\frac{1}{m}} = \{z \in \mathbb{C} : z^m \in A + iA\}\,.$$

Proposição 6.2. *Sejam m um número natural standard e $A + iA \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Então, $(A + iA)^{\frac{1}{m}} = A^{\frac{1}{m}} + iA^{\frac{1}{m}}$.*

Definição 6.3. *Sejam $A + iA, B + iB \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Então,*

$$(A + iA) : (B + iB) = \{z \in \mathbb{C} : z\,(B + iB) \subseteq A + iA\}\,.$$

Proposição 6.4. *Sejam I uma neutriz idempotente e $A + iA \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Então,*

$$(I + iI) : (A + iA) = I : A + i\,(I : A)\,.$$

Demonstração. Sejam I uma neutriz idempotente e $A + iA \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Como

$$I : A = \{x \in \mathbb{R} : xA \subseteq I\} \tag{6.3}$$

é uma neutriz, então $I : A + i\,(I : A) \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$. Assim, aplicando a fórmula (6.3), tem-se

$$(I : A + i\,(I : A))\,(A + iA) = (IA) : A + i\,((IA) : A) \subseteq I + iI.$$

Como $I : A$ é maximal, então $I : A + i\,(I : A)$ também é maximal, logo

$$(I + iI) : (A + iA) = I : A + i\,(I : A)\,. \qquad \square$$

A condição necessária para a existência de soluções é $A_0 + iA_0 \subseteq I + iI$.

As equações neutriciais são resolvidas pelos neutrizes

$$(I + iI) : (A_1 + iA_1)\,, \ldots, (I + iI) : (A_m + iA_m)^{\frac{1}{m}}\,,$$

onde $(A_m + iA_m)^{\frac{1}{m}} = \{z \in \mathbb{C} : z^m \in A_m + iA_m\}$. O *conjunto-viabilidade* F é definido por

$$F = (I + iI) : (A_1 + iA_1) \cap \cdots \cap (I + iI) : (A_m + iA_m)^{\frac{1}{m}}\,. \tag{6.4}$$

De agora em diante, assume-se que $A_0 + iA_0 \subseteq I + iI$ e que o sistema é não-singular, isto é,

$n \geq 1$. Então o sistema em (6.2) é equivalente a

$$\begin{cases} R(z) = z^n + (a_{n-1} + ib_{n-1})\, z^{n-1} + \cdots + (a_1 + ib_1)\, z + a_0 + ib_0 \in I + iI \\ z \in F. \end{cases} \tag{6.5}$$

Como $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, o polinómio R em (6.5) pode ser escrito na forma

$$R(z) = (z - r_1)\,(z - r_2) \cdots (z - r_n), \tag{6.6}$$

onde $r_k = u_k + is_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, são as raízes da equação $R\,(z) = 0$.

Definição 6.5. *Um número complexo r diz-se $I + iI$-próximo-de-raiz de R se $R\,(r) \in I + iI$. A multiplicidade de um $I + iI$-próximo-de-raiz r de R é a soma dos graus de todos os fatores de*

$$R(r) = (r - r_1)\,(r - r_2) \cdots (r - r_n)$$

que pertence a $I + iI$.

Definição 6.6. *O* conjunto-solução *da equação em $R\,(z) \in I + iI$ é definido por*

$$S = \{x \in \mathbb{C} : R\,(x) \in I + iI\}\,.$$

Uma sua raiz *ρ é um subconjunto convexo maximal de S. A multiplicidade da raiz ρ é a soma dos graus de todos os fatores de*

$$\hat{R}\,(\rho) = (\rho - r_1)\,(\rho - r_2) \cdots (\rho - r_n)$$

que estão contidos em $I + iI$. A solução-admissível *é a interseção da união de todas as raízes com $\mathcal{F}$.*

Teorema 6.7. *Seja $R\,(z)$ o polinómio em* (6.6)*. A equação $R\,(z) \in I + iI$ tem n raízes da forma $\rho_k = r_k + t_k\,(I + iI)$, onde $k = 1, 2, \ldots, n$, r_k são as raízes da equação $R\,(z) = 0$, $t_k \in \mathbb{R}^+$ e $t_k\,(I + iI) \subseteq I + iI$.*

Para a demonstração deste teorema são necessários alguns resultados preliminares.

Teorema 6.8. *Seja $R\,(z)$ o polinómio em* (6.6)*. Toda raiz da equação $R\,(z) \in I + iI$ é da forma*

$$\rho = r + t\,(I + iI)\,,$$

onde $r \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $t\,(I + iI) \subseteq I + iI$.

Proposição 6.9. *Seja o polinómio R dado em* (6.5)*. Sejam r_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, as raízes de $R(z) = 0$. Então,*

$$R(z) \in I + iI \Rightarrow z \in r_k + I + iI,$$

para algum $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demonstração. Suponha-se que para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tem-se $z \notin r_k + I + iI$. Então, $z - r_k \notin I + iI$ e, pela Proposição 4.4, $|z - r_k| \notin I + iI$, logo $|z - r_k| > I$. Assim, como I é um neutriz idempotente, tem-se

$$|R(z)| = \prod_{k \in \{1, 2, \ldots, n\}} |z - r_k| > I,$$

o que é equivalente a,

$$R(z) \notin I + iI.$$

Assim, se $R(z) \in I+iI$, então $z \in r_k + I + iI$, para algum $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. $\square$

Definição 6.10. *O* módulo $\mathrm{M}(\alpha)$ *de um número externo complexo* α *é definido por*

$$\mathrm{M}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : \alpha z = \alpha\}.$$

Nota 6.11. *Note-se que:*

(1) Se $\alpha \notin \mathcal{N} + i\mathcal{N}$*, então* $\mathrm{M}(\alpha) = \mathrm{u}(\alpha) = 1 + \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{\alpha}$.

(2) Se $\alpha = A + iA \in \mathcal{N} + i\mathcal{N}$*, então, pela Proposição 4.76, existem uma neutriz idempotente* $\gamma = J + iJ$ *e* $0 \neq p \in \mathbb{R}$*, tais que* $\alpha = p\gamma$*. Assim, tem-se:*

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(\alpha) &= \{z \in \mathbb{C} : z\alpha = \alpha\} = \{z \in \mathbb{C} : z(p\gamma) = p\gamma\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : z\gamma = \gamma\} = \mathrm{M}(\gamma).\end{aligned}$$

Destaca-se dois casos:

(a) Se $1 \in \gamma$*, então* γ *admite um ideal maximal* $\nu = I + iI$*. Neste caso,*

$$\mathrm{M}(\alpha) = \mathrm{M}(A + iA) = \gamma \setminus \nu.$$

(b) Se $1 \notin \gamma$*, então* γ *é ideal maximal de alguma neutriz idempotente* $\beta = K + iK$*, tal que* $1 \in \beta$*. Neste caso,*

$$\mathrm{M}(\alpha) = \mathrm{M}(A + iA) = \beta \setminus \gamma.$$

(3) Como $\mathrm{M}(\alpha) \subseteq @ + i@$*, então, em ambos os casos,* $1/\mathrm{M}(\alpha) = \mathrm{M}(\alpha)$.

Teorema 6.12 (Teorema de substituição para neutrizes complexas)**.** *Sejam um neutriz* $A \neq \{0\}$*,* $S \subseteq \mathbb{C}$*, e as funções internas* $f, g : S \longrightarrow \mathbb{C}$*. Suponha-se que para* $x \in S$*, tem-se:*

(1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$.

(2) $f(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathrm{M}(A + iA)$.

Então, para $x \in S$*, tem-se* $f(x) \in A + iA \Leftrightarrow g(x) \in A + iA$.

Demonstração. (1) Suponha-se que $f(x) = g(x) = 0$. Neste caso, o resultado é evidente, ou seja,

$$f(x) \in A + iA \Leftrightarrow g(x) \in A + iA. \tag{6.7}$$

(2) Suponha-se que $f(x) \neq 0$, logo $g(x) \neq 0$.

Se $f(x) \in A + iA$ tem-se:

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f(x) \in \frac{1}{\mathrm{M}(A + iA)} \cdot f(x) \\ &\subseteq f(x) \cdot \mathrm{M}(A + iA) \subseteq (A + iA) \cdot \mathrm{M}(A + iA) = A + iA.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Se $g(x) \in A + iA$ tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) &\in \mathrm{M}\,(A+iA) \cdot g(x) \\ &\subseteq (A+iA) \cdot \mathrm{M}\,(A+iA) = A + iA. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Então, pelas fórmulas (6.7), (6.8) e (6.9), para $x \in S$, tem-se:

$$f(x) \in A + iA \Leftrightarrow g(x) \in A + iA. \qquad \square$$

Teorema 6.13 (Teorema de substituição para polinómios complexos)**.** *Seja o polinómio R em* (6.5). *Seja r um $I + iI$-próximo-de-raiz de R.*

(1) Se r tem multiplicidade n, então $\rho = r + I + iI$ é raiz de $R(z) \in I + iI$, com multiplicidade n.

(2) Se r tem multiplicidade inferior a n, então existem um $d > I$ e um polinómio Q, $1 \leq \deg(Q) < \deg(R)$, tais que para $z \in r + I + iI$, tem-se

$$R(z) \in I + iI \Leftrightarrow Q(w) \in I + iI,$$

onde $w = zd^{\frac{1}{g}}$, com $g = \deg(Q)$.

A demonstração deste teorema está dividida em duas partes: na primeira, demonstra-se o resultado em *(1)*, e, na segunda, demonstra-se o resultado em *(2)*.

Na demonstração de *(2)* aplica-se o Teorema de substituição para neutrizes complexas. Assim, prova-se que os polinómios $R(z)$ e $Q(z) \cdot d$ satisfazem as condições desse teorema.

Demonstração do Teorema 6.13. Seja R o polinómio em (6.5). Sejam as raízes r_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, de $R(z) = 0$, uma neutriz idempotente I e r um $I + iI$-próximo-de-raiz de R. Sejam

$$\begin{aligned} &K = \{k \in \{1,2,\ldots,n\} : r_k \in r + I + iI\}, \\ &Q'(z) = \prod_{k \in K} (z - r_k), \\ &L = \{1,2,\ldots,n\} \setminus K, \text{ se } K \neq \{1,2,\ldots,n\}, \\ &d = \prod_{p \in L} |r - r_p|. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Nota-se que $K \neq \emptyset$, pois, por hipótese, r é um I-próximo-de-raiz de R.

(1) Se r tem multiplicidade n, então $r - r_k \in I + iI$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, $K = \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim, aplicando as Proposições 3.23 e 4.12, tem-se:

$$\begin{aligned} R\,(r + I + iI) &= \prod_{k=1}^{n} (r - r_k + I + iI) = \prod_{k=1}^{n} (I + iI) \\ &= (I + iI)^n = I + iI. \end{aligned}$$

Então, $\rho = r + I + iI$ é solução da equação $R(z) \in I + iI$, com multiplicidade n, e a Proposição 6.9 garante a unicidade de ρ.

(2) Se r tem multiplicidade inferior a n, então $K \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, logo

$$1 \leq \deg(Q') < \deg(R). \tag{6.11}$$

Seja $L=\{1,2,\ldots,n\}\setminus K$.

(2.1) Para $p\in L$, tem-se $r-r_p\notin I+iI$, logo, aplicando a Proposição 4.4, tem-se $|r-r_p|>I$. Assim,

$$d=\prod_{p\in L}|r-r_p|>I^{\#L}=I \tag{6.12}$$

e, por conseguinte, $d\notin I+iI$. Pelas definições dos polinómios R e Q' e uma vez que $d>I$, tem-se:

$$Q'(z)\cdot d=0\Leftrightarrow Q'(z)=0\Leftrightarrow R(z)=0\wedge z\in r+I+iI. \tag{6.13}$$

(2.2) Seja $z\in\mathcal{D}=(r+I+iI)\setminus\{r_k:k=1,2,\ldots,n\}$.

Como, para todo $p\in L$, $r_p\notin r+I+iI$, logo $|r-r_p|>I$ e, consequentemente, $\dfrac{I+iI}{r-r_p}\subseteq\oslash+i\oslash$, então, para $z\in\mathcal{D}$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{z-r_p}{r-r_p}&\in\frac{r-r_p+I+iI}{r-r_p}=1+\frac{I+iI}{r-r_p}\\&\subseteq 1+\oslash+i\oslash\subset \mathrm{M}\left(I+iI\right),\end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned}\frac{R(z)}{Q'(z)\cdot d}&=\prod_{p\in L}\frac{z-r_p}{r-r_p}\in(1+\oslash+i\oslash)^{\#L}\\&=1+\oslash+i\oslash\subset\mathrm{M}\left(I+iI\right).\end{aligned}$$

Assim, por *(2.1)* e *(2.2)*, para $K\neq\{1,2,\ldots,n\}$ e $z\in r+I+iI$, tem-se:

$$R(z)\in I+iI\Leftrightarrow Q'(z)\cdot d\in I+iI. \tag{6.14}$$

Para finalizar, tem-se

$$Q'(z)\cdot d=\prod_{k\in K}\left(zd^{\frac{1}{g}}-r_kd^{\frac{1}{g}}\right)=Q\left(w\right),$$

com $w=zd^{\frac{1}{g}}$ e $g=\deg\left(Q'\right)=\deg\left(Q\right)$. Então, pela fórmula (6.14), para $z\in r+I+iI$, tem-se

$$R(z)\in I+iI\Leftrightarrow Q(w)\in I+iI.$$ □

Nota 6.14. *Como I idempotente e $d>I$, então $d>I^g=I\Rightarrow d^{\frac{1}{g}}>I$, logo $d^{\frac{1}{g}}\notin I+iI$.*

Demonstração do Teorema 6.8. Mostra-se por Indução Externa no grau de R que toda a raiz da equação $R\left(z\right)\in I+iI$ é da forma $\rho=r+t\left(I+iI\right)$, com $r\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}^+$ e $t\left(I+iI\right)\subseteq I+iI$.

Se $n=1$ ou se $n\geq1$ e R tem uma raiz com multiplicidade n então, pelo Teorema 6.13, ponto *(1)*, a equação $R\left(z\right)\in I+iI$ tem uma única raiz $\rho=r+I+iI$, com multiplicidade n.

Então, resta provar que o teorema se verifica se toda a raiz de R tem multiplicidade inferior ou igual a $n-1$.

Suponha-se que $n>1$ e o teorema se verifica para qualquer polinómio de grau inferior ou igual a $n-1$.

Seja $\tilde{r}$ um $I+iI$-próximo-de-raiz arbitrário de R. Pela Proposição 6.9, existe uma raiz $\overline{r}$ de R tal que $\tilde{r} \in \overline{r}+I+iI$. Como a multiplicidade de $\tilde{r}$ é no máximo $n-1$ então, pelo Teorema 6.13, ponto *(2)*, existe um polinómio Q, com $1 \leq \deg(Q) < n$, tal que para todo $z \in \overline{r}+I+iI$ tem-se

$$R(z) \in I+iI \Leftrightarrow Q(w) \in I+iI, \tag{6.15}$$

onde $w = zu$, para algum $u > I$. Pela hipótese da indução, toda a raiz σ de Q é da forma $\sigma = s + v(I+iI)$, com $s \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^+$ e $v(I+iI) \subseteq I+iI$. Pela fórmula (6.15), toda a raiz ρ da equação $R(z) \in I+iI$ é da forma $\rho = \dfrac{\sigma}{u} = \dfrac{s}{u} + t(I+iI)$, com $t = \dfrac{v}{u} \in \mathbb{R}^+$ e $t(I+iI) \subseteq I+iI$, pois $u > I$. O teorema fica provado porque $\tilde{r}$ é arbitrário. □

Demonstração do Teorema 6.7. Seja $R(z)$ o polinómio em (6.6) e r uma raiz arbitrária de $R(z) = 0$.

(1) Se r tem multiplicidade n, pela Proposição 6.13, $\rho = r+I+iI$ é uma raiz de multiplicidade n de $R(z) \in I+iI$.

(2) Então, suponha-se que r tem multiplicidade inferior ou igual a $n-1$. Novamente, pela Proposição 6.13, para $z \in r+I+iI$, existe um polinómio Q de grau inferior ou igual a $n-1$ tal que

$$R(z) \in I+iI \Leftrightarrow Q(w) \in I+iI,$$

com $w = uz$, onde $u > I$. Pelo Teorema 6.8, toda a raiz de Q é da forma $\sigma = s + v(I+iI)$, com $s \in \mathbb{R}^+$, $s(I+iI) \subseteq I+iI$. Assim, $\rho = \dfrac{s}{u} + t(I+iI)$, com $t = \dfrac{v}{u}$, é solução de $R(z) \in I+iI$. Como $R(r) = 0 \in I+iI$, então $r \in \rho$, logo, pela Proposição 4.5, $\rho = r + t(I+iI)$.

Com $\deg(R) = n$, por *(1)* e *(2)*, a equação $\mathbb{R}(z) \in I+iI$ tem n raízes da forma $\rho_k = r_k + t_k(I+iI)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, em que r_k são as raízes de $R(z) = 0$, $t_k \in \mathbb{R}^+$ e $t_k(I+iI) \subseteq I+iI$. □

Seguidamente, mostra-se que se R tem coeficientes reais, então as raízes com representantes não reais são conjugadas.

Teorema 6.15. *Sejam n um número natural standard e I uma neutriz idempotente. Seja R um polinómio complexo de grau n, com coeficientes reais, tal que*

$$\begin{aligned} R(z) &= z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 \\ &= \prod_{k=1}^{n} (z - r_k), \end{aligned} \tag{6.16}$$

com $r_k = a_k + ib_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Suponha-se que existe um $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $r_j = a_j + ib_j$, com $b_j \neq 0$. Então, para algum $t \in \mathbb{R}^+$, $t(I+iI) \subseteq I+iI$, tem-se:

$$\rho = a_j + ib_j + t(I+iI) \ \text{ e } \overline{\rho} = a_j - ib_j + t(I+iI)$$

são soluções da equação $R(z) \in I+iI$.

Demonstração. Para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, seja $r_j = a_j + ib_j$, $b_j \neq 0$, uma raíz do polinómio complexo R em (6.16). Como R tem coeficientes reais, então existe um $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $l \neq j$, tal que $r_l = \overline{r_j} = a_j - ib_j$.

Pelo Teorema 6.7, para algum $t\in\mathbb{R}^+$ e $t\,(I+iI)\subseteq I+iI$, tem-se que $\rho=r_j+t\,(I+iI)$ é uma solução da equação $R(z)\in I+iI$. Logo, aplicando o Corolário 4.28 e as Proposições 4.25 e 4.33, ponto *(11)*, tem-se:

$$\begin{aligned}
R(\rho)=I+iI &\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\left(r_j-r_k+t\,(I+iI)\right)=I+iI\\
&\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\left|r_j-r_k+t\,(I+iI)\right|=I\\
&\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\left|\overline{r_j-r_k+t\,(I+iI)}\right|=I\\
&\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\left|\overline{r_j-r_k}+t\,(I+iI)\right|=I\\
&\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\left(\overline{r_j}+t\,(I+iI)-\overline{r_k}\right)=I+iI.
\end{aligned}$$

Isto equivale a dizer que ρ é solução da equação $R(z)\in I+iI$ se, e só se, $\overline{\rho}$ é solução da equação $\prod_{k=1}^{n}(z-\overline{r_k})\in I+iI$. Contudo,

$$R(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-r_k)=\prod_{k=1}^{n}(z-\overline{r_k}),$$

ou seja, $\overline{\rho}$ é também solução da equação $R(z)\in I+iI$. □

Para finalizar apresenta-se alguns exemplos.

Exemplo 6.16. *Considera-se a equação $z^2+\omega\in \pounds+i\pounds$, com $\omega\simeq+\infty$.*

Então, $z^2+\omega\in\pounds+i\pounds\Leftrightarrow(z-i\sqrt{\omega})\,(z+i\sqrt{\omega})\in\pounds+i\pounds$.

Sejam $r_1=i\sqrt{\omega}$ e $r_2=-i\sqrt{\omega}$, e sejam $K_1=\{k\in\{1,2\}:r_k\in -i\sqrt{\omega}+\pounds+i\pounds\}=\{1\}$ e $K_2=\{k\in\{1,2\}:r_k\in -i\sqrt{\omega}+\pounds+i\pounds\}=\{2\}$. Tem-se:

1. *Para $z\in i\sqrt{\omega}+\pounds+i\pounds$,*

$$\begin{aligned}
z^2+\omega\in\pounds+i\pounds &\Leftrightarrow \left(z-\sqrt{\omega}i\right)\left(2\sqrt{\omega}\right)\in\pounds+i\pounds\\
&\Leftrightarrow z\in\sqrt{\omega}i+\frac{\pounds+i\pounds}{\sqrt{\omega}}.
\end{aligned}$$

2. *Para $z\in -\sqrt{\omega}i+\pounds+i\pounds$,*

$$\begin{aligned}
z^2+\omega\in\pounds+i\pounds &\Leftrightarrow \left(z+\sqrt{\omega}i\right)\left(2\sqrt{\omega}\right)\in\pounds+i\pounds\\
&\Leftrightarrow z\in-\sqrt{\omega}i+\frac{\pounds+i\pounds}{\sqrt{\omega}}.
\end{aligned}$$

Assim, a equação $z^2+\omega\in\pounds+i\pounds$ tem duas soluções da forma $r_k+t\,(\pounds+i\pounds)$, com $k=1,2$, $t_k\in\mathbb{R}^+$ e $t_k\,(\pounds+i\pounds)\subseteq\pounds+i\pounds$:

$$\rho_1=\sqrt{\omega}i+\frac{\pounds+i\pounds}{\sqrt{\omega}},\ \rho_2=\sqrt{\omega}i+\frac{\pounds+i\pounds}{\sqrt{\omega}}.$$

Exemplo 6.17. *Considera-se a equação* $(z-2)(z-3)(z-\omega) \in \pounds + i\pounds$, *com* $\omega \simeq +\infty$.

Então, sejam $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ *e* $r_3 = \omega$, *e sejam* $K_1 = \{k \in \{1,2,3\} : r_k \in 2 + I + iI\} = \{1,2\}$ *e* $K_2 = \{k \in \{1,2,3\} : r_k \in \omega + I + iI\} = \{3\}$. *Tem-se:*

1. *Para* $z \in 2 + \pounds + i\pounds = 3 + \pounds + i\pounds = \pounds + i\pounds$, *tem-se:*

$$\begin{aligned}(z-2)(z-3)(z-\omega) \in \pounds + i\pounds &\Leftrightarrow (z-2)(z-3)\,|2-\omega| \in \pounds + i\pounds \\ &\Leftrightarrow (z-2)(z-3) \in \frac{\pounds + i\pounds}{\omega};\end{aligned}$$

   Como $|2-3| = 1 \notin \frac{\pounds + i\pounds}{\omega} \subset \oslash + i\oslash$, *então:*

$$\begin{aligned}&(z-2)(z-3) \in \frac{\pounds + i\pounds}{\omega} \\ \Leftrightarrow\ & z-2 \in \frac{\pounds + i\pounds}{\omega} \vee z-3 \in \frac{\pounds + i\pounds}{\omega} \\ \Leftrightarrow\ & z \in 2 + \frac{\pounds + i\pounds}{\omega} \vee z \in 3 + \frac{\pounds + i\pounds}{\omega}.\end{aligned}$$

2. *Para* $z \in \omega + I + iI$,

$$\begin{aligned}(z-2)(z-3)(z-\omega) \in \pounds + i\pounds &\Leftrightarrow (z-\omega)\,|\omega-2|\,|\omega-3| \in \pounds + i\pounds \\ &\Leftrightarrow z \in \omega + \frac{\pounds + i\pounds}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Assim, a equação $(z-2)(z-3)(z-\omega) \in \pounds + i\pounds$ *tem três soluções da forma* $r_k + t_k(\pounds + i\pounds)$, *com* $k = 1,2,3$, $t \in \mathbb{R}^+$ *e* $t_k(\pounds + i\pounds) \subseteq \pounds + i\pounds$:

$$\rho_1 = 2 + \frac{\pounds + i\pounds}{\omega},\ \rho_2 = 3 + \frac{\pounds + i\pounds}{\omega},\ \rho_3 = \omega + \frac{\pounds + i\pounds}{\omega^2}.$$

7

Polinómio generalizado

Neste capítulo estuda-se equações polinomiais da forma $P(x) \subseteq N$ em que P é um polinómio que não se reduz à forma clássica e N é uma neutriz.

Suponha-se que a equação em (5.4) tem n raízes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Uma vez que a propriedade distributiva num sólido não é válida em geral, então a fatorização associada $\Phi(x) = (x - \rho_1) \cdots (x - \rho_n)$ nem sempre se reduz à forma canónica clássica. Por exemplo, $\rho_1 = 1 + \oslash$ e $\rho_2 = -1 + \oslash$ são raízes da equação $x^2 - 1 \in \oslash$. No entanto, a fatorização associada

$$\Phi(x) = (x - (1 + \oslash))(x - (-1 + \oslash)) \tag{7.1}$$

não se reduz à forma canónica clássica.

Este facto leva à introdução de um novo conceito no estudo de equações polinomiais, o de *polinómio generalizado*.

Definição 7.1. *Sejam x uma variável real e $G = \mathbb{R} \cup \{x\} \cup \mathcal{N}$. Um polinómio real P diz-se* polinómio generalizado *se for o resultado de adições e multiplicações, em número standard, de elementos de G.*

Representa-se o conjunto dos polinómios generalizados por $\overline{G}$.

Definição 7.2. *Sejam n, k números naturais standard. Sejam os polinómios reais internos $R_0, R_1, \ldots, R_k$, com $\deg(R_0) = n$ e, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\deg(R_i) = n_i$, onde n_i é um número natural standard. Sejam os neutrizes $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Um polinómio real P diz-se* polinómio estruturado *de grau n se*

$$P(x) = R_0(x) + \sum_{i=1}^{k} A_i R_i(x). \tag{7.2}$$

Se existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $A_i \neq \{0\}$ e $R_i(x) \neq 0$, diz-se que P é um polinómio estruturado externo.

Nota-se que, pela Definição 5.16, um polinómio estruturado é uma soma de um polinómio real interno com um polinómio neutricial.

O conjunto dos polinómios estruturados representa-se por $\mathcal{P}$, e $\overline{\mathcal{P}}$ representa o conjunto composto por resultados de adições e multiplicações, em número standard, de elementos de $\mathcal{P}$.

Proposição 7.3. *Todo o polinómio estruturado é um polinómio generalizado.*

Demonstração. Um polinómio estruturado é uma soma de um polinómio real interno com um polinómio neutricial, logo é resultado de adições e multiplicações, em número standard, de elementos de G. Ou seja, todo o polinómio estruturado é um polinómio generalizado. □

Proposição 7.4. *$\mathcal{P}$ é fechado em relação à adição e multiplicação.*

Demonstração. Sejam m, n números naturais standard e P, Q polinómios estruturados de grau n e m respetivamente. Então, existem números naturais standard k, k' e existem neutrizes $C_1, \ldots C_k, B_{k+1}, \ldots, B_{k+k'}$, tais que

$$P = P_0(x) + \sum_{i=1}^{k} C_i P_i(x), Q = Q_0(x) + \sum_{i=k+1}^{k+k'} B_i Q_i(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} P + Q &= P_0(x) + Q_0(x) + \sum_{i=1}^{k} C_i P_i(x) + \sum_{i=k+1}^{k+k'} B_j Q_j(x) \\ &= R_0(x) + \sum_{i=1}^{k+k'} A_i R_i(x), \end{aligned}$$

onde $R_0(x) = P_0(x) + Q_0(x)$ é um polinómio interno de grau $p = \max(m, n)$, e

$$A_i R_i(x) = \begin{cases} C_i P_i(x), & i = 1, \ldots, k \\ B_i Q_i(x), & i = k+1, \ldots, k+k', \end{cases}$$

ou seja, $P + Q$ é um polinómio estruturado de grau p.

Também,

$$\begin{aligned} PQ = P_0(x) Q_0(x) + P_0(x) \sum_{i=k+1}^{k+k'} B_i Q_i(x) + Q_0(x) \sum_{i=1}^{k} C_i P_i(x) + \\ + \sum_{i=1}^{k} C_i P_i(x) \sum_{i=k+1}^{k+k'} B_i Q_i(x). \end{aligned}$$

Como $k + k' + kk'$ é um número standard, o produto entre dois polinómios reais interno é um polinómio real interno cujo grau é a soma dos graus das parcelas, o produto de um polinómio real interno por um polinómio neutricial é um polinómio neutricial e o produto de dois polinómios neutriciais também é um polinómio neutricial, então PQ é a soma de um polinómio real interno de grau $m + n$ com uma soma de $k + k' + kk'$ polinómios neutriciais da forma $S(x)A$, onde S é um polinómio real interno, $\deg(S) \leq m + n$ e $A \in \mathcal{N}$, ou seja, PQ é um polinómio estruturado de grau $m + n$. □

Corolário 7.5. *$\mathcal{P}$ é fechado em relação à soma e à multiplicação, com um número standard de parcelas e fatores.*

Demonstração. O corolário é consequência direta do princípio da Indução Externa, aplicado à proposição 7.4. □

Proposição 7.6. *Considere-se o conjunto dos polinómios estruturados $\mathcal{P}$. Então, $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}}$.*

Demonstração. (1) Uma vez que todos os polinómios reais internos e os neutriciais são estruturados, então, qualquer polinómio $P \in \mathcal{P}$ é resultado de adições e multiplicações em um número standard de elementos de $\mathcal{P}$. Assim, $\mathcal{P} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$.

(2) Seja $Q \in \overline{\mathcal{P}}$. Então, Q é resultado de adições e multiplicações em número standard de elementos de $\mathcal{P}$. Pelo Corolário 7.5, tem-se $Q \in \mathcal{P}$, logo $\overline{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$.

Assim, pelos pontos *(1)* e *(2)*, tem-se $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}}$. □

Teorema 7.7. *Todo o polinómio generalizado reduz-se a um polinómio estruturado.*

Demonstração. G está contido em P, então $\overline{G}$ está contido em $\overline{\mathcal{P}}$. Por outro lado, pela Proposição 7.3, $\mathcal{P}$ está contido em $\overline{G}$, logo $\overline{\mathcal{P}}$ está contido em $\overline{\overline{G}} = \overline{G}$. Assim, aplicando a Proposição 7.6, tem-se $\overline{G} = \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$. □

Voltando ao exemplo utilizado na introdução deste capítulo, o polinómio Φ reduz-se a um polinómio estruturado.

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (x - (1 + \oslash))(x - (-1 + \oslash)) = ((x - 1) + \oslash)((x + 1) + \oslash) \\ &= x^2 - 1 + (x - 1)\oslash + \oslash(x + 1) + \oslash^2 \\ &= x^2 - 1 + \oslash(x - 1) + \oslash(x + 1) + \oslash \equiv \Psi(x).\end{aligned}$$

Nota-se que a equação $\Psi(x) \subseteq \oslash$ reduz-se a um sistema de equações com polinómios reais internos, como se segue:

$$\begin{aligned}&\Psi(x) \subseteq \oslash \Leftrightarrow x^2 - 1 + \oslash(x - 1) + \oslash(x + 1) + \oslash \subseteq \oslash \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \in \oslash \\ \oslash(x - 1) \subseteq \oslash \\ \oslash(x + 1) \subseteq \oslash \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \in \oslash \\ x \in \pounds \end{cases}\end{aligned}$$

Este facto motiva o seguinte teorema.

Teorema 7.8. *Sejam n um número natural standard, P um polinómio generalizado de grau n e I uma neutriz idempotente. Então,* *(1) Existe um polinómio estruturado Q tal que $P(x) \subseteq I \Leftrightarrow Q(x) \subseteq I$.*

(2) A equação $Q(x) \subseteq I$ é equivalente a um sistema com m equações da forma $R(x) \in J$, onde m é um número natural standard, R um polinómio real interno e J uma neutriz idempotente.

Demonstração. Sejam n um número natural standard, P um polinómio generalizado de grau n, e I uma neutriz idempotente.

(1) Pelo Teorema 7.7, o polinómio generalizado P reduz-se a um polinómio estruturado Q, logo $P(x) \subseteq I \Leftrightarrow Q(x) \subseteq I$.

(2) Como Q é um polinómio estruturado, para algum número natural standard k, existem polinómios reais internos $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ e neutrizes $A_1, A_2, \dots, A_k$ tais que $Q(x) = Q_0(x) + \sum_{i=1}^{k} A_i Q_i(x)$. Assim,

$$P(x) \subseteq I \Leftrightarrow Q(x) \subseteq I \Leftrightarrow \begin{cases} Q_0(x) \in I \\ A_i Q_i(x) \subseteq I, i = 1, 2, \dots k. \end{cases} \tag{7.3}$$

Pelo Teorema 3.24, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, existem um número real não nulo p_i e uma neutriz idempotente I_i tal que $A_i = p_i I_i$. Assim,

$$A_i Q_i(x) \in I \Leftrightarrow p_i I_i Q_i(x) \in I \Leftrightarrow p_i Q_i \in I : I_i, i = 1, 2, \dots k. \tag{7.4}$$

Pela Proposição 3.14, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, tem-se $I : I_i$ é uma neutriz. Logo, novamente pelo Teorema 3.24, existem um número real não nulo q_i e uma neutriz idempotente J tais que $I : I_i = q_i J_i$. Conjugando com os resultados em (7.3) e (7.4), tem-se

$$P(x) \subseteq I \Leftrightarrow \begin{cases} Q_0(x) \in I \\ \dfrac{p_i}{q_i} Q_i(x) \in J_i, i = 1, 2, \dots, k, \end{cases} \tag{7.5}$$

ou seja, $P(x) \subseteq I$ é equivalente a um sistema com $k = m + 1$ equações da forma $R(x) \in J$, onde R é um polinómio real interno e J é uma neutriz idempotente. □

O método para resolução das equações polinomiais no sistema em (7.5) foi proposto no Capítulo 5 e pressupõe uma mudança de variável no sentido de transformar os polinómios $Q_0, \dfrac{p_i}{q_i} Q_i(x)$, com $i = 1, 2, \dots, k$, em polinómios reduzidos. Pelo que, as soluções da equação $P(x) \subseteq I$, caso existam, são números externos, dado que a interseção de um número standard de números externos, quando não vazia, é um número externo.

8

Polinómio Característico

Neste capítulo estuda-se os valores próprios de uma matriz quadrada cuja ordem é um número natural standard n e as entradas são números externos. Para levar a cabo este estudo, prova-se que o seu *polinómio característico* reduz-se a um polinómio estruturado e apresenta-se uma fórmula fechada para os seus coeficientes. Assim, os valores próprios, quando existem, são, mais uma vez, números externos.

Para os estudos posteriores, utiliza-se a seguinte definição de determinante de uma matriz quadrada com entradas em $\mathbb{E}$.

Definição 8.1. *Seja n um número natural standard. Sejam os números externos $\alpha_{ij} = a_{ij} + A_{ij}$, , com $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e A_{ij} neutrizes. Seja a matriz $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})_{n \times n}$. Define-se* determinante *de $\mathcal{A}$ como*

$$|\mathcal{A}| = \sum_{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n \in \mathcal{S}_n} (-1)^s \ \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\alpha_{3j_3} \ldots \alpha_{nj_n},$$

onde

$$s = \begin{cases} 0 & \text{se } j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n \text{ é uma permutação par} \\ 1 & \text{se } j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n \text{ é uma permutação ímpar.} \end{cases}$$

Definição 8.2 (Polinómio característico). *Seja n um número natural standard. Sejam os números externos $\alpha_{ij} = a_{ij} + A_{ij}$, , com $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e A_{ij} neutrizes. Sejam as matrizes $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ e a matriz identidade de ordem n, I_n. Então, o* polinómio característico *de $\mathcal{A}$ é definido por $P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I_n)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Dado um número natural standard n, representa-se por $\mathcal{M}_n(\mathbb{E})$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas no conjunto dos números externos $\mathbb{E}$.

O exemplo que se segue mostra que para o caso $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{E})$, o polinómio característico é um polinómio generalizado. Como indicado no Capítulo 7, a determinação das suas raízes passa pela resolução de um sistema com equações da forma $R(x) \in A$, onde R é um polinómio real interno e A um neutriz idempotente.

Sejam os números externos $\alpha_{ij} = a_{ij} + A_{ij}$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $A_{ij} \in \mathcal{N}$, $i, j = 1, 2$.

Sejam a matriz externa $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, a matriz identidade $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned}
P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= (\alpha_{11} - \lambda)\cdot(\alpha_{22} - \lambda) - \alpha_{21}\cdot\alpha_{12} \\
&= (a_{11} - \lambda + A_{11})\cdot(a_{22} - \lambda + A_{22}) - (a_{21} + A_{21})\cdot(a_{12} + A_{12}) \\
&= (a_{11} - \lambda)\cdot(a_{22} - \lambda) + (a_{11} - \lambda)\cdot A_{22} + (a_{22} - \lambda)\cdot A_{11} + A_{11}\cdot A_{22} - \\
&\quad - a_{21}\cdot a_{12} + a_{21}\cdot A_{12} + a_{12}\cdot A_{21} + A_{21}\cdot A_{12} \\
&= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} + (a_{11} - \lambda)\cdot A_{22} + \\
&\quad + (a_{22} - \lambda)\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{12} + a_{12}\cdot A_{21} + A_{11}\cdot A_{22} + A_{21}\cdot A_{12}.
\end{aligned}$$

Nota-se que P é um polinómio generalizado que se reduz a um polinómio estruturado

$$R_0(\lambda) + \sum_{i=1}^{3} N_i R_i(\lambda), \tag{8.1}$$

onde

$$\begin{aligned}
&R_0(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}, \\
&R_1(\lambda) N_1 = (a_{11} - \lambda) A_{22}, \\
&R_2(\lambda) N_2 = (a_{22} - \lambda) A_{11}, \\
&R_3(\lambda) N_3 = N_3 = \max(a_{21}\cdot A_{12}, a_{12}\cdot A_{21}, A_{11}\cdot A_{22}, A_{21}\cdot A_{12}).
\end{aligned}$$

Assim, para um certo neutriz idempotente $I \neq \{0\}$, supondo que, $N_3 \subseteq I$, então tem-se

$$P(\lambda) \subseteq I \Leftrightarrow \begin{cases} R_0(\lambda) \in I \\ R_1(\lambda) N_1 \subseteq I \\ R_2(\lambda) N_2 \subseteq I. \end{cases}$$

De agora em diante, dados dois números naturais standard p e q, com $p \leq q$, e uma função injetiva g de $\{1, 2, \ldots, q\}$ a $\mathbb{N}$, representa-se por ${C^g}_{(p,q)}$ o conjunto dos subconjuntos, com p elementos, de $\{g(1), g(2), \ldots, g(q)\}$. Quando g é a função identidade ${C^g}_{(p,q)}$ é simplesmente representado por $C_{(p,q)}$. ${A'}^g_{(p,q)}$ representa o conjunto dos arranjos com repetição, com p elementos, de $\{g(1), g(2), \ldots, g(q)\}$. Quando g é a função identidade ${A'}^g_{(p,q)}$ é simplesmente representado por ${A'}_{(p,q)}$.

Lema 8.3. *Seja n um número natural standard. Sejam $\alpha_{ij} = a_{ij} + A_{ij}$ números externos , com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $A_{ij} \in \mathcal{N}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_{ii} - \lambda) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} ((a_{ii} - \lambda) + A_{ii}) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{C_i^n} q_{ij}(\lambda) \cdot N_{ij} \right) + N,$$

com $N, N_{ij} \in \mathcal{N}$, $q_{ij}(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} \left(a_{f(k)f(k)} - \lambda \right)$, $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in C_{(i,n)}$.

Demonstração. Mostra-se aplicando o princípio de Indução Externa.

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $\alpha_{11} - \lambda = a_{11} - \lambda + A_{11}$. Suponha-se que

$$\prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_{ii} - \lambda) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - \lambda) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{C_i^{n-1}} N'_{ij} \cdot q'_{ij}(\lambda) + N', \tag{8.2}$$

com $N', N'_{ij} \in \mathcal{N}$, $q'_{ij}(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} \left(a_{f(k)f(k)} - \lambda \right)$, $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in C_{(i,n-1)}$. Então, aplicando a fórmula (8.2) e as propriedades de operações em $\mathbb{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} (\alpha_{ii} - \lambda) &= \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_{ii} - \lambda) \cdot ((a_{nn} - \lambda) + A_{nn}) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - \lambda) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{C_i^{n-1}} N'_{ij} \cdot q'_{ij}(\lambda) + N' \right) \cdot ((a_{nn} - \lambda) + A_{nn}) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - \lambda) (a_{nn} - \lambda) + \prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - \lambda) A_{nn} + \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{C_i^{n-1}} N'_{ij} \cdot q'_{ij}(\lambda) \right) (a_{nn} - \lambda) + \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{C_i^{n-1}} N'_{ij} \cdot q'_{ij}(\lambda) \right) A_{nn} + N' \cdot (a_{nn} - \lambda) + N' \cdot A_{nn}.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{C_i^{n-1}} N'_{ij} \cdot q'_{ij}(\lambda) \right) (a_{nn} - \lambda) = \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=1}^{C_i^{n-1}} \left(N'_{ij} \cdot q'_{ij} (\lambda) \cdot (a_{nn} - \lambda) \right) + \\
+ \sum_{j=1}^{C_{n-2}^{n-1}} \left(N'_{n-2j} \cdot q'_{n-2j} (\lambda) \cdot (a_{nn} - \lambda) \right)
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{C_i^{n-1}} \left(N'_{ij} \cdot q'_{ij}(\lambda) \cdot A_{nn} \right) = \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=1}^{C_i^{n-1}} \left(N'_{ij} \cdot q'_{ij} (\lambda) \cdot A_{nn} \right) + \sum_{j=1}^{C_1^{n-1}} \left(N'_{1j} \cdot q'_{1j} (\lambda) \cdot A_{nn} \right),$$

então, a partir de (8.3), tem-se

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(\alpha_{ii}-\lambda) &= \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)+\sum_{j=1}^{C_1^{n-1}}\Big(N'_{1j}\cdot q'_{1j}(\lambda)\cdot A_{nn}\Big)+N'\cdot(a_{nn}-\lambda)+\\ &+\sum_{i=1}^{n-3}\sum_{j=1}^{C_i^{n-1}}\Big(N'_{ij}\cdot q'_{ij}(\lambda)\cdot(a_{nn}-\lambda)\Big)+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=1}^{C_i^{n-1}}\Big(N'_{ij}\cdot q'_{ij}(\lambda)\cdot A_{nn}\Big)+\\ &+\sum_{j=1}^{C_{n-2}^{n-1}}\Big(N'_{n-2j}\cdot q'_{n-2j}(\lambda)\cdot(a_{nn}-\lambda)\Big)+\prod_{i=1}^{n-1}(a_{ii}-\lambda)\cdot A_{nn}+N,\end{aligned} \tag{8.4}$$

com $N = N' \cdot A_{nn}$.

Como $C_1^{n-1}+1=n-1+1=n=C_1^n$ e o produto de neutrizes é uma neutriz, então

$$\sum_{j=1}^{C_1^{n-1}}\Big(N'_{1j}\cdot q'_{1j}(\lambda)\cdot A_{nn}\Big)+N'\cdot(a_{nn}-\lambda)=\sum_{j=1}^{C_1^n}N_{1j}\cdot q_{1j}(\lambda),$$

com $N_{1j}=N'_{1j}\cdot A_{nn}$, $q_{1j}(\lambda)=q'_{1j}(\lambda)$, $j=1,2,\ldots,n-1$, $N_{1n}=N'$ e $q_{1n}(\lambda)=a_{nn}-\lambda$.

Como, também, $C_{n-2}^{n-1}+1=C_{n-1}^{n}$, então,

$$\sum_{j=1}^{C_{n-2}^{n-1}}\Big(N'_{n-2j}\cdot q'_{n-2j}(\lambda)\cdot(a_{nn}-\lambda)\Big)+\prod_{i=1}^{n-1}(a_{ii}-\lambda)\cdot A_{nn}=\sum_{j=1}^{C_{n-1}^{n}}N_{n-1j}\cdot q_{n-1j}(\lambda),$$

com $N_{n-1j}=N'_{n-2j}$, $q_{n-1j}(\lambda)=q'_{n-2j}(\lambda)\cdot(a_{nn}-\lambda)$, $j=1,2,\ldots,C_{n-2}^{n-1}$, $N_{n-1C_{n-1}^{n}}=A_{nn}$ e $q_{n-1C_{n-1}^{n}}(\lambda)=\prod_{i=1}^{n-1}(a_{ii}-\lambda)$.

Uma vez que $C_{i-1}^{n-1}+C_i^{n-1}=C_i^n$ e o produto de neutrizes é uma neutriz, tem-se:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-3}\sum_{j=1}^{C_i^{n-1}}\Big(N'_{ij}\cdot q'_{ij}(\lambda)\cdot(a_{nn}-\lambda)\Big)+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=1}^{C_i^{n-1}}\Big(N'_{ij}\cdot q'_{ij}(\lambda)\cdot A_{nn}\Big)=\\ &=\sum_{i=2}^{n-2}\left(\sum_{j=1}^{C_{i-1}^{n-1}}\Big(N'_{i-1j}\cdot q'_{i-1j}(\lambda)\cdot(a_{nn}-\lambda)\Big)+\sum_{j=1}^{C_i^{n-1}}\Big(N'_{ij}\cdot q'_{ij}(\lambda)\cdot A_{nn}\Big)\right)\\ &=\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=1}^{C_i^n}N_{ij}\cdot q_{ij}(\lambda),\end{aligned}$$

com $N_{ij}=N'_{i-1j}$, $q_{ij}(\lambda)=q'_{i-1j}(\lambda)\cdot(a_{nn}-\lambda)$ para $j=1,2,\ldots,C_{i-1}^{n-1}$, e $N_{ij}=N'_{ij}\cdot A_{nn}$, $q_{ij}(\lambda)=q'_{ij}(\lambda)$ para $j=C_{i-1}^{n-1}+1,C_{i-1}^{n-1}+2,\ldots,C_i^n$.

Tendo em conta as observações anteriores, a partir de (8.4) tem-se

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(\alpha_{ii}-\lambda) &= \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)+\sum_{j=1}^{C_1^n}N_{1j}\cdot q_{1j}(\lambda)+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=1}^{C_i^n}N_{ij}\cdot q_{ij}(\lambda)+\\ &\quad+\sum_{j=1}^{C_{n-1}^n}N_{n-1j}\cdot q_{n-1j}(\lambda)+N\\ &=\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n}N_{ij}\cdot q_{ij}(\lambda)+N,\end{aligned}$$

com N, N_{ij} neutrizes, $q_{ij}(\lambda)=\prod\limits_{k=1}^{i}\left(a_{f(k)f(k)}-\lambda\right)$, $\{f(1),f(2),\ldots,f(i)\}\in C_{(i,n)}$. □

Corolário 8.4. *Nas condições do Lema 8.3, tem-se*

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_{ii}-\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)+A(\lambda)+N,$$

onde $A(\lambda),N\in\mathcal{N}$ é um polinómio neutricial.

Demonstração. Pelo Lema 8.3, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, tem-se

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_{ii}-\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n}q_{ij}(\lambda)\cdot N_{ij}+N,$$

com $N,N_{ij}\in\mathcal{N}$, $q_{ij}(\lambda)=\prod\limits_{k=1}^{i}\left(a_{f(k)f(k)}-\lambda\right)$, $\{f(1),f(2),\ldots,f(i)\}\in C_{(i,n)}$.

Para todo $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, para todo $\{f(1),f(2),\ldots,f(i)\}\in C_{(i,n)}$, tem-se

$$q_{ij}(\lambda)=\prod_{k=1}^{i}\left(a_{f(k)f(k)}-\lambda\right)=\lambda_{ij},$$

com $\lambda_{ij}\in\mathbb{R}$. Então, tem-se

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_{ii}-\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n}\lambda_{ij}\cdot N_{ij}+N=\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)+A(\lambda)+N,$$

com $A(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{C_i^n}\lambda_{ij}\cdot N_{ij}, N\in\mathcal{N}$. □

Teorema 8.5 (Representação do polinómio característico)**.** *Seja n um número natural standard e sejam os números externos $\alpha_{ij}=a_{ij}+A_{ij}$, com $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $A_{ij}\in\mathcal{N}$, $i,j=1,2,\ldots,n$. Sejam as matrizes $\mathcal{A}=(\alpha_{ij})_{n\times n}$, I_n, a matriz identidade de ordem n, e $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Então,*

$$P(\lambda)=\det(\mathcal{A}-\lambda I_n)=\det(A-\lambda I_n)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n}N_{ij}\cdot q_{ij}(\lambda)+N,$$

com $N,N_{ij}\in\mathcal{N}$, $q_{ij}(\lambda)=\prod\limits_{k=1}^{i}\left(a_{f(k)f(k)}-\lambda\right)$, $\{f(1),f(2),\ldots,f(i)\}\in C_{(i,n)}$.

Antes da demonstração deste teorema, faz-se algumas considerações. Representa-se por S_n o conjunto das permutações σ dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Define-se $\operatorname{sgn}(\sigma)$ por

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Seja $F \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Então, representa-se por $S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus F}$ o conjunto das permutações dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus F$.

Demonstração do Teorema 8.5. Seja $\mathcal{B} = (b_{ij})_{n\times n} = \mathcal{A} - \lambda I_n$, ou seja,

$$\begin{cases} b_{ij} = \alpha_{ij} - \lambda, & \text{se } i = j \\ b_{ij} = \alpha_{ij}, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Então, pela definição do determinante de uma matriz quadrada, tem-se

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_{ii} - \lambda) + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot b_{n\sigma(n)},$$

onde existem pelo menos dois $b_{i\sigma(i)}$ tais que $i \neq \sigma(i)$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(1) Pelo Lema 8.3, tem-se

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_{ii} - \lambda) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii-\lambda}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{C_i^n} {N_{ij}}^{(1)} \cdot {q_{ij}}^{(1)}(\lambda) + N^{(1)},$$

com $N^{(1)}, {N_{ij}}^{(1)} \in \mathcal{N}$, ${q_{ij}}^{(1)}(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} \left(a_{f(k)f(k)} - \lambda\right)$, $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in C_{(i,n)}$.

(2) A soma

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot b_{n\sigma(n)} \tag{8.5}$$

é composta por produtos com pelos menos 2 fatores fora da diagonal principal.

(a) Para cada $m \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ fatores da diagonal principal na soma (8.5), a soma dessas parcelas é

$$\sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \left(\prod_{k=1}^{m} \left(\alpha_{g(k)g(k)} - \lambda\right) \cdot \left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}} \prod_{k=1}^{n-m} \alpha_{i_k h(k)} \right) \right),$$

com $i_1 < i_2 < \cdots < i_k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{g(1), g(2), \ldots, g(m)\}$.
Para todo $m \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, para todo $\{g(1), g(2), \ldots, g(m)\} \in C_{(m,n)}$, pelo Lema 8.3, tem-se

$$\prod_{k=1}^{m} \left(\alpha_{g(k)g(k)} - \lambda\right) = \prod_{k=1}^{m} \left(a_{g(k)g(k)} - \lambda\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{C_i^m} {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) \cdot {N_{ij}}^{(2)} + N^{(2)}, \tag{8.6}$$

com ${q_{ij}}^{(2)}(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} \left(a_{f(k)f(k)} - \lambda\right)$, $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in {C^g}_{(i,m)}$, ${N_{ij}}^{(2)}, N^{(2)} \in \mathcal{N}$.

Pelas propriedades de operações com números externos, para todo $m \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, para todo $\{g(1), g(2), \ldots, g(m)\} \in C_{(m,n)}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{h \in S_{\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}}, \\ i_k \neq h(k)}} \prod_{k=1}^{n-m} \alpha_{i_k h(k)} &= \sum_{\substack{h \in S_{\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}}, \\ i_k \neq h(k)}} \prod_{k=1}^{n-m} \left(a_{i_k h(k)} + A_{i_k h(k)} \right) \\
&= \sum_{\substack{h \in S_{\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}}, \\ i_k \neq h(k)}} \prod_{k=1}^{n-m} \left(a_{i_k h(k)} + A_{i_k h(k)} \right) \\
&= \sum_{\substack{h \in S_{\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}}, \\ i_k \neq h(k)}} \left(\prod_{k=1}^{n-m} a_{i_k h(k)} \right) + N^{(3)},
\end{aligned} \tag{8.7}$$

com $N^{(3)} \in \mathcal{N}$.

Logo, a partir das fórmulas (8.6) e (8.7) e tendo em conta os Teoremas 3.41 e 3.13, tem-se

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\alpha_{g(k)g(k)}-\lambda\right)\cdot\left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}}\prod_{k=1}^{n-m}\alpha_{i_kh(k)}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{m}\left(a_{g(k)g(k)}-\lambda\right)\cdot\left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}}\prod_{k=1}^{n-m}a_{i_kh(k)}\right)+$$

$$+\left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}}\prod_{k=1}^{n-m}a_{i_kh(k)}\right)\cdot\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{C_i^m}q_{ij}{}^{(2)}(\lambda)\cdot N_{ij}{}^{(2)}+$$

$$+\left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}}\prod_{k=1}^{n-m}a_{i_kh(k)}\right)\cdot N^{(2)}+$$

$$+\prod_{k=1}^{m}\left(a_{g(k)g(k)}-\lambda\right)\cdot N^{(3)}+N^{(3)}\cdot\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{C_i^m}q_{ij}{}^{(2)}(\lambda)\cdot N_{ij}{}^{(2)}+N^{(3)}\cdot N^{(2)}=$$

$$=\prod_{k=1}^{m}\left(a_{g(k)g(k)}-\lambda\right)\cdot\left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}}\prod_{k=1}^{n-m}a_{i_kh(k)}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{C_i^m}q_{ij}{}^{(2)}(\lambda)\cdot N_{ij}{}^{(2')}+N^{(2')}+\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_{g(k)g(k)}-\lambda\right)\right)\cdot N^{(3)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{C_i^m}q_{ij}{}^{(2)}(\lambda)\cdot N_{ij}{}^{(2'')}+N^{(2'')}$$

$$=\prod_{k=1}^{m}\left(a_{g(k)g(k)}-\lambda\right)\cdot\left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}}\prod_{k=1}^{n-m}a_{i_kh(k)}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{C_i^m}q_{ij}{}^{(2)}(\lambda)\cdot N_{ij}{}^{(3')}+\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_{g(k)g(k)}-\lambda\right)\right)\cdot N^{(3)}+N^{(3')},$$

onde

$$N_{ij}{}^{(2')}=\left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}}\prod_{k=1}^{n-m}a_{i_kh(k)}\right)\cdot N_{ij}{}^{(2)},$$

$$N^{(2')}=\left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}}\prod_{k=1}^{n-m}\alpha_{i_kh(k)}\right)\cdot N^{(2)},$$

$$N_{ij}{}^{(2'')}=N^{(3)}\cdot N_{ij}{}^{(2)},N^{(2'')}=N^{(3)}\cdot N^{(2)},N^{(3')}=N^{(2')}+N^{(2'')}$$

são neutrizes.

Assim, para cada $m \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, tem-se

$$\sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \left(\prod_{k=1}^{m} \left(\alpha_{g(k)g(k)} - \lambda\right) \cdot \left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}} \prod_{k=1}^{n-m} \alpha_{i_k h(k)} \right)\right) =$$

$$= \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \left(\prod_{k=1}^{m} \left(a_{g(k)g(k)} - \lambda\right) \cdot \left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}} \prod_{k=1}^{n-m} a_{i_k h(k)} \right)\right) +$$

$$+ \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{C_i^m} {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) \cdot {N_{ij}}^{(3')} +$$

$$+ \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \left(\left(\prod_{k=1}^{m} \left(a_{g(k)g(k)} - \lambda\right) \right) \cdot N^{(3)} \right) + C_m^n \cdot N^{(3')}.$$

(b) Se não há nenhum fator da diagonal principal na soma (8.5), então as parcelas são da forma

$$\alpha_{1j_1} \cdot \alpha_{2j_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{nj_n},$$

com $j_1 j_2 \ldots j_n \in S_n$, $i \neq j_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Aplicando as propriedades de operações em $\mathbb{E}$, tem-se

$$\alpha_{1j_1} \cdot \alpha_{2j_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{nj_n} = \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i} + N^{(4)}.$$

(3)

$$\prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda) + \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \left(\prod_{k=1}^{m} \left(a_{g(k)g(k)} - \lambda\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\sum_{\substack{h\in S_{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{g(1),g(2)\ldots,g(m)\}},\\ i_k\neq h(k)}} \prod_{k=1}^{n-m} a_{i_k h(k)} \right)\right) + \sum_{\substack{j_1 j_2 \ldots j_n \in S_n,\\ i\neq j_i}} \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i} = \det\left(A - \lambda I_n\right).$$

(4) Aplicando os Teoremas 3.41 e 3.13, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{C_i^n} {N_{ij}}^{(1)} \cdot {q_{ij}}^{(1)}(\lambda) + \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{C_i^m} {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) \cdot {N_{ij}}^{(3')} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \left(\prod_{k=1}^{m} \left(a_{g(k)g(k)} - \lambda\right) \right) \cdot N^{(3)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-2} C_m^n \cdot N^{(3')} + N^{(1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{C_i^n} {N_{ij}}^{(3)} \cdot {q_{ij}}^{(1)}(\lambda) + \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{C_i^m} {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) \cdot {N_{ij}}^{(3')} + N,$$

com ${N_{ij}}^{(3)} = {N_{ij}}^{(1)} + N^{(3)}$, para $i = 1, 2, \ldots, n-2$, ${N_{ij}}^{(3)} = {N_{ij}}^{(1)}$, para $i = n-1, n$, $N = \sum\limits_{m=1}^{n-2} C_m^n \cdot N^{(3')} + N^{(1)}$, neutrizes.

(5) Para todo $m \in \{2, 3, \ldots, n-3\}$, para todo $\{g(1), g(2), \ldots, g(m)\} \in C_{(m,n)}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, se $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in {C^g}_{(i,m)}$, então $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in {C^g}_{(i,n-2)}$.

Como para todo $m \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$, para todo $\{g(1), g(2), \ldots, g(m)\} \in C_{(m,n)}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, C_i^m$,

$$ {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} \left(a_{f(k)f(k)} - \lambda \right), \tag{8.8} $$

onde $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in {C^g}_{(i,m)}$, então

$$ \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\} \in C_{(m,n)}} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{C_i^m} {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) \cdot {N_{ij}}^{(3')} = $$
$$ = \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(n-2)\} \in C_{(n-2,n)}} \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=1}^{C_i^{n-2}} {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) \cdot {N_{ij}}^{(3')}. $$

Como $\{g(1), g(2), \ldots, g(n-2)\} \in C_{(n-2,n)}$, então

$$ \bigcup_{\{g(1),g(2),\ldots,g(n-2)\} \in C_{(n-2,n)}} \{g(1), g(2), \ldots, g(n-2)\} = \{1, 2, \ldots, n\}. $$

Assim, para todo $\{g(1), g(2), \ldots, g(n-2)\} \in C_{(n-2,n)}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n-3$, para todo $j = 1, 2, \ldots, C_i^{n-2}$, tem-se

$$ {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} \left(a_{f(k)f(k)} - \lambda \right), $$

com $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in C_{(i,n)}$. Logo, tendo em conta os teoremas 3.13 e 3.41, tem-se

$$ \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(n-2)\} \in C_{(n-2,n)}} \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=1}^{C_i^{n-2}} {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) \cdot {N_{ij}}^{(3')} = \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=1}^{C_i^n} {q_{ij}}^{(2)}(\lambda) \cdot {N_{ij}}^{(3')}. $$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n} N_{ij}{}^{(3)} \cdot q_{ij}{}^{(1)}(\lambda) + \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(m)\}\in C_{(m,n)}} \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{C_i^m} q_{ij}{}^{(2)}(\lambda) \cdot N_{ij}{}^{(3')} +$$
$$+ N =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n} N_{ij}{}^{(3)} \cdot q_{ij}{}^{(1)}(\lambda) + \sum_{\{g(1),g(2),\ldots,g(n-2)\}\in C_{(n-2,n)}} \sum_{i=1}^{n-3}\sum_{j=1}^{C_i^{n-2}} q_{ij}{}^{(2)}(\lambda) \cdot N_{ij}{}^{(3')} +$$
$$+ N =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n} N_{ij}{}^{(3)} \cdot q_{ij}{}^{(1)}(\lambda) + \sum_{i=1}^{n-3}\sum_{j=1}^{C_i^n} q_{ij}{}^{(2)}(\lambda) \cdot N_{ij}{}^{(3')} + N$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n} q_{ij}(\lambda) \cdot N_{ij} + N,$$

com $q_{ij}(\lambda) = q_{ij}{}^{(1)}(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $N_{ij} = N_{ij}{}^{(3)}$, $i = n-2, n-1, n$, $N_{ij} = N_{ij}{}^{(3)} + N_{ij_1}{}^{(3')}$, $i = 1, 2, \ldots, n-3$, $q_{ij}{}^{(1)}(\lambda) = q_{ij_1}{}^{(2)}(\lambda)$.

Dos pontos *(1)*, *(2)*, *(3)*, *(4)* e *(5)*, conclui-se que

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathcal{A} - \lambda I_n) \\ &= \det(A - \lambda I_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n} N_{ij} \cdot q_{ij}(\lambda) + N, \end{aligned}$$

com $N, N_{ij} \in \mathcal{N}$, $q_{ij}(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} \left(a_{f(k)f(k)} - \lambda\right)$, $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in C_{(i,n)}$. □

Teorema 8.6. *Seja n um número natural standard. Sejam os números externos $\alpha_{ij} = a_{ij} + A_{ij}$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $A_{ij} \in \mathcal{N}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Sejam a matriz $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ e a neutriz idempotente $I \neq \{0\}$. Então, as soluções da equação $P(\lambda) \subseteq I$, quando existem, são números externos.*

Demonstração. Seja n um número natural standard. Sejam os números externos $\alpha_{ij} = a_{ij} + A_{ij}$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $A_{ij} \in \mathcal{N}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Sejam a matriz $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ e o neutriz idempotente $I \neq \{0\}$.

Pelo Teorema 8.5, tem-se

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{C_i^n} N_{ij} \cdot q_{ij}(\lambda) + N,$$

com N, N_{ij} neutrizes, $q_{ij}(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} \left(a_{f(k)f(k)} - \lambda\right)$, $\{f(1), f(2), \ldots, f(i)\} \in C_{(i,n)}$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Assim,

$$P(\lambda) \subseteq I \Leftrightarrow \begin{cases} \det(A - \lambda I_n) \in I \\ q_{ij}(\lambda) \in I : N_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, n-1, j = 1, 2, \ldots, C_i^n \\ N \subseteq I. \end{cases}$$

Pelo Teorema 5.7, as soluções das equações $\det(A - \lambda I_n) \in I$ e $q_{ij}(\lambda) \in I : N_{ij}$, com $i = 1, 2, \ldots, n-1, j = 1, 2, \ldots, C_i^n$, são números externos. Assim, supondo que $N \subseteq I$, como a interseção de números externos, quando não vazio, é um número externo, então as soluções da equação $P(\lambda) \subseteq I$, quando existem, são números externos. $\square$

Como ilustração do Teorema 8.6, analisa-se o caso da matriz $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{E})$.

Sejam os números externos $\alpha_{ij} = a_{ij} + A_{ij}$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $A_{ij} \in \mathcal{N}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Sejam a matriz complexa $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$, a matriz identidade $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$. Então,

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I_3) &= \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= ((a_{11}-\lambda) + A_{11}) \cdot ((a_{22}-\lambda) + A_{22}) \cdot ((a_{33}-\lambda) + A_{33}) + (a_{13} + A_{13}) \cdot \\
&\quad \cdot (a_{21} + A_{21}) \cdot (a_{32} + A_{32}) + (a_{31} + A_{31}) \cdot (a_{12} + A_{12}) \cdot (a_{23} + A_{23}) - \\
&\quad - (a_{13} + A_{13}) \cdot ((a_{22}-\lambda) + A_{22}) \cdot (a_{31} + A_{31}) - (a_{21} + A_{21}) \cdot (a_{12} + A_{12}) \cdot \\
&\quad \cdot ((a_{33}-\lambda) + A_{33}) - (a_{32} + A_{32}) \cdot (a_{23} + A_{23}) \cdot ((a_{11}-\lambda) + A_{11}) \\
&= ((a_{11}-\lambda) \cdot (a_{22}-\lambda) + (a_{11}-\lambda) \cdot A_{22} + (a_{22}-\lambda) \cdot A_{11} + A_{11} \cdot A_{22}) \cdot \\
&\quad \cdot ((a_{33}-\lambda) + A_{33}) + (a_{13} \cdot a_{21} + a_{13} \cdot A_{21} + a_{21} \cdot A_{13} + A_{13} \cdot A_{21}) \cdot \\
&\quad \cdot (a_{32} + A_{32}) + (a_{31} \cdot a_{12} + a_{31} \cdot A_{12} + a_{12} \cdot A_{31} + A_{31} \cdot A_{12}) \cdot (a_{23} + A_{23}) - \\
&\quad - (a_{13} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot A_{31} + a_{31} \cdot A_{13} + A_{13} \cdot A_{31}) \cdot ((a_{22}-\lambda) + A_{22}) - \\
&\quad - (a_{21} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot A_{12} + a_{12} \cdot A_{21} + A_{21} \cdot A_{12}) \cdot ((a_{33}-\lambda) + A_{33}) - \\
&\quad - (a_{32} \cdot a_{23} + a_{32} \cdot A_{23} + a_{23} \cdot A_{32} + A_{32} \cdot A_{23}) \cdot ((a_{11}-\lambda) + A_{11}) \\
&= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (a_{11} \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{33} + a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{31} + \\
&\quad + a_{12} \cdot a_{31} + a_{32} \cdot a_{23})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - \\
&\quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (a_{11}-\lambda) \cdot (a_{33}-\lambda) \cdot A_{22} + \\
&\quad + (a_{22}-\lambda) \cdot (a_{33}-\lambda) \cdot A_{11} + (a_{11}-\lambda) \cdot (a_{22}-\lambda) \cdot A_{33} + \\
&\quad + (a_{11}-\lambda) \cdot (a_{23} \cdot A_{32} + a_{32} \cdot A_{23} + A_{22} \cdot A_{33}) + (a_{22}-\lambda) \cdot (a_{13} \cdot A_{31} + \\
&\quad + a_{31} \cdot A_{13} + A_{11} \cdot A_{33}) + (a_{33}-\lambda) \cdot (a_{12} \cdot A_{21} + a_{21} \cdot A_{12} + A_{11} \cdot A_{22}) + \\
&\quad + a_{13} \cdot a_{21} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot A_{21} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot A_{13} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot A_{32} + \\
&\quad + a_{31} \cdot a_{23} \cdot A_{12} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot A_{31} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot A_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot A_{33} + \\
&\quad + a_{13} \cdot a_{31} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot A_{11}.
\end{aligned}
$$

Sejam

$$\begin{aligned}
R_0(\lambda) = &-\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\lambda^2 - (a_{11}\cdot a_{22} + a_{11}\cdot a_{33} + a_{22}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{31} + \\
&+ a_{12}\cdot a_{31} + a_{32}\cdot a_{23})\,\lambda + a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - \\
&- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{31}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} = \det(A - \lambda I_3)\,,\\
R_1(\lambda)\,N_1 = &(a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda)\,A_{33},\\
R_2(\lambda)\,N_2 = &(a_{11}-\lambda)\cdot(a_{33}-\lambda)\,A_{22},\\
R_3(\lambda)\,N_3 = &(a_{22}-\lambda)\cdot(a_{33}-\lambda)\,A_{11},\\
R_4(\lambda)\,N_4 = &(a_{11}-\lambda)\,(a_{23}\cdot A_{32},\ a_{32}\cdot A_{23},\ A_{22}\cdot A_{33})\,,\\
R_5(\lambda)\,N_5 = &(a_{22}-\lambda)\,(a_{13}\cdot A_{31},\ a_{31}\cdot A_{13},\ A_{11}\cdot A_{33})\,,\\
R_6(\lambda)\,N_6 = &(a_{33}-\lambda)\,(a_{12}\cdot A_{21},\ a_{21}\cdot A_{12},\ A_{11}\cdot A_{22})\,,\\
N = &\,a_{13}\cdot a_{21}\cdot A_{32} + a_{13}\cdot a_{32}\cdot A_{21} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot A_{13} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot A_{32} + \\
&+ a_{31}\cdot a_{23}\cdot A_{12} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot A_{31} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot A_{23} + a_{21}\cdot a_{12}\cdot A_{33} + \\
&+ a_{13}\cdot a_{31}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot a_{23}\cdot A_{11}.
\end{aligned}$$

Então, o polinómio generalizado P reduz-se ao polinómio estruturado

$$\det(A - \lambda I) + \sum_{k=1}^{6} R_i(\lambda)\,N_i + N.$$

Seja $I \neq \{0\}$ um neutriz idempotente. Assim, supondo que $N \subseteq I$, tem-se

$$P(\lambda) \subseteq I \Leftrightarrow \begin{cases} \det(A-\lambda I) \in I \\ R_i(\lambda) \in I : N_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6. \end{cases} \tag{8.9}$$

Mais uma vez, o Teorema 5.7 garante que as soluções do sistema (8.9), quando existem, são números externos.

Bibliografia

[1] M. Diener and I. van den Berg. Halos et galaxies: une extension du lemme de robinson. 1981.

[2] B. Dinis and I. van den Berg. Algebraic properties of external numbers. *Journal of Logic and Analysis*, 3(2):1–30, 2011.

[3] B. Dinis and I. van den Berg. Axiomatics for the external numbers of nonstandard analysis. *Journal of Logic and Analysis*, 9:7(2017), p. 1-47, 2017.

[4] B. Dinis and I. van den Berg. On the quotient class of non-archimedean fields. *Indagationes Mathematicae*, 28(4):784–795, 2017.

[5] B. Dinis and I. van den Berg. Characterization of distributivity in a solid. *Indagationes Mathematicae*, 29(2):580–600, 2018.

[6] B. Dinis and I. van den Berg. *Neutrices and External Numbers: A Flexible Number System*. CRC Press, 2019.

[7] F. Koudjeti. Elements of external calculus with an application to mathematical finance. *Theses on Systems, Organizations, and Management*, 1995.

[8] F. Koudjeti and I. van den Berg. Neutrices, external numbers, and external calculus. In *Nonstandard analysis in practice*, pages 145–170. Springer, 1995.

[9] R. Lutz. Rêveries infinitésimales. *Gazette des mathématiciens*, 34:79–87, 1987.

[10] R. Lutz and M. Goze. *Nonstandard Analysis. A Practical Guide with Applications.*, volume 881. Springer, 2006.

[11] E. Nelson. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(6):1165–1198, 1977.

[12] E. Nelson. *Radically Elementary Probability Theory*, volume 117. Princeton University Press, revised edition, 1987.

[13] A. Robinson. *Non-Standard Analysis*. Princeton University Press, revised edition, 1996.

[14] W. Rudin. Principles of mathematical analysis, 1953.

[15] K. Stroyan and W. Luxemburg. *Introduction to the Theory of Infinitesimals*. Academic Press, 1976.

[16] I. van den Berg. Neutrices in more dimensions. In *The strength of nonstandard analysis*, pages 92–116. Springer, 2007.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
INSTITUTO DE INVESTIGAÇÃO
E FORMAÇÃO AVANÇADA