

*Cartas de controlo com tamanhos de amostras aleatoriamente adaptativos***André Martins***Universidade de Évora, DMAT e CIMA - jimimartins@gmail.com***Paulo Infante***Universidade de Évora, DMAT e CIMA - pinfante@uevora.pt***Russell Alpizar-Jara***Universidade de Évora, DMAT e CIMA - alpizar@uevora.pt*

**Resumo:** O método mais conhecido com tamanhos de amostras adaptativos foi proposto por Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994) e é conhecido por VSS (Variable Sample Sizes). Neste, uma amostra maior é utilizada quando a estatística amostral cai numa região próxima dos limites de controlo e uma amostra menor é utilizada quando a estatística amostral cai na região que contém a linha central. Este método (e outros), adoptam dimensões amostrais preestabelecidas. Infante e Rodrigues Dias (2006) propõem um método que recorre à função densidade da distribuição normal reduzida para obter os tamanhos das amostras não necessariamente preestabelecidas. Neste estudo propomos uma metodologia onde a dimensão de cada amostra no instante seguinte é uma variável aleatória com distribuição binomial, onde  $p$  está associada à probabilidade de ocorrência da estatística amostral e  $n$  é a dimensão da amostra actual. A comparação do desempenho estatístico deste método com o de outros anteriormente apresentados na literatura, permite-nos estudar até que ponto compensa considerar a aleatoriedade na definição das amostras.

**Palavras-chave:** AATS, controlo de qualidade, cartas para a média, tamanhos de amostras aleatórios.

**Abstract:** Prabhu *et al.* (1993) and Costa (1994) proposed VSS (Variable Sample Sizes), the most well-known adaptive sample size method available today. In this method, a small pre-established sample size is used when the sampling statistic falls within the central line region, and a large pre-established sample size is used otherwise. Infante and Rodrigues Dias (2006) proposed a method that uses the normal pdf to obtain non-necessarily pre-established sample sizes. We propose a methodology where the sample size, for the next sampling occasion, is a binomial random variable where  $p$  is related to the probability of occurrence of the sampling statistic, and  $n$  corresponds to current sample size. To evaluate the effect of randomness in sample sizes on chart performance, we compare the proposed methodology to others available in the literature.

## 1 Introdução

Vários têm sido os métodos apresentados com o objectivo de melhorar o desempenho das cartas de controlo, em particular para alterações pequenas e moderadas do padrão médio da qualidade. A grande maioria dos esquemas propõe variar pelo menos um parâmetro (dimensão das amostras, intervalo de amostragem e limites de controlo) em função do valor observado da estatística amostral em cada inspecção. Tais métodos são designados por adaptativos. Dos métodos adaptativos que variam o tamanho amostral, o mais conhecido é o VSS ("Variable Sample Size") proposto por Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994). Neste, utiliza-se uma amostra de pequena dimensão quando a estatística amostral pertence a uma região junto dos limites de controlo e uma amostra de maior dimensão quando a estatística amostral pertence a região que contém a linha central. Daudin (1992) propôs uma carta de controlo com amostragem dupla. Neste método, conhecido por DS ("Double Sampling"), retiram-se duas amostras de tamanhos diferentes, sendo a segunda amostra apenas observada caso a primeira amostra não seja suficiente para decidir se o processo está sob controlo. Outras adaptações do método VSS foram posteriormente propostas. Stoumbos e Reynolds (1997) propuseram um método que utiliza um teste sequencial da hipótese do parâmetro do processo não se ter alterado. Este método, designado por SPRT ("Sequential Probability Ratio Test"), utiliza amostragem sequencial, sendo que de cada vez que é analisado um elemento pode decidir-se que o processo está sob controlo, fora de controlo ou analisar um novo elemento. Quando termina a amostragem sequencial a próxima sequência inicia-se decorrido um determinado período fixo de tempo. Finalmente, refira-se o método NSS ("Normal Sample Size") proposto em Infante e Rodrigues Dias (2006), o qual utiliza o valor da função densidade da variável normal reduzida e uma função de amortecimento para obter o tamanho das amostras. Todos estes métodos apresentam bons desempenhos para alterações pequenas e moderadas da média do processo, mas em geral têm um desempenho pior que o esquema periódico para grandes alterações da média do processo. Neste trabalho propomos um novo método com tamanho de amostras variáveis, mas cujas dimensões amostrais são adaptáveis aleatoriamente através de uma distribuição, neste caso a Binomial. São apresentadas duas versões deste método, sendo o mesmo comparado em particular com o método VSS (para várias medidas de desempenho) e com o método NSS. Na próxima secção apresentamos uma breve descrição destes métodos. Terminamos com algumas considerações gerais. Pensamos que este estudo é revelador das potencialidades deste método.

## 2 Métodos adaptativos

Nesta secção apresentamos sinteticamente os dois métodos adaptativos que vamos utilizar na comparação com o novo método. Aproveitamos para definir desde já que se considera que a característica da qualidade se distribui de acordo

com uma lei normal e se utiliza uma carta de controlo para a média do tipo Shewhart. Após, o aparecimento de uma falha, admitimos que a média do processo se altera  $\lambda$ -desvios padrões.

## 2.1 Método VSS

Este método tem por base a ideia de que o tamanho da amostra deve ser maior quando existir algum indício de que o processo se possa ter alterado e que o tamanho da amostra deve ser menor se a amostra não indicar que possa ter havido alteração. Assim, utiliza um tamanho de amostra grande quando a estatística amostral estiver próxima dos limites de controlo e uma amostra de menor dimensão quando a estatística amostral estiver próxima da linha central da carta de controlo. Em Prabhu *et al.*(1993) e Costa (1994) são analisadas as propriedades e o desempenho do método VSS com dois tamanhos possíveis de amostras  $n_1$  e  $n_2$ , com

$$n_1 < n < n_2$$

sendo  $n$  o tamanho das amostras no esquema clássico. O intervalo entre os limites de controlo estandardizados é dividido em duas regiões, uma que contém a linha central e outra acima e abaixo desta e limitada pelos limites de controlo. O coeficiente  $W$  (distância em desvios padrões do afastamento em relação à linha central) que define o limite entre as duas regiões é obtido, para um dado valor do coeficiente  $L$  dos limites de controlo, de forma a que o tamanho médio de amostras quando o processo está sob controlo seja igual a um valor específico  $n$ . Desta forma tem-se

$$W = \Phi^{-1} \left[ \frac{2\Phi(L)(n_2 - n) + n - n_1}{2(n_2 - n_1)} \right]$$

onde  $L$  representa o múltiplo do desvio padrão na carta de controlo para a média, e  $\Phi(\cdot)$  representa a função densidade da distribuição normal reduzida. Costa (1994), recorrendo às cadeias de Markov, obteve expressões para o tamanho médio das amostras e para o número médio de itens inspeccionados.

## 2.2 Método NSS

O método proposto e estudado em Infante e Rodrigues Dias (2006) sugere que o tamanho da amostra em cada instante seja obtido através de

$$n_{i+1}^* = \text{Int} \left[ \Theta \left( \frac{k}{\phi(u_i)} \right) \right]$$

com

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n_i^*}}, \\ -L &\leq u_i \leq L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_0^* &= \text{Int} \left[ \Theta(k\sqrt{2\pi}) \right] \\ \phi(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{u^2}{2} \right) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} n_i^* &- \text{tamanho da amostra de ordem } i \\ \bar{x}_i &- \text{média da amostra de ordem } i \\ \phi(u) &- \text{função densidade da distribuição normal reduzida} \\ \text{Int}(x) &- \text{maior inteiro que não excede } x \\ k &- \text{constante de escala.} \end{aligned}$$

A função  $\Theta(x)$  é uma função de amortecimento. Em Infante e Rodrigues Dias (2006) foram consideradas as funções  $\ln x$  e  $\sqrt{x}$ . De acordo com este método, quanto mais próxima estiver a média amostral da linha central, menor será o tamanho das amostras e quanto mais se aproximar dos limites de controlo maior será o tamanho das amostras.

### 3 Novo procedimento dinâmico

Seja  $n_i$  o tamanho da amostra retirada no instante  $t_i$  e  $z_i$  a sua média standardizada. De acordo com o novo procedimento proposto:

- 1) Caso  $z_i > L$  ou  $z_i < -L$  concluímos que o processo está fora de controlo.
- 2) Caso  $-L < z_i < L$  o tamanho da próxima amostra  $n_{i+1}$  será obtido gerando uma variável aleatória com distribuição binomial

$$\text{Bin}(n_i, 1 - p_i) + 1.$$

Tem-se que  $n_i$  representa o tamanho da amostra no período de inspecção actual e  $p_i$  é obtido pela expressão:

$$p_i = \begin{cases} P(\bar{X} \geq \bar{x}_i \mid n_i, \mu_0, \sigma_0) = 1 - \Phi \left( \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right), & \bar{x}_i \geq \mu_0 \\ P(\bar{X} < \bar{x}_i \mid n_i, \mu_0, \sigma_0) = \Phi \left( \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right), & \bar{x}_i < \mu_0 \end{cases}$$

onde  $\mu_0$  e  $\sigma_0$  representam, respectivamente, a média e o desvio padrão do processo sob controlo. A adição de uma unidade é requerida de modo a ter-se  $n > 0$ .

Para facilitar a implementação deste procedimento podemos considerar uma carta standard, onde representamos a estatística

$$Z_i = \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

com limites de controlo  $-L$  e  $+L$ . No caso usual temos os limites “3-sigma” em que  $L = 3$ . O procedimento proposto é bastante intuitivo, sendo adaptativo uma vez que o tamanho da amostra é actualizado em cada instante em função do valor da estatística amostral (média). Quanto mais afastada da linha central estiver a estatística amostral, menor a probabilidade de ter ocorrido com o processo sob controlo, pelo que maior é o indício de estarmos na presença de uma causa assinalável e consequentemente maior a probabilidade da próxima amostra ser de dimensão superior à actual.

## 4 Estudo comparativo

Para compararmos os diferentes métodos, vamos considerar as mesmas condições sob controlo, isto é, obtemos os parâmetros de cada um de modo a que quando o processo está sob controlo se tenham o mesmo número médio falsos alarmes, o mesmo número médio de amostras analisadas e o mesmo número médio de itens inspecionados. Para que os métodos estejam nas mesmas condições sob controlo, obtiveram-se os valores dos parâmetros de modo a se ter limites 3-sigma ( $L=3$ ), um intervalo médio de amostragem sob controlo igual à unidade e um tamanho médio de amostras sob controlo igual a 4.

### 4.1 Medidas de Desempenho Estatístico

Para comparação dos métodos foram consideradas algumas medidas usuais do desempenho estatístico.

1. ARL – Average Run Length – número médio de amostras até detecção. Dado o Run Length seguir uma distribuição geométrica tem-se  $ARL = 1/p_{det}$  onde  $p_{det}$  representa a probabilidade de detecção da alteração de amplitude  $\lambda$ -desvios-padrão, com

$$p_{det}(\lambda, n, L) = 1 - P(LIC < \bar{X} < LSC | \lambda) = 1 - [\Phi(L - \lambda\sqrt{n}) - \Phi(-L - \lambda\sqrt{n})].$$

2. AATS – Adjusted Average Time to Signal – tempo médio de mau funcionamento ajustado ao facto da falha ocorrer entre dois períodos de amostragem, sendo a amplitude do período de amostragem designada por  $d$ ,

$$AATS \cong ARL \times d - d/2.$$

3. ANI – Average Number of Items – Representa o número de itens analisados durante o período de mau funcionamento.
4. ATS – Average Time to Signal – intervalo médio de tempo desde o início do processo até à emissão de um sinal de fora de controlo pela carta.

#### 4.2 Comparação com o Método Clássico

Nesta secção vamos comparar o novo procedimento com o procedimento clássico em que todos os parâmetros são fixos. Para tal, consideramos a grandeza

$$Q_1 = \frac{AATS_C - AATS_A}{AATS_C} \times 100\%$$

onde  $AATS_C$  é o  $AATS$  obtido utilizando o método clássico e  $AATS_A$  é o  $AATS$  obtido utilizando o novo método adaptativo e a grandeza

$$Q_2 = \frac{ANI_C - ANI_A}{ANI_C} \times 100\%,$$

onde  $ANI_C$  é o  $ANI$  quando se utiliza o método clássico e  $ANI_A$  é o  $ANI$  quando se utiliza o novo método adaptativo. Podemos interpretar estas grandezas como a variação relativa do tempo médio de mau funcionamento e do número médio de itens inspecionados quando se utiliza o novo procedimento em vez do clássico. Na Figura 1 apresentam-se graficamente os resultados obtidos para estas grandezas para diferentes alterações da média, associadas a diferentes valores de  $\lambda$ . Da sua observação podemos tecer as seguintes considerações:

1. O novo método é sempre melhor, em termos do  $AATS$ , para todas as alterações da média consideradas, registando-se reduções bastante significativas para  $0,25 < \lambda < 1,5$ .
2. Em geral, podemos concluir que as reduções no  $AATS$  são acompanhadas por reduções também relevantes em termos do  $ANI$ . Nos poucos casos em que o método periódico conduz a um menor número médio de itens inspecionados tal redução é muito pequena.

#### 4.3 Comparação com o Método VSS

Neste caso vamos considerar as grandezas:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{AATS_{VSS} - AATS_A}{AATS_{VSS}} \times 100\% \\ Q_2 &= \frac{ANI_{VSS} - ANI_A}{ANI_{VSS}} \times 100\% \\ Q_3 &= \frac{ATS_{VSS} - ATS_A}{ATS_{VSS}} \times 100\%. \end{aligned}$$

Assim, além da comparação ao nível do  $AATS$  e  $ANI$  também nesta secção pretendemos comparar os métodos ao nível do  $ATS$ . Os valores de  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  correspondem assim a variações daquelas medidas de desempenho quando se usa o novo método adaptativo em detrimento do VSS.

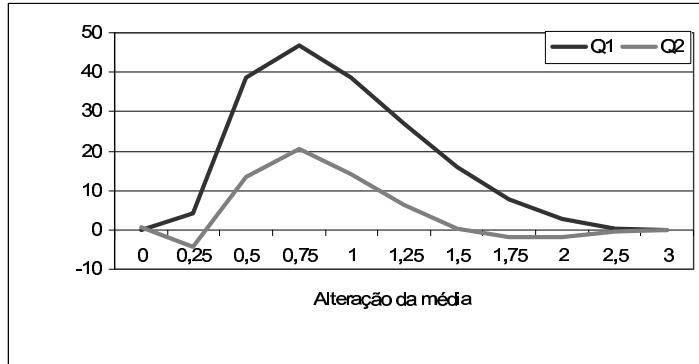


Figura 1: Percentagem de redução de AATS e ANI quando se utiliza o novo método adaptativo em vez do esquema clássico.

Na tabela representada na Figura 2 podemos observar os valores obtidos para diferentes alterações da média e para duas combinações diferentes dos valores dos parâmetros do método VSS. De um modo geral podemos concluir por um lado que o novo método conduz a reduções do ATS para alterações da média  $\lambda > 0,5$  sendo pior que as duas versões do método VSS para as alterações muito pequenas e, por outro lado, que para alterações moderadas da média conduz a uma redução significativa do número médio de itens inspeccionados.

$\lambda$	$Q_3$ (VSS-1)	$Q_3$ (VSS-2)	$Q_2$ (VSS-1)	$Q_2$ (VSS-2)
<b>0,00</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	-0,5	-0,5
<b>0,25</b>	-42,2	-9,6	-21,8	-6,0
<b>0,50</b>	-92,5	-12,9	-69,0	-18,6
<b>0,75</b>	<b>9,8</b>	<b>7,7</b>	-18,6	-12,0
<b>1,00</b>	<b>44,4</b>	<b>24,3</b>	<b>27,3</b>	-0,3
<b>1,25</b>	<b>55,9</b>	<b>35,8</b>	<b>50,1</b>	<b>14,1</b>
<b>1,50</b>	<b>58,2</b>	<b>39,9</b>	<b>58,1</b>	<b>20,8</b>
<b>1,75</b>	<b>55,9</b>	<b>38,1</b>	<b>59,4</b>	<b>18,4</b>
<b>2,00</b>	<b>51,7</b>	<b>33,0</b>	<b>57,6</b>	<b>8,6</b>
<b>2,50</b>	<b>42,0</b>	<b>19,7</b>	<b>49,9</b>	-27,3
<b>3,00</b>	<b>32,0</b>	<b>8,1</b>	<b>36,5</b>	-75,6

Figura 2: Comparação dos valores de ATS e ANI entre o novo método adaptativo e duas versões do VSS ( $VSS - 1 \rightarrow n_1 = 1, n_2 = 25$  e  $VSS - 2 \rightarrow n_1 = 2, n_2 = 13$ ).

## 5 Uma variante do método

Com o objectivo de melhorar o desempenho estatístico do método, onde a sua eficácia era reduzida, desenvolveu-se uma variante ao mesmo. Nesta variante propomos que

$$\begin{aligned} \text{Caso } p_i > p &\rightarrow \text{Gerar } Bin(n_i, 1 - p_i) \\ \text{Caso } p_i \leq p &\rightarrow \text{Gerar } Bin(2n_i, 1 - p_i). \end{aligned}$$

Neste trabalho utilizámos os seguintes valores de  $p$ :

$$\begin{aligned} p &= 0.0035 \rightarrow W = 2.7 \\ p &= 0.0062 \rightarrow W = 2.5 \\ p &= 0.01 \rightarrow W = 2.326. \end{aligned}$$

Com  $W$  a ser determinado da seguinte forma:

$$P(-W < Z < W) = 1 - p$$

Neste caso  $W$  é o percentil  $(1-p/2)$  da distribuição normal padrão, representando o valor limite para a transição entre o gerar uma amostra com probabilidade de ser de menor ou de maior dimensão (valor do parâmetro da Binomial é igual a  $n_i$  ou  $2n_i$ ), funcionando como um limite "threshold" de modo análogo ao que acontece na carta VSS para definir qual o tamanho da amostra a considerar na inspecção seguinte.

### 5.1 Comparação da variante com o método originalmente proposto

Da observação da Figura 3 podemos concluir que com a variante se conseguem obter reduções bastante relevantes no período médio de mau funcionamento. Para  $\lambda \geq 2$  os resultados obidos são idênticos na versão original e na variante. Contudo, o objectivo pretendido com a introdução da variante foi conseguido, uma vez que aumentou a eficácia na detecção de pequenas alterações da média. Podemos também ver que a percentagem de redução do AATS aumenta com o tamanho de  $p$ . Será interessante, no futuro, investigar em termos analíticos se existe um valor de  $p$  óptimo, isto é, que permita maximizar a redução do período médio de mau funcionamento.

Na Figura 4 podemos observar que, para além da redução dos AATS, a variante do método permite uma redução do número de itens inspecionados. A redução é tanto maior quanto maior é o valor de  $p$ , de entre os valores considerados. Tal como para a redução de AATS será interessante determinar, caso exista, o  $p$  óptimo, e se possível conjugá-lo com o  $p$  óptimo do AATS caso seja diferente.

Note-se que nesta comparação os valores de  $Q_1$  e de  $Q_2$  são obtidos tomando o método originalmente proposto como referência.

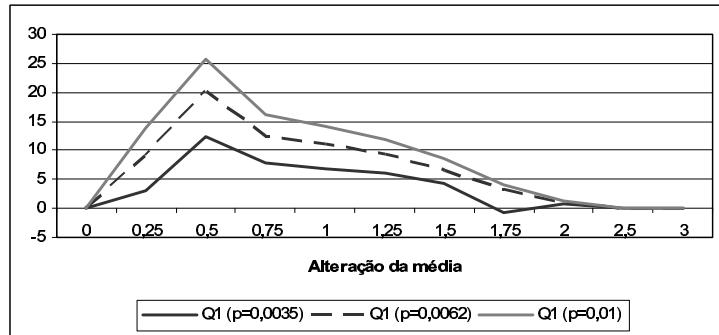


Figura 3: Percentagem de redução dos valores de AATS utilizando a variante em vez do método originalmente proposto.

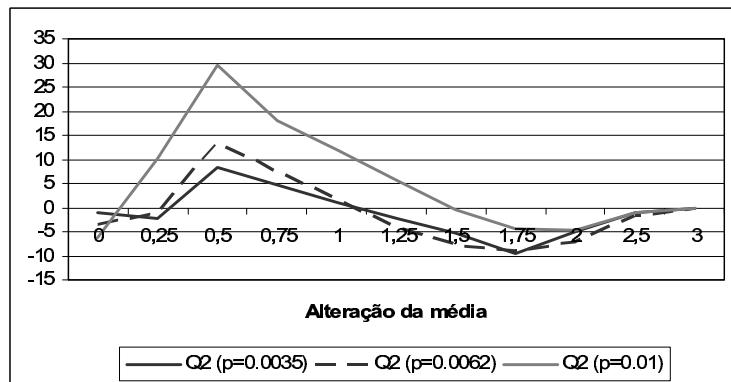


Figura 4: Percentagem de redução dos valores de ANI utilizando a variante em vez do método originalmente proposto.

## 5.2 Comparação da variante do método adaptativo com o VSS e NSS

Finalmente comparámos a variante do novo método adaptativo com os métodos adaptativos VSS e NSS em termos de número médio de amostras até detecção. A partir dos valores da tabela representada na Figura 5 podemos tecer as seguintes considerações:

1. O método proposto tem um menor número médio de amostras até detecção

do que os outros métodos para  $\lambda \geq 1.5$ .

2. Para  $\lambda \leq 0.75$  apenas é superado pelo VSS(1-25), sendo depois melhor que este para  $\lambda \geq 1$ .
3. Para  $0.75 \leq \lambda \leq 1.25$  o novo método tem um desempenho ligeiramente inferior.
4. Tem um melhor desempenho quando o processo está sob controlo.

$\lambda$	V(p=0.01)	VSS(1-25)	VSS(2-13)	NSS
0.00	369.87	<b>369.90</b>	<b>369.90</b>	<b>370.17</b>
0.25	126.73	99.94	<b>129.88</b>	<b>140.62</b>
0.50	15.48	10.50	<b>18.26</b>	<b>22.31</b>
0.75	5.36	4.59	4.47	4.95
1.00	2.73	<b>3.32</b>	2.30	2.30
1.25	1.67	<b>2.63</b>	1.65	1.51
1.50	1.13	<b>2.16</b>	<b>1.35</b>	<b>1.13</b>
1.75	0.83	<b>1.83</b>	<b>1.16</b>	<b>0.90</b>
2.00	0.66	<b>1.58</b>	<b>1.00</b>	<b>0.74</b>
2.50	0.52	<b>1.22</b>	<b>0.75</b>	<b>0.56</b>
3.00	0.50	<b>0.97</b>	<b>0.59</b>	<b>0.51</b>

Figura 5: Comparação dos ARL entre a variante do método e três outros esquemas adaptativos.

## 6 Considerações finais

Neste trabalho apresentámos um novo método adaptativo para obter o tamanho das amostras em controlo de qualidade. Neste, a dimensão de cada amostra no instante seguinte é uma variável aleatória com distribuição binomial, onde a probabilidade  $p$  do sucesso está associada à probabilidade de ocorrência da estatística amostral e  $n$  é a dimensão da amostra extraída no instante anterior. Considerando alterações da média de diferentes magnitudes, pensamos terem sido obtidos resultados importantes e reveladores das potencialidades deste novo método. Em forma de síntese, podemos destacar os seguintes:

1. Este método tem um melhor desempenho que as duas versões consideradas para o método VSS para alterações de magnitude  $\lambda > 1$ . Quando se introduz a variante tem um desempenho globalmente superior, registando-se reduções muito significativas.
2. Em termos de ATS este método tem globalmente um melhor desempenho que as duas versões consideradas para o método VSS.
3. O desempenho do método na detecção de alterações da média e o número médio de itens inspeccionados dependem do tamanho da primeira amostra após a falha.
4. A comparação do novo método adaptativo com o método NSS produziu conclusões muito idênticas aos resultados do método VSS.
5. Foram obtidos resultados que atestam a robustez do método em termos da limitação da maior dimensão amostral.

Os resultados apresentados foram obtidos recorrendo a técnicas de simulação, pelo que o próximo passo será tentar estudar analiticamente algumas das propriedades estatísticas. Também é necessário obter algumas linhas gerais que permitam definir um tamanho médio pretendido para as amostras com o processo sob controlo. Pensamos que a ideia subjacente pode ser estendida quer a outras cartas de controlo quer considerando outras distribuições além da Binomial.

## Agradecimentos

Os dois últimos autores do trabalho são membros do CIMA-Universidade de Évora financiados pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT). Os autores agradecem também os comentários feitos pelo referee, os quais permitiram melhorar o artigo.

## Referências

- [1] Daudin, J. J. (1992). "Double Sampling X bar Charts", Journal of Quality Technology 24, pp. 78-87.
- [2] Costa, A. (1994). "Chart with Variable Sample Size", Journal of Quality Technology 26, pp. 155-163.
- [3] Infante, P., Rodrigues Dias, J, (2006). "Carta com Amostras de Tamanho Variável: Um Novo Procedimento Dinâmico", Investigação Operacional 26, pp. 45-63.
- [4] Prabhu, S. S., Runger, G. C., Keats, J. B. (1993). "An Adaptive Sample Size Chart", International Journal of Production Research 31, pp. 2895-2909.
- [5] Stoumbos, Z. G., Reynolds, M. R., JR. (1997). "Control Charts Applying a Sequential Test at Fixed Sampling Intervals", Journal of Quality Technology 29, pp. 21-40.