



Fernando Manuel Lucas Carapau

Sumário pormenorizado do seminário

(No âmbito das Provas de Agregação)

Simulação numérica para modelos de fluidos incompressíveis diferenciais de ordem 3 e generalizações

Universidade de Évora
Escola de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Janeiro de 2025

Évora, Portugal

O *Sumário pormenorizado*

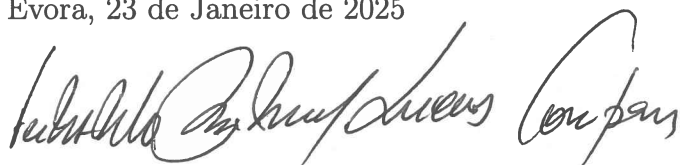
aqui apresentado

não foi escrito ao abrigo do novo Acordo Ortográfico

Sumário pormenorizado

O sumário pormenorizado do seminário com o título **Simulação numérica para modelos de fluidos incompressíveis diferenciais de ordem 3 e generalizações** é apresentada à Universidade de Évora no âmbito das Provas de Agregação em Matemática ao abrigo da alínea c) do Artigo 5.º do Decreto-Lei n.º 239/2007 de 19 de Junho, com actualização no Decreto-Lei n.º 64/2023 de 31 de Julho.

Évora, 23 de Janeiro de 2025



(Fernando Manuel Lucas Carapau)

Conteúdo

1	Preâmbulo	1
2	Sumário pormenorizado	1
3	Conclusões e trabalho futuro	10
	Referências	11

1 Preâmbulo

O sumário pormenorizado que se segue é relativo ao seminário com o título **Simulação numérica para modelos de fluidos incompressíveis diferenciais de ordem 3 e generalizações**, tendo por base a investigação científica do autor na área da Matemática da Mecânica dos Fluidos e suas aplicações. O seminário será apresentado em provas públicas na Universidade de Évora no âmbito das provas de agregação em Matemática.

O seminário consiste num resumo dos avanços e do estado da arte para modelos matemáticos associados ao escoamento de um fluido incompressível do tipo diferencial de ordem 3 num tubo rectilíneo de secção transversal circular com raio variável, ver [1]. No mesmo sentido, será ainda abordado o caso concreto de um fluido Newtoniano generalizado com aplicações à hemodinâmica, num tubo rectilíneo de secção transversal circular com raio constante, ver [2].

2 Sumário pormenorizado

Uma das questões mais desafiadoras na área da Matemática da Mecânica dos Fluidos tem sido encontrar equações constitutivas precisas para fluidos que não obedeçam à lei Newtoniana envolvendo a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação. Este amplo conjunto de fluidos não-Newtonianos tem sido extensivamente estudado devido à sua particular relevância no campo das aplicações e em diferentes áreas científicas, por exemplo, na Biologia, na Matemática, na Física, na Química, na Hemodinâmica, nas Engenharias e na Indústria.

As equações diferenciais usadas para modelar o fluxo de um fluido incompressível não-Newtoniano são fortemente não-lineares e complexas. Com o objectivo de descrever matematicamente algumas propriedades associadas aos fluidos não-Newtonianos, diversos tipos de equações constitutivas foram propostas. Entre muitos dos modelos propostos, os fluidos do tipo diferencial de Rivlin-Ericksen merecem-nos uma especial atenção.

Nas últimas décadas, os fluidos de tipo diferencial têm atraído muita atenção e controvérsia por parte da comunidade científica, ver Dunn e Rajagopal [3]. Como casos particulares de fluidos de tipo Rivlin-Ericksen, temos os fluidos de ordem 2 e

de ordem 3. Questões relevantes relacionadas com estes fluidos foram discutidas em detalhe por Dunn e Fosdick [4] e, ainda, por Fosdick e Rajagopal [5], [6]. É um facto bem estabelecido que os fluidos de ordem 2 exibem o efeito de tensão normal e não apresentam os fenómenos de afinamento e espessamento de cisalhamento que muitos fluidos apresentam. No entanto, os fluidos de ordem 3 são capazes de descrever tais fenómenos (ver Mansutti e Rajagopal [7], Mansutti et al. [8] e Massoudi [9]), relevante em muitos problemas associados ao escoamento de um fluido.

Algumas condições teóricas que impõem restrições para os parâmetros materiais foram descritas por Fosdick e Rajagopal [6] e, Rajagopal [10], mostrando que essas restrições implicam que as medições viscométricas são de facto suficientes para determinar a forma da equação constitutiva para todos os fluxos de fluidos de ordem 3 termodinamicamente compatíveis. Por conseguinte, uma forma para se apresentar a equação constitutiva para um fluido não-Newtoniano consiste em fornecer ao tensor de tensão suplementar uma fórmula recursiva em função da parte simétrica do gradiente de velocidade e da derivada do tempo material. Essa metodologia foi proposta e apresentada por Rivlin e Ericksen [11], ficando esses fluidos conhecidos por fluidos viscoelásticos do tipo diferencial com complexidade n . O trabalho de Dunn e Rajagopal [3], apresenta-nos uma perspectiva completa e detalhada sobre algumas das questões relevantes relacionadas com fluidos do tipo diferencial. O tensor de tensão suplementar para esses fluidos é dado por (ver Coleman e Noll [12])

$$\mathbf{T}_E = \mathbf{S}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n), \quad (1)$$

onde $\mathbf{S}$ é uma função tensorial isotrópica e os n tensores de Rivlin-Ericksen designados por $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ (ver Rivlin e Ericksen [11]), são dados pela fórmula recursiva

$$\mathbf{A}_1 = \nabla \boldsymbol{\vartheta} + (\nabla \boldsymbol{\vartheta})^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_n = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}_{n-1}) + \mathbf{A}_{n-1} \nabla \boldsymbol{\vartheta} + (\nabla \boldsymbol{\vartheta})^T \mathbf{A}_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3)$$

onde¹ $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}, t)$ é o vector de velocidade tridimensional; $\nabla \boldsymbol{\vartheta}$ é o gradiente de velocidade e, $(\nabla \boldsymbol{\vartheta})^T$ indica a transposta de $\nabla \boldsymbol{\vartheta}$. A expressão $\frac{d}{dt}(\cdot)$ indica a derivada do tempo material, dada por

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \boldsymbol{\vartheta} \cdot \nabla(\cdot),$$

¹ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ é o vector das coordenadas cartesianas e t a variável do tempo, por conveniência $x_3 = z$.

sendo $\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$ a derivada parcial em relação ao tempo.

Consideramos em seguida a equação constitutiva para um fluido de Rivlin-Ericksen incompressível e homogêneo de ordem 3, onde o tensor de tensão de Cauchy é dado por

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}_E, \quad (4)$$

sendo p a pressão e $-p\mathbf{I}$ a parte esférica da tensão devido à restrição de incompressibilidade. O tensor $\mathbf{T}_E$ é o tensor de tensão suplementar dado por (ver Truesdell e Noll [13])

$$\mathbf{T}_E = \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta_1\mathbf{A}_3 + \beta_2(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1) + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1, \quad (5)$$

onde μ é a constante de viscosidade do fluido e, as quantidades α_1 , α_2 , β_1 , β_2 e β_3 são parâmetros viscoelásticos – também chamados de coeficientes de tensão normais. Os tensores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ são tensores de Rivlin-Ericksen dados pela fórmula recursiva (2) e (3). A expressão "tr" designa o operador traço. Em situações concretas, as quantidades μ , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 e β_3 podem depender de vários factores, por exemplo, da pressão, da temperatura ou da taxa de cisalhamento (ver Truesdell e Noll [13]).

De mencionar que quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ em (5), o tensor $\mathbf{T}_E$ ficará afecto ao escoamento de um fluido Newtoniano. Por outro lado, ao considerarmos apenas $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ o tensor $\mathbf{T}_E$ ficará associado ao escoamento de um fluido de ordem 2. Em ambos os casos, existe uma vasta literatura científica especializada sobre diferentes abordagens teóricas e no campo das aplicações.

A estabilidade e a termodinâmica da equação constitutiva (4) em conjugação com o tensor de tensão (5), foram estudadas em detalhe por Fosdick e Rajagopal [6], mostrando que se todos os movimentos do fluido forem compatíveis com a termodinâmica no sentido de que esses movimentos verificam a desigualdade de Clausius-Duhem e se for suposto que a energia livre específica de Helmholtz é mínima quando o fluido está localmente em repouso, então

$$\mu \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad |\alpha_1 + \alpha_2| \leq \sqrt{24\mu\beta_3}, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \beta_3 \geq 0. \quad (6)$$

Além disso, se as desigualdades em (6) forem estritas, então o fluido está assintoticamente em repouso, ou seja, o estado de repouso é assintoticamente estável. Quando $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, estamos perante um fluido de ordem 2. Para este caso concreto a estabilidade e a termodinâmica foram objecto de estudo por parte de Dunn e Fosdick

[4]. Estes autores mostraram que a desigualdade de Clausius-Duhem para um fluido de ordem 2 é verificada desde que

$$\mu \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad (7)$$

Estes e outros aspectos dos modelos para fluidos diferenciais de grau n foram estudados por Dunn e Rajagopal [3].

Na nossa exposição e levando em consideração a condição (6), a equação constitutiva (4) em conjugação com (5) para um fluido termodinamicamente compatível de ordem 3 é reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1, \\ &= -p\mathbf{I} + \left(\mu + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_1^2)\right)\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2, \end{aligned} \quad (8)$$

onde a quantidade μ_{eff} dada por

$$\mu_{eff} := \mu + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_1^2),$$

pode ser considerada como sendo uma viscosidade dependente da taxa de cisalhamento (ver Mansutti e Rajagopal [7], Mansutti et al. [8] e Massoudi [9]), característica muito importante no campo das aplicações relativamente aos fluidos não-Newtonianos.

Diferentes modelos matemáticos para um fluido de ordem 3 associados à equação constitutiva (8) tiveram nas últimas décadas um desenvolvimento acentuado em termos teóricos e, em termos de aplicações para as mais variadas áreas científicas. Entre outros trabalhos, destacamos [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33] e [34].

Ao considerar o parâmetro material $\beta_3 = 0$ na expressão (8), vamos obter com base na condição (7) um fluido de ordem 2, com equação constitutiva

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2. \quad (9)$$

Nas últimas décadas foram apresentados vários modelos matemáticos associados à equação constitutiva (9), desencadeando um estudo interessante quer no campo teórico, quer no campo das aplicações. Entre outros trabalhos, destacamos [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46] e [47].

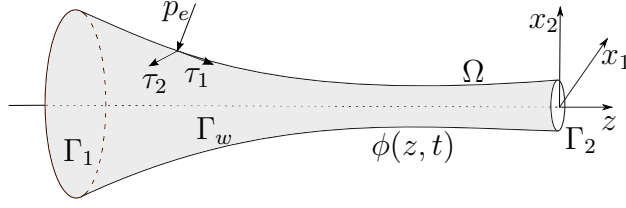


Figura 1: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é o domínio tridimensional para o escoamento simétrico de um fluido relativamente ao eixo z , com componente normal (p_e) e tangenciais (τ_1 e τ_2) do vector de tração superficial. A função $\phi(z, t)$ representa a função da superfície do domínio relativo ao eixo do escoamento z e ao tempo t . A fronteira $\partial\Omega$ é composta pela secção transversal de entrada Γ_1 , pela secção de saída Γ_2 e pela superfície lateral do tubo, representada por Γ_w .

Com base na equação constitutiva (8), vamos considerar o fluxo isotérmico de um fluido de ordem 3 homogéneo num tubo rectilíneo, impermeável de secção transversal circular com raio variável ao longo do eixo do escoamento, ver Figura 1.

O escoamento simétrico do fluido está limitado pela função escalar $\phi(z, t)$, relativamente à superfície lateral do tubo rectilíneo de secção transversal circular com raio variável, dada pela seguinte relação

$$\phi^2(z, t) = x_1^2 + x_2^2. \quad (10)$$

Por conseguinte, com base na equação constitutiva (8), consideramos o escoamento de um fluido incompressível de ordem 3, num tubo rectilíneo e impermeável de secção transversal circular, com superfície lateral dada pela expressão (10). Nesse sentido, o modelo matemático relativo às equações de movimento, considerando a conservação do momento linear e massa, desprezando as forças exteriores, é dado em $\Omega \times (0, T)$ por

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}}{\partial t} + \boldsymbol{\vartheta} \cdot \nabla \boldsymbol{\vartheta} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\vartheta} = 0 \\ \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta_3 (\text{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{t}_w = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (11)$$

com condições iniciais

$$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\vartheta}_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (12)$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet homogéneas

$$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_w \times (0, T). \quad (13)$$

No modelo matemático (11), a equação (11)₁ representa o equilíbrio do momento linear sem forças exteriores, onde a constante ρ representa a densidade do fluido; a equação (11)₂ é a condição de incompressibilidade. Na equação (11)₃, o tensor $\mathbf{T}$ representa a equação constitutiva relativa ao fluido em estudo e $\mathbf{t}_w$ representa o vector de tensão na superfície lateral do domínio cujo vector normal unitário externo é dado por $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$.

A implementação numérica deste modelo tridimensional (11) – (13) associado a um fluido de ordem 3 é bastante exigente em termos de cálculo computacional, o que em muitas situações se torna inviável. Nesse sentido, com o objectivo de contornar essa dificuldade, vamos utilizar a teoria de Cosserat relacionada com a dinâmica dos fluidos (ver Caulk e Naghdi [48], Green e Naghdi [49], [50]), permitindo, sob condições muito específicas, a transição do modelo tridimensional para um modelo unidimensional, tornando a implementação computacional mais acessível.

Considerando então a teoria de Cosserat, podemos aproximar o vector de velocidade tridimensional para o fluido de uma forma muito específica. Em consequência, é possível, tendo em conta os dados do problema, através da integração da equação do momento linear, transformar o modelo tridimensional num modelo unidimensional constituído por uma equação diferencial ordinária (ou parcial). Portanto, considerando o trabalho de Caulk e Naghdi [48], o vector de velocidade tridimensional não-estacionário

$$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}, t) = \vartheta_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i,$$

é aproximado por²

$$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v} + \sum_{N=1}^k x_{\theta_1} \dots x_{\theta_N} \mathbf{W}_{\theta_1 \dots \theta_N} \quad (14)$$

com,

$$\mathbf{v} = v_i(z, t) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{W}_{\theta_1 \dots \theta_N} = W_{\theta_1 \dots \theta_N}^i(z, t) \mathbf{e}_i \quad (15)$$

onde a função $\mathbf{v}$ é a velocidade ao longo do eixo simétrico z (eixo relativo ao escoamento) com variável de tempo t e, $x_{\theta_1} \dots x_{\theta_N}$ são funções de base polinomiais de ordem k . Por outro lado os vectores $\mathbf{W}_{\theta_1 \dots \theta_N}$ são as velocidades directoras associadas a características físicas específicas do fluido (ver Caulk e Naghdi [48]) e, $\mathbf{e}_i$ são os vectores unitários.

²Os índices latinos assumem os valores 1, 2, 3, índices gregos os valores 1, 2 e usamos a convenção usual de somatório para índices repetidos.

No modelo tridimensional (11) – (13), vamos considerar o vector da velocidade tridimensional $\boldsymbol{\vartheta}$ aproximada pela expressão (14) para 9 directores, i.e., $k = 3$ em (14), obtendo assim um modelo unidimensional, dependendo apenas da variável de espaço z e de tempo t . Por conseguinte, para o modelo em estudo e com base na teoria de Cosserat, a equação adimensionalizada para o gradiente de pressão média G para uma secção finita $I = [z_1, z_2]$ da geometria do tubo de parede rígida (i.e., $\phi = \phi(z)$), é dada por

$$G(t) = \frac{1}{2}B_1Q(t) + \frac{1}{4}B_2Q^2(t) + \frac{1}{8}\hat{\beta}_3B_3Q^3(t) + \frac{1}{2}\mathcal{W}_0^2B_4\frac{d}{dt}(Q(t)) \quad (16)$$

onde $\mathcal{W}_0$ é o número de Womersley; Q é a taxa de fluxo volumétrico e $\hat{\beta}_3$ é um parâmetro viscoelástico. Os parâmetros B_1 e B_3 dependem apenas da geometria do tubo no intervalo I , o parâmetro B_2 depende dos coeficientes de tensão normais adimensionais $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e, ainda, da geometria do tubo no intervalo I . Por sua vez, o parâmetro B_4 depende, para além, da geometria do tubo no intervalo I , do coeficiente de tensão normal adimensional $\hat{\alpha}_1$.

No seguimento, a equação adimensionalizada para a tensão de cisalhamento τ_1 na superfície lateral do tubo, é dada por

$$\tau_1(z, t) = \frac{1}{2 + 2\frac{d}{dz}(\phi)^2} \left(\frac{C_1}{2\phi^3}Q(t) + \frac{C_2}{4\phi^4}Q^2(t) + \hat{\beta}_3\frac{C_3}{8\phi^9}Q^3(t) + \mathcal{W}_0^2\frac{C_4}{2\phi}\frac{d}{dt}(Q(t)) \right). \quad (17)$$

Os parâmetros C_1 e C_3 dependem apenas da geometria do tubo, o parâmetro C_2 depende dos coeficientes de tensão normais $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e, ainda, da geometria do tubo. Por sua vez, o parâmetro C_4 depende, para além, da geometria do tubo, do coeficiente de tensão normal $\hat{\alpha}_1$.

Consequentemente, considerando as equações (16) e (17) para dados específicos e usando um método de Runge-Kutta, no decorrer do seminário, apresentaremos simulações numéricas para a taxa de fluxo volumétrico e para a tensão de cisalhamento na superfície lateral do tubo em estudo.

Considerando o trabalho experimental de Beracea et al. [51], Mall-Gleissle et al. [52] e Tao et al. [53], relativo a polímeros, suspensões e cristais líquidos, podemos concluir que existe uma variação nos termos da viscosidade e nos termos da viscoelasticidade associados a diferentes taxas de cisalhamento, em conformidade com o trabalho de Truesdell e Noll [13], permitindo desta forma uma vasta generalização de modelos associados ao problema (11) – (13). Uma dessas generalizações e, pela

sua importância no campo das aplicações à hemodinâmica consiste no modelo para um fluido incompressível Newtoniano generalizado, dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}}{\partial t} + \boldsymbol{\vartheta} \cdot \nabla \boldsymbol{\vartheta} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{T} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\vartheta} = 0 \\ \boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \mu(|\dot{\gamma}|) \boldsymbol{A}_1, \quad \boldsymbol{t}_w = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\eta} \end{array} \right. \quad (18)$$

definido num tubo rectilíneo de parede rígida de secção transversal circular com raio constante, com condições iniciais (12) e condições de fronteira (13). Para este modelo, a função

$$\mu(|\dot{\gamma}|) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (19)$$

é uma função de viscosidade dependente da taxa de cisalhamento, $\dot{\gamma}$ definida por

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{2\boldsymbol{D} : \boldsymbol{D}}$$

com,

$$\boldsymbol{D} := \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{\vartheta} + (\nabla \boldsymbol{\vartheta})^T)$$

sendo $\boldsymbol{D}$ o tensor de deformação. Em vasos sanguíneos como artérias e veias, o sangue é geralmente numa primeira abordagem modelado como um fluido Newtoniano. No entanto, em vasos pequenos, como arteríolas e vénulas, com diâmetros comparados aos das células, o sangue comporta-se como um fluido pseudoplástico (a viscosidade diminui com o aumento da taxa de cisalhamento). Em particular, em repouso ou para baixos valores da taxa de cisalhamento, o sangue apresenta uma viscosidade alta devido à agregação dos glóbulos vermelhos, enquanto que para valores elevados da taxa de cisalhamento, a viscosidade diminui, em virtude da deformabilidade dessas células (ver Baskurt e Meiselman [54] e Fasano e Sequeira [55]). Por conseguinte, em vasos com pequenos calibres o sangue apresenta características associadas aos fluidos não-Newtonianos.

No modelo (18), vamos considerar uma função de viscosidade do tipo lei de potência, dada por

$$\mu(|\dot{\gamma}|) = k|\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (20)$$

onde os parâmetros k e n são constantes positivas chamadas de consistência e índice de fluxo. Com base no trabalho de Chien et al. [56] podemos considerar que a função de viscosidade (20) para $n < 1$ é relevante para o estudo do fluxo sanguíneo em

pequenos vasos. Esta função de viscosidade tem aplicações limitadas a fluidos reais devido à natureza ilimitada da função de viscosidade, mas é amplamente utilizada e pode ser precisa para regimes específicos de fluxo. Considerando o índice de fluxo $n = 1$ na equação (20) então, a viscosidade é dada pela constante k e estamos perante um fluido com características Newtonianas. No caso em que $n < 1$ em (20), resulta

$$\lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow +\infty} \mu(|\dot{\gamma}|) = 0, \quad \lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow 0} \mu(|\dot{\gamma}|) = +\infty,$$

e temos um fluido com comportamento pseudoplástico por cisalhamento, em que a viscosidade diminui com o aumento da taxa de cisalhamento. Para $n > 1$ em (20), obtemos

$$\lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow +\infty} \mu(|\dot{\gamma}|) = +\infty, \quad \lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow 0} \mu(|\dot{\gamma}|) = 0,$$

e a viscosidade do fluido aumenta com a taxa de cisalhamento e tem um comportamento dilatante.

Para este modelo (18) com condições (12) – (13) e função viscosidade do tipo lei de potência (20), vamos obter com base na teoria de Cosserat uma equação diferencial ordinária, envolvendo: o gradiente de pressão média; a taxa de fluxo volumétrico; o número de Womersley e o índice de fluxo. Mais propriamente a equação adimensionalizada

$$G(t) = \frac{2}{3} \mathcal{W}_0^2 \frac{d}{dt}(Q(t)) + \frac{2^{\frac{3n+5}{2}}}{n+3} Q^n(t). \quad (21)$$

Obtemos, ainda, a velocidade tridimensional adimensionalizada, dada por

$$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}, t) = Q(t) \left(1 - (x_1^2 + x_2^2) \right) \mathbf{e}_3. \quad (22)$$

Consequentemente, considerando as equações (21) e (22) para dados específicos e usando um método de Runge-Kutta, no decorrer do seminário, apresentaremos simulações numéricas para a taxa de fluxo volumétrico e para a velocidade tridimensional numa secção transversal circular do tubo rectilíneo uniforme de parede rígida.

Por fim, para o modelo em estudo, existe na literatura científica uma solução exacta para a taxa de fluxo volumétrico estacionário (ver Bird et al. [57]), dada por

$$\tilde{Q} = \frac{n}{3n+1} \sqrt[n]{2^{n-1} G} \quad (23)$$

permitindo, desta forma, uma comparação com a solução correspondente obtida pela teoria de Cosserat.

3 Conclusões e trabalho futuro

Com base no sumário pormenorizado as conclusões a ter em conta com o seminário estão associadas à investigação matemática desenvolvida e publicada pelo autor na área da Matemática da Mecânica dos Fluidos e suas aplicações, nomeadamente nos resultados relativos a fluidos incompressíveis do tipo diferencial de ordem 3 (ver [1]) e Newtoniano generalizado, com função de viscosidade do tipo lei de potência (ver [2]).

As contribuições mais relevantes para o estado da arte relativas à investigação matemática desenvolvida pelo autor associada aos fluidos incompressíveis, incluem:

- Trabalhos associados ao modelo matemático (11) – (13) para a um fluido não-Newtoniano do tipo diferencial de ordem 3 e suas generalizações, ver [1], [58], [59], [60].
- O modelo matemático (11) – (13) pode ser reorganizado de forma a obtermos um modelo associado a um fluido não-Newtoniano do tipo diferencial de ordem 2 e suas generalizações. Para este caso concreto, ver [61], [62], [63], [64], [65].
- Trabalhos associados ao modelo matemático (18) com condições (12) – (13) para um fluido Newtoniano generalizado, com função viscosidade do tipo lei de potência e Carreau-Yasuda, ver [2]. Para função viscosidade do tipo Cross, ver [66].
- Trabalhos associados a um fluido Newtoniano num tubo rectilíneo de secção transversal circular com raio variável com escoamento rotacional, ver [67].

De momento existem trabalhos de autor em curso para publicação, mais concretamente:

- Bezzeghoud, M., Carapau, F., Minhós, F. and Vaidya, A. (Editors): *Advances in Mathematical Modeling in Science, Engineering and Social Sciences*, Springer Nature-Birkhäuser, Book Series: Trends in Mathematics, previsto para 2025.
- Flow of a fourth grade fluid using a director theory approach (título provisório, autores: F. Carapau e P. Correia), com base no trabalho de Caulk e Naghdi [48] e, ainda, no trabalho de Hayat et al. [68].
- Mathematical one-dimensional magneto-hydrodynamic third-grade fluid model for blood flow (título provisório, autores: F. Carapau e P. Correia), com base no trabalho de Caulk e Naghdi [48] e, ainda, no trabalho de Akbarzadeh [69].

Relativamente à investigação matemática em curso e a desenvolver num futuro próximo, pretendemos estudar problemas em aberto na área da Mecânica dos Fluidos, nomeadamente:

- O escoamento de um fluido não-Newtoniano num tubo curvo, com base no trabalho de Green et al. [70].
- O problema de interacção fluido-estrutura para um fluido Newtoniano e não-Newtoniano num tubo rectilíneo uniforme, com base no trabalho de Caulk e Naghdi [48].
- O problema da dinâmica do fluxo do filme lacrimal ocular humano, com base no trabalho Guidoboni et al. [71].

Referências

- [1] Carapau, F., Correia, P.: Numerical simulations of a third-grade fluid flow on a tube through a contraction, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **65**, 45–53 (2017)
- [2] Carapau, F., Sequeira, A.: 1D Models for blood flow in small vessels using the Cosserat theory, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5**(1), 54–62 (2006)
- [3] Dunn, J.E., Rajagopal, K.R.: Fluids of differential type: critical review and thermodynamic analysis, *Int. Journal of Engineering Science*, **33**, 689–729 (1995)
- [4] Dunn, J.E., Fosdick, R.L.: Thermodynamics, stability and boundedness of fluid of complexity 2 and fluids of second grade, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **56**, 191–252 (1974)
- [5] Fosdick, R.L., Rajagopal, K.R.: Anomalous features in the model of "second order fluids", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **70**, 145–152 (1979)
- [6] Fosdick, R.L., Rajagopal, K.R.: Thermodynamics and stability of fluids of third grade, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **339**, 351–377 (1980)
- [7] Mansutti, D., Rajagopal, K.R.: Flow of a shear thinning fluid between intersecting plates, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **26**, 769–775 (1991)
- [8] Mansutti, D., Pontrelli, G., Rajagopal, K.R.: Steady flow of non-Newtonian fluids past a porous plate with suction or injection, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **17**, 927–941 (1993)

- [9] Massoudi, M.: Local non-similarity solution for the flow of a non-Newtonian fluid over a wedge, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, **36**, 961–976 (2001)
- [10] Rajagopal, K.R.: Viscometric flows of third grade fluids, *Mech. Res. Comm.*, **7**(1), 21–25 (1980)
- [11] Rivlin, R.S., Ericksen, J.L.: Stress-deformation relations for isotropic materials, *Journal Rational Mech. Anal.*, **4**, 323–425 (1955)
- [12] Coleman, B.D., Noll, W.: An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **6**, 355–370 (1960)
- [13] Truesdell, C., Noll, W.: The Non-Linear Field Theories of Mechanics, 2nd edition, Springer (1992)
- [14] Amrouche, C., Cioranescu, D.: On a class of fluids of grade 3, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **32**, 73–88 (1997)
- [15] Bernard, J.M., Ouazar, E.H.: Stationary problem of third-grade fluids in two and three dimensions: existence and uniqueness, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **40**, 603–620 (2005)
- [16] Bresch, D., Lemoine, J.: On the existence of solutions for non-stationary third-grade fluids, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **34**, 485–498 (1999)
- [17] Busuioc, V., Iftimie, D.: Global existence and uniqueness of solutions for the equations of third grade fluids, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **39**, 1–12 (2004)
- [18] Coulaud, O.: Asymptotic profiles for third-grade fluids equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **71**, 132–151 (2015)
- [19] Le Roux, C.: On flows of third-grade fluids with non-linear slip boundary conditions, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **44**, 31–41 (2009)
- [20] Sequeira, A., Videman, J.: Global existence of classical solutions for the equations of third grade fluids, *Journal Math. Phys. Sci.*, **29**, 47–69 (1995)
- [21] Akbarzadeh, P.: Pulsatile magneto-hydrodynamic blood flows through porous blood vessels using a third grade non-Newtonian fluids model, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, **126**, 3–19 (2016)

- [22] Almeida, A., Cipriano, F.: Weak Solution for 3D-Stochastic Third Grade Fluid Equations, *Water*, **12**(11), 3211 (2020)
- [23] Guedri, K., Ahammad, A.N., Nadeem, S., Tag-ElDin, E.M., Awan, A.U., Yassen, M.F.: Insight into the heat transfer of third-grade micropolar fluid over an exponentially stretched surface, *Sci. Rep.* **12**, 15577 (2022)
- [24] Nadeem, S., Ishtiaq, B., Abbas, N.: Impact of thermal radiation on two-dimensional unsteady third-grade fluid flow over a permeable stretching Riga plate, *International Journal of Modern Physics B*, **37**(1), 2350009 (2023)
- [25] Swain, S., Sarkar, G.M., Sahoo, B.: Flow and heat transfer analysis of a special third grade fluid over a stretchable surface in a parallel free stream, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **237**(1), 39–53 (2023)
- [26] Hayat, T., Naz, R., Abbasbandy, S.: Poiseuille flow of a third-grade fluid in a porous medium, *Transp. Porous Med.*, **87**, 355–366 (2011)
- [27] Aksoy, Y., Pakdemirli, M.: Approximate analytical solutions for flow of a third-grade fluid through a parallel-plate channel filled with a porous medium, *Transp. Porous Med.*, **83**, 375–395 (2010)
- [28] Ellahi, R., Riaz, A.: Analytical solutions for MHD flow in a third-grade fluid with variable viscosity, *Math. Comp. Modell.*, **52**, 1783–1793 (2010)
- [29] Hayat, T., Naz, R., Sajid, M.: Heat transfer for flow of third-grade fluid between two porous plates, *Z. Naturforsch.*, **65a**, 837–843 (2010)
- [30] Yürüsoy, M., Pakdemirli, M.: Approximate analytical solutions for the flow of a third-grade fluid in a pipe, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **37**, 187–195 (2002)
- [31] Ellahi, R., Ariel, P.D., Hayat, T., Asghar, S.: Effect of heat transfer on a third-grade fluid in a flat channel, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **63**, 847–859 (2010)
- [32] Mollica, F., Rajagopal, K.R.: Secondary flows due to axial shearing of a third-grade fluid between two eccentrically placed cylinders, *Int. J. Eng. Sci.*, **37**, 411–429 (1999)
- [33] Akgül, M.B., Pakdemirli, M.: Analytical and numerical solutions of electro-osmotically driven flow of a third-grade fluid between micro-parallel plates, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **43**, 985–992 (2008)

- [34] Hina, S., Mustafa, M., Hayat, T., Alsaadi, F.E.: Peristaltic motion of third grade fluid in curved channel, *Appl. Math. Mech.*, Engl. Ed., **35**(1), 73–84 (2014)
- [35] Coscia, V., Galdi, G.P.: Existence, uniqueness and stability of regular steady motions of second-grade fluid, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **29**(4), 493–506 (1994)
- [36] Galdi, G.P., Padula, M., Rajagopal, K.R.: On the conditional stability of the rest state of a fluid of second grade in unbounded domains, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **109**, 173–182 (1990)
- [37] Galdi, G.P., Grobbelaar, M., Sauer, N.: Existence and uniqueness of classical solutions of the equations of motion for second-grade fluids, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **124**, 221–237 (1993)
- [38] Galdi, G.P., Sequeira, A.: Further Existence Results for Classical Solutions of the Equations of a Second-Grade Fluid, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **128**, 297–312 (1994)
- [39] Arada, N., Correia, P., Sequeira, A.: Analysis and finite element simulations of a second-order fluid model in a bounded domain, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **23**(6), 1468–1500 (2007)
- [40] Jitchote, W., Robertson, A.M.: Flow of second order fluids in curved pipes, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **90**, 91–116 (2000)
- [41] Jordan, P.M., Puri, P.: Stokes first problem for a Rivlin-Ericksen fluid of second grade in a porous half-space, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **38**, 1019–1025 (2003)
- [42] Massoudi, M., Phuoc, T.X.: Flow of a generalized second grade non-Newtonian fluid with variable viscosity, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **16**, 529–538 (2004)
- [43] Baranovskii, E.S.: Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **91**, 1–12 (2015)
- [44] Kr. Das, P.: Snider, A.D., Bhethanabotla, V.R., Acoustic streaming in second-order fluids, *Physics of Fluids*, **32**, 123103 (2020)
- [45] Paolucci, S.: Second-order constitutive theory of fluids, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **34**, 185–215 (2022)

- [46] Bhatti, K., Siddiqui, A.M., Bano, Z.: Application of the second-order fluid model to estimate factors affecting clearance of small and middle uremic molecules using combined ultrafiltration and diffusion processes, *Chinese Journal of Physics*, **86**, 458–468 (2023)
- [47] Jaffal-Mourtada, B., Yakoubi, D.: A splitting method for a stationary second grade fluid model, *AIP Conf. Proc.*, **3034**, 020017 (2024)
- [48] Caulk, D.A., Naghdi, P.M.: Axisymmetric motion of a viscous fluid inside a slender surface of revolution, *Journal of Applied Mechanics*, **54**(1), 190–196 (1987)
- [49] Green, A.E., Naghdi, P.M.: A direct theory of viscous fluid flow in channels, *Arch. Ration. Mech. Analysis*, **86**, 39–63 (1984)
- [50] Green, A.E., Naghdi, P.M.: A direct theory of viscous fluid flow in pipes I: Basic general developments, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **342**(1666), 525–542 (1993)
- [51] Beracea, M., Peati, C., Simionescu, B., Navard, P.: Shear rheology of semi-dilute poly-methyl-methacrylate solutions, *Macromolecules*, **26**, 7095–7096 (1993)
- [52] Mall-Gleissle, S.E., Gliessle, W., Mckinley, G.H.: Buggisch, H., The normal stress behavior of suspensions with viscoelastic matrix fluids, *Rheol.*, **41**, 61–76 (2002)
- [53] Tao, G., Otter, W.K., Briels, W.J.: Shear viscosities and normal stress difference in rigid liquid-crystalline polymers, *Macromolecules*, **39**, 5939–5945 (2006)
- [54] Baskurt, O.K., Meiselman, H.J.: Blood rheology and hemodynamics, *Semin Thromb Hemost*, **29**(5), 435–450 (2003)
- [55] Fasano, A., Sequeira, A.: Hemomath: The Mathematics of Blood, *Modeling, Simulation and Applications*, **18**, Springer (2017)
- [56] Chien, S., Usami, S., Dellenback, R.J., Gregerson, M.I., Nanninga, L.B., Guest, M.M., Blood Viscosity: Influence of Erythrocyte Aggregation, *Science*, **157**(3790), 829–831 (1967)
- [57] Bird, B.R., Armstrong, R.C., Hassager, O.: Dynamics of Polymeric Liquids, **1**, 2nd edition, John Wiley & Sons (1987)
- [58] Carapau, F., Correia, P., Rodrigues, G.: A three-dimensional velocity field related to a generalized third-grade fluid model, *Mathematics*, **12**, 1326 (2024)

- [59] Carapau, F., Correia, P., Rabczuk, T., Areias, P.: One-dimensional model for the unsteady flow of a generalized third-grade viscoelastic fluid, *Neural Computing and Applications*, **32**(16), 12881–12894 (2020)
- [60] Carapau, F., Janela, J., Correia, P., Vila, S.: Numerical solvability of a Cosserat model for the swirling motion of a third-grade fluid in a constant radius straight circular tube, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, **57**(2), 1–15 (2018)
- [61] Carapau, F.: One-dimensional viscoelastic fluid model where viscosity and normal stress coefficients depend on the shear rate, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 4342–4354 (2010)
- [62] Carapau, F., Sequeira, A., Janela, J.: 1D simulations of second-grade fluids with shear-dependent viscosity, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **6**(1), 151–158 (2007)
- [63] Carapau, F.: 1D Viscoelastic Flow in a Circular Straight Tube with Variable Radius, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, **19**(10), 20–39 (2010)
- [64] Carapau, F.: Axisymmetric motion of a generalized Rivlin-Ericksen fluids with shear-dependent normal stress coefficients, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **2**(2), 168–175 (2008)
- [65] Carapau, F.: Axisymmetric swirling motion of viscoelastic fluid flow inside a slender surface of revolution, *IAENG Engineering Letters*, **17**(4), 238–245 (2009)
- [66] Carapau, F., Correia, P., Areias, P.: Three-dimensional velocity field using the Cross-model viscosity function, Recent Advances in Mechanics and Fluid-Structure Interaction with Applications, *Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, Springer Nature-Birkhäuser, Part I, 39–55 (2022)
- [67] Carapau, F., Janela, J.: A one-dimensional model for unsteady axisymmetric swirling motion of a viscous fluid in a variable radius straight circular tube, *International Journal of Engineering Science*, **72**, 107–116 (2013)
- [68] Hayat, T., Wang, Y., Hutter, K.: Flow of a Fourth Grade Fluid, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **12**(6), 797–811 (2002)

- [69] Akbarzadeh, P.: Pulsatile magneto-hydrodynamic blood flows through porous blood vessels using a third grade non-Newtonian fluids model, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, **126**, 3–19 (2016)
- [70] Green, A.E., Naghdi, P.M., Stallard, M.J.: A direct theory of viscous fluid flow in pipes II: Flow of incompressible viscous fluid in curved pipes, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **342**(1), 543–572 (1993)
- [71] Guidoboni, G., Harris, A., Sacco, R.: Ocular Fluid Dynamics: Anatomy, Physiology, Imaging Techniques, and Mathematical Modeling, Springer Nature-Birkhäuser (2016)