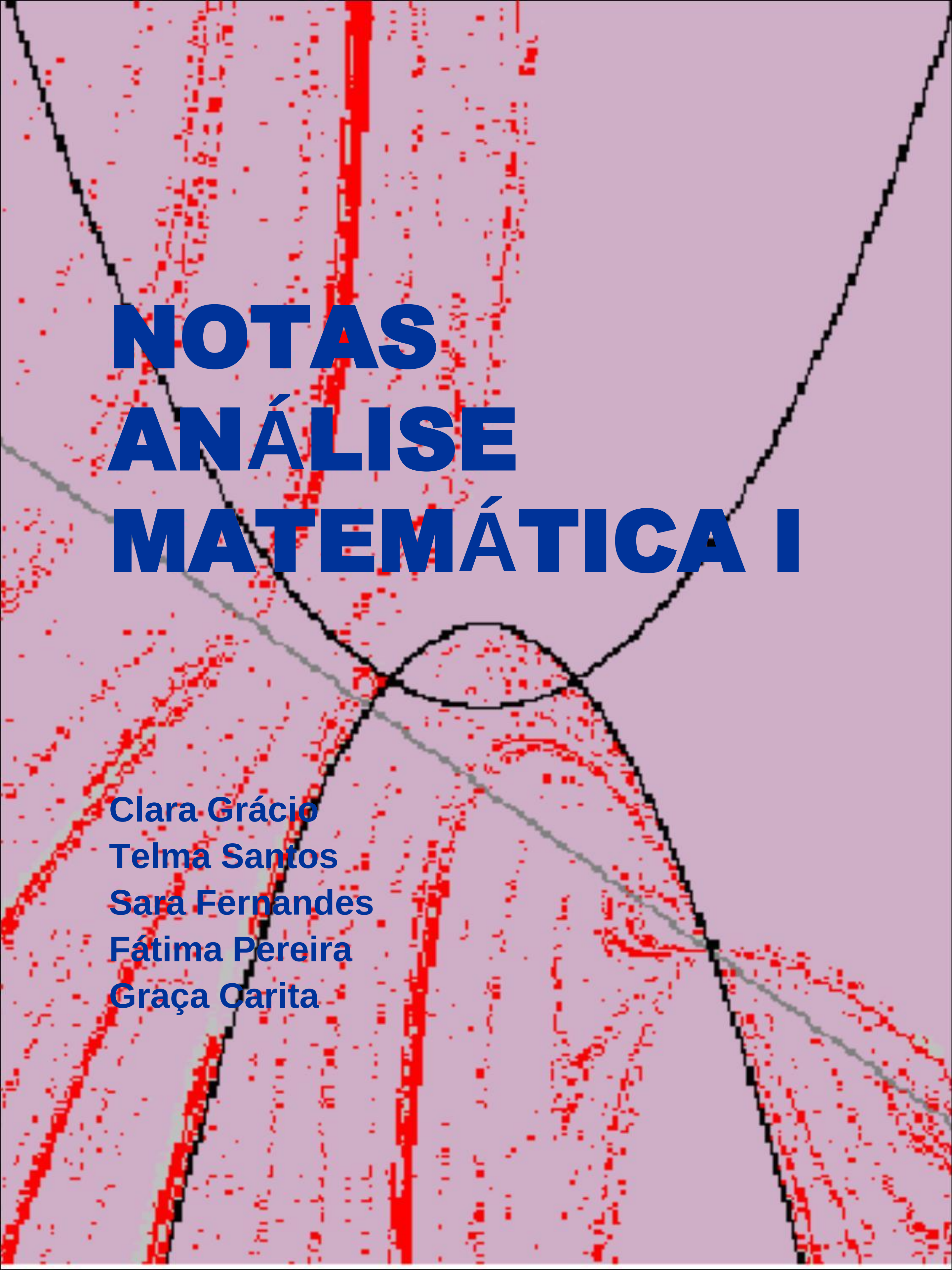


NOTAS ANÁLISE MATEMÁTICA I

Clara Grácio
Telma Santos
Sara Fernandes
Fátima Pereira
Graça Carita

Introdução

O presente texto pretende servir de apoio ao estudo de Análise Matemática I, disciplina semestral leccionada nas licenciaturas de Engenharia e de Matemática. Esta publicação está em permanente construção e inclui os conteúdos programáticos desta disciplina, sem atender, de modo tão estrito, às limitações de tempo inerentes às aulas para que estas folhas foram escritas. Surge como complemento da actividade desenvolvida por uma equipa de docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Évora que nos últimos anos tem leccionado esta disciplina. Procura-se dar uma apresentação, dos diversos assuntos que, por um lado, tire partido da natureza geométrica de muitos conceitos que os torna mais intuitivos e, por outro, introduza os temas com o rigor necessário para que possa servir de base a estudos mais aprofundados.

Notas de Análise Matemática

Clara Grácio, Telma Santos, Sara Fernandes, Fátima Pereira, Graça Carita

Índice

CAPÍTULO 1

Sucessões

1.1 Definição de Sucessão

Definição 1.1 *Chama-se* ***sucessão*** *de números reais a qualquer aplicação u do conjunto dos números inteiros positivos, em* $\mathbb{R}$ *a qual pode ser representada por* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_n$ *ou apenas por* (u_n). *A* u_n *chama-se o termo geral da sucessão*

$$\begin{array}{rl} u: & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow u(n) = u_n \end{array}$$

Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de números reais, os valores

$u(1) = u_1$	diz-se	primeiro termo da sucessão, ou termo de ordem 1
$u(2) = u_2$	diz-se	segundo termo da sucessão, ou termo de ordem 2
$u(3) = u_3$	diz-se	terceiro termo da sucessão, ou termo de ordem 3
...		...
$u(n) = u_n$	diz-se	enésimo termo da sucessão, ou termo de ordem n
...		...

Podemos designar a sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$(u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ..) .$$

Muitas vezes, por abuso de linguagem, é usado, para designar a sucessão o termo geral u_n. Ao conjunto dos valores da sucessão $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ (ao seu contradomínio) chamamos o conjunto dos termos da sucessão.

Exemplo 1.1 *Consideremos a sucessão* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cujo termo de ordem n é:*

$$u_n = \frac{1}{n^3}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \mathrm{u}(1) = 1,\\
&u_2 = \mathrm{u}(2) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},\\
&u_3 = \mathrm{u}(3) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27},\\
&...\\
&u_n = u(n) = \frac{1}{n^3},\\
&...\\
&U = \left\{1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, ..., \frac{1}{n^3}, ...\right\} \ \textit{é o conjunto dos seus termos.}
\end{aligned}
$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$\left(1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, ..\right).$$

Exemplo 1.2 *Consideremos a sucessão* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cujo termo de ordem* n *é:*

$$v_n = (-1)^n.$$

Então

$$
\begin{aligned}
&v_1 = v(1) = -1,\\
&v_2 = v(2) = 1,\\
&v_3 = v(3) = -1,\\
&...\\
&v_n = v(n) = (-1)^n,\\
&...\\
&V = \{-1, 1\} \ \textit{é o conjunto dos seus termos.}
\end{aligned}
$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, ..).$$

É importante distinguir entre a sucessão e o conjunto dos seus termos. Numa sucessão o seu domínio (o conjunto das ordens) é sempre infinito, é o conjunto $\mathbb{N}$, enquanto que o seu contradomínio (o conjunto dos seus termos) pode ser finito ou infinito.

Exemplo 1.3 *Consideremos a sucessão* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cujo termo de ordem* n *é:*

$$w_n = \cos(n\frac{\pi}{3}).$$

Então:

$$\begin{aligned}
&w_1 = w(1) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2},\\
&w_2 = w(2) = \cos(2\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2},\\
&w_3 = w(3) = \cos(\pi) = -1,\\
&w_4 = w(4) = \cos(4\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2},\\
&w_5 = w(5) = \cos(5\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ...\\
&w_n = w(n) = \cos(n\frac{\pi}{3}),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ...\\
&W = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1\right\} \text{ é o conjunto dos seus termos.}
\end{aligned}$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, ...\right).$$

Exemplo 1.4 *Consideremos a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo de ordem n é:*

$$s_n = n^{\frac{1}{n}}.$$

Então:

$$\begin{aligned}
&s_1 = 1,\\
&s_2 = 2^{\frac{1}{2}} \simeq 1,4142,\\
&s_3 = 3^{\frac{1}{3}} \simeq 1,4422,\\
&s_4 = 4^{\frac{1}{4}} \simeq 1,4142,\\
&s_5 = 5^{\frac{1}{5}} \simeq 1,3797,\\
&\qquad\qquad ...\\
&s_{100} = (100)^{\frac{1}{100}} \simeq 1,0471,\\
&\qquad\qquad ...\\
&s_{1000} = (1000)^{\frac{1}{1000}} \simeq 1,0069,\\
&\qquad\qquad ...
\end{aligned}$$

Considerando os valores aproximados a quatro casas decimais, o conjunto dos termos será:

$$S = \{1; 1,4142; 1,4422; 1,4142; 1,3797; ...; 1,0471; ...; 1,0069; ...\}.$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$(1; 1,4142; 1,4422; 1,4142; 1,3797; ...; 1,0471; ...; 1,0069; ...).$$

Exemplo 1.5 *Consideremos a sucessão $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo de ordem n é:*

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Então:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 2;\\
p_2 &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = 2,25;\\
p_3 &= \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^3 \simeq 2,3704;\\
p_4 &= \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\tfrac{5}{4}\right)^4 \simeq 2,4414;\\
p_5 &= \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\tfrac{6}{5}\right)^5 \simeq 2,4883;\\
&\ldots\\
p_{100} &= \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = \left(\tfrac{101}{100}\right)^{100} \simeq 2,7048;\\
&\ldots\\
p_{1000} &= \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = \left(\tfrac{1001}{1000}\right)^{1000} \simeq 2,7169;\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Considerando os valores aproximados a quatro casas decimais, o conjunto dos termos será:

$$S = \{2; 2,25; 2,3704; 2,4414; 2,4883; ...; 2,7048; ...; 2,7169; ...\}.$$

Podemos representar esta sucessão escrevendo ordenadamente os seus termos:

$$(2; 2,25; 2,3704; 2,4414; 2,4883; ...; 2,7048; ...; 2,7169; ...).$$

Exemplo 1.6 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n:*

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \mathrm{u}(1) = 3,\\
&u_2 = \mathrm{u}(2) = 3+5 = 8,\\
&u_3 = \mathrm{u}(3) = 8+5 = (3+5)+5 = 13,\\
&\ldots\\
&u_{n+1} = u_n + 5,\\
&\ldots\\
&U = \{3, 8, 13, ...\}.
\end{aligned}
$$

Uma sucessão determinada através do processo anterior diz-se definida por recorrência. Através do método de indução finita pode mostrar-se que, de facto, este processo permite determinar para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n, ou seja, permite definir uma sucessão.

Exemplo 1.7 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n:*

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&u_1 = \mathrm{u}(1) = a, \\
&u_2 = \mathrm{u}(2) = u_1 + r = a + r, \\
&u_3 = \mathrm{u}(3) = u_2 + r = (u_1 + r) + r = a + 2r, \\
&u_4 = \mathrm{u}(4) = u_3 + r = (u_2 + r) + r = ((a + r) + r) + r = a + 3r, \\
&... \\
&u_n = u_{n-1} + r = a + (n-1)r, \\
&...
\end{aligned}$$

*Chamamos a esta sucessão uma **progressão aritmética de primeiro termo** a e **razão** r.*

Exemplo 1.8 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n:*

$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n.5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&v_1 = v(1) = 3, \\
&v_2 = v(2) = 3.5 = 15, \\
&v_3 = v(3) = 15.5 = (3.5).5 = 3.5^2 = 75, \\
&... \\
&v_{n+1} = v_n.5, \\
&... \\
&V = \{3, 15, 75, ...\}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.9 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n:*

$$\begin{cases} v_1 = a \\ v_{n+1} = v_n.r \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&v_1 = v(1) = a, \\
&v_2 = v(2) = v_1.r = a.r, \\
&v_3 = v(3) = v_2.r = (v_1.r).r = a.r^2, \\
&v_4 = v(4) = v_3.r = (v_2.r).r = ((a.r).r).r = a.r^3, \\
&... \\
&v_{n+1} = v_n.r = a.r^n, \\
&...
\end{aligned}$$

*Chamamos a esta sucessão uma **progressão geométrica de primeiro termo** a e **razão** r.*

Como curiosidade consideramos uma sucessão muito falada ultimamente nos meios de comunicação, a sucessão dos números de Fibonacci.

"...13-3-2-21-1-1-8-5, leu Robert Langdon nas letras púrpuras o que Jacques Saunière tinha escrito no soalho do Louvre antes de morrer. O código escapava-lhe, mas a jovem Sophie Neveu, especialista em criptografia, descobriu que se tratava de uma permutação dos primeiros termos da sucessão de Fibonacci..."

Quem tenha lido *O Código Da Vinci*, de Dan Brown, recordar-se-á de imediato de uma das cenas iniciais deste livro absorvente. E saberá que esta sucessão de Fibonacci aparece vezes sem conta neste livro.

Exemplo 1.10 *Consideremos a expressão seguinte que nos permite obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n, na sucessão de Fibonacci:*

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \\ w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & w_1 = 1, \\ & w_2 = 1, \\ & w_3 = w_2 + w_1 = 1 + 1 = 2, \\ & w_4 = w_3 + w_2 = 2 + 1 = 3, \\ & w_5 = w_4 + w_3 = 3 + 2 = 5, \\ & ... \\ & w_{n+2} = w_{n+1} + w_n, \\ & ... \\ & V = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\} . \end{aligned}$$

Nota 1.1 *Dadas duas sucessões de números reais u e v, chama-se **soma**, **diferença** e **produto** de u e v às sucessões $u+v$, $u-v$ e uv de termos gerais, respectivamente, $u_n + v_n$, $u_n - v_n$ e $u_n.v_n$. Se $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, chama-se sucessão **quociente** de u e v à sucessão $\frac{u}{v}$ de termo geral $\frac{u_n}{v_n}$.*

1.2 Limite de uma sucessão, sucessões convergentes

A noção de limite é uma das mais importantes de toda a Análise Matemática.

1.2.1 Introdução histórica

O conceito de limite constitui um dos fundamentos do Cálculo, é necessário para definir derivada, continuidade, integral, convergência, divergência. No entanto, embora sendo um dos mais antigos conceitos, a definição moderna tem menos de 150 anos. Durante muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito – números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos - e com intuições geométricas subjectivas, nem sempre rigorosas. O termo limite, no sentido moderno, é produto dos séculos XVIII e XIX.

A primeira vez em que a ideia de limite apareceu, foi por volta de 450 A.C., na discussão de quatro paradoxos formulados pelo filósofo grego Zenão, mas só no século XIX, com os trabalhos de Augustin Louis Cauchy, quando preparava uma exposição sobre Cálculo para apresentar aos seus estudantes de engenharia na École Polytechnique de Paris, e de Karl Weierstrass, professor da High School (entre outros), é formulada uma definição de limite moderna e rigorosa.

1.2.2 Definição de limite

Antes de introduzirmos a noção fundamental desta secção recordo algumas propriedades relacionadas com a distância entre dois números reais.

Definição 1.2 *Para dois números reais* a *e* b*, definimos* $dist(a,b) = |a-b|$. $dist(a,b)$ *representa a distância entre* a *e* b.

Algumas propriedades básicas.

Proposição 1.1 *Sendo* $a, b \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} (i) \quad |a| \geq 0, \\ (ii) \quad |ab| = |a| \, . \, |b| \, , \\ (iii) \quad |a+b| \leq |a| + |b| \, , \text{ (desigualdade triangular).} \end{cases}$

Definição 1.3 *Diz-se que o número real* ***a*** *é o* ***limite da sucessão*** (u_n)*, ou que* (u_n) *converge ou tende para* a*, e escreve-se*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a \quad ou \quad u_n \to a$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$ *existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que para qualquer* $n > p$, $|u_n - a| < \varepsilon$. *Isto é*

$$u_n \to a \;\; sse \; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Ou seja, $u_n \to a$ sse para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

Em termos pouco rigorosos mas sugestivos o número real a é limite da sucessão (u_n) se para grandes valores de n todos os termos de (u_n) se aproximam de a. Observemos que:

$$|u_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < u_n - a < \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \Longleftrightarrow u_n \in V_\varepsilon(a).$$

Nesta definição a letra grega ε representa um número positivo e não qualquer número exótico. Tradicionalmente, em Matemática, utilizam-se as letras gregas ε e δ em situações onde interessa considerar pequenos valores positivos. Utilizaremos, nestas notas, estas letras indiferentemente.

Definição 1.4 *Uma sucessão* (u_n) *diz-se* ***convergente*** *se existe um número real* a *tal que* $u_n \to a$. *Uma sucessão que não é convergente diz-se* ***divergente****.*

Para tentar apreender o significado deste conceito vamos estudar detalhadamente um exemplo.

Exemplo 1.11 *Consideremos a sucessão, cujo termo de ordem n é* $u_n = \dfrac{3n+1}{7n-4}$. *Se escrevermos esta sucessão na forma* $u_n = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{4}{n}}$ *e notarmos que tanto* $\frac{1}{n}$ *como* $\frac{4}{n}$ *são bastante pequenos para grandes valores de n, é razoável pensar que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{7}$.

Em primeiro lugar estamos interessados em analisar o que significa $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{7}$. Pela definição de limite significa que

$$\text{para qualquer } \varepsilon > 0 \text{ existe um número } p \text{ tal que } n > p \text{ implica } \left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon.$$

Sempre que ε varia o nosso número p também varia. Consideremos alguns valores para ε:

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon = 1 & : \ n > 0 & \text{implica} & \left|\dfrac{3n+1}{7n-4} - \dfrac{3}{7}\right| < 1 \\
\varepsilon = 0,1 & : \ n > 4 & \text{implica} & \left|\dfrac{3n+1}{7n-4} - \dfrac{3}{7}\right| < 0,1 \\
\varepsilon = 0,01 & : \ n > 39 & \text{implica} & \left|\dfrac{3n+1}{7n-4} - \dfrac{3}{7}\right| < 0,01 \\
\varepsilon = 0,001 & : \ n > 388 & \text{implica} & \left|\dfrac{3n+1}{7n-4} - \dfrac{3}{7}\right| < 0,001 \\
\varepsilon = 0,000001 & : \ n > 387755 & \text{implica} & \left|\dfrac{3n+1}{7n-4} - \dfrac{3}{7}\right| < 0,000001.
\end{array}$$

Observemos para estes valores que os termos da sucessão se aproximam do limite $\dfrac{3}{7}$:

n	$u_n = \dfrac{3n+1}{7n-4}$ aprox.	$\left\|\dfrac{3n+1}{7n-4} - \dfrac{3}{7}\right\|$ aprox.
1	$u_1 = 1,3333$	$0,9047$
2	$u_2 = 0,7000$	$0,2714$
3	$u_3 = 0,5882$	$0,1597$
4	$u_4 = 0,5417$	$0,1131$
5	$u_5 = 0,5161$	$0,0876$
6	$u_6 = 0,5000$	$0,0714$
40	$u_{40} = 0,4384$	$0,0098$
400	$u_{400} = 0,4295$	$0,00097$

Mas, apenas calculámos **alguns** termos da sucessão, ou seja, para alguns valores de n determinámos, aproximadamente, a distância entre o termo da sucessão correspondente, u_n, e o valor real $\dfrac{3}{7}$. Para que este número real seja limite da sucessão é necessário e suficiente que para **qualquer escolha dum número real positivo** ε exista um número natural p tal que para qualquer $n > p$ se verifique que $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$. Mostremos que tal se verifica neste caso.

Exemplo 1.12 *Dada a sucessão de termo geral* $u_n = \frac{3n+1}{7n-4}$*, mostremos, por definição, que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{7}$*, ou seja, que*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \left|u_n - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$$

Discussão: *Para cada* $\varepsilon > 0$*, precisamos de decidir quão grande* n *deve ser para garantir que* $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{21n+7-21n+12}{7(7n-4)}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{19}{7(7n-4)}\right| < \varepsilon.$$

Como $7n - 4 > 0$ *para todos os valores de* n*, podemos simplificar a expressão obtendo:*

$$\frac{19}{7(7n-4)} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{19}{7\varepsilon} < 7n-4 \Longleftrightarrow \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7} < n$$

Podemos escolher $p \geq \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7}$ *sendo* $p \in \mathbb{N}$.

Prova: *Seja* $\varepsilon > 0$ *e seja* $p \geq \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7}$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\textit{Então } n > p \textit{ implica que } n > \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7}.$$

$$n > \frac{19}{49\varepsilon} + \frac{4}{7} \Longleftrightarrow 7n > \frac{19}{7\varepsilon} + 4 \Longleftrightarrow 7n - 4 > \frac{19}{7\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{19}{7(7n-4)} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7} < \varepsilon.$$

Podemos concluir que $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$*. Provámos que para qualquer valor* $\varepsilon > 0$ *existe um número* p *tal que* $n > p$ *implica* $\left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$.

Exemplo 1.13 *Mostre que a sucessão* $a_n = (-1)^n$ *não converge.*

Discussão: *Vamos assumir que existe um valor* b *para o qual* $(-1)^n \to b$ *e com esta assumpção verificamos que se obtém uma contradição. Não interessa qual o valor de* b*, seja 1 ou -1 a sua distância a* b *será pelo menos 1. Logo a desigualdade* $|(-1)^n - b| < 1$ *não será verificada para grandes valores de* n.

Prova: *Supomos que* $(-1)^n \to b$ *para algum* $b \in \mathbb{R}$*. Seja* $\varepsilon = 1$*, então quando consideramos a definição de limite, sabemos que existe* p *tal que* $n > p$ *implica* $|(-1)^n - b| < 1$*.Considerando os casos para* n *par e* n *ímpar temos que*

$$|1 - b| < 1 \textit{ e } |-1 - b| < 1$$

Através da desigualdade triangular podemos concluir que

$$2 = |1-(-1)| = |1-a+a-(-1)| \leq |1-a| + |a-(-1)| < 1+1 = 2.$$

Chegámos ao absurdo $2 < 2$ o que mostra que a nossa suposição inicial, $(-1)^n \to b$ para algum $b \in \mathbb{R}$, não está correcta. Não existe limite para esta sucessão, ou seja, a sucessão é divergente.

Exemplo 1.14 *Dada a sucessão de termo geral $u_n = a^n$, com $0 < a < 1$, mostremos, por definição, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, ou seja, que*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$$

***Discussão**: Mais uma vez, para cada $\varepsilon > 0$, precisamos de decidir quão grande n deve ser para garantir que $|a^n - 0| < \varepsilon$.*

$$|a^n - 0| < \varepsilon \Longleftrightarrow a^n < \varepsilon.$$

$$a^n < \varepsilon \Longleftrightarrow n \log a < \log \varepsilon \Longleftrightarrow n \underset{\log a < 0}{>} \frac{\log \varepsilon}{\log a}$$

Podemos escolher $p > \frac{\log \varepsilon}{\log a}$ sendo $p \in \mathbb{N}$.

***Prova**: Seja $\varepsilon > 0$ e seja $p > \frac{\log \varepsilon}{\log a}$, $p \in \mathbb{N}$.*

Então para todo o $n > p$ temos que $n > \dfrac{\log \varepsilon}{\log a}$.

Mas $n > \dfrac{\log \varepsilon}{\log a} \Longleftrightarrow a^n < \varepsilon$.

Logo, $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$, com $0 < a < 1$.

Nas considerações e exemplos anteriores preocupámo-nos com a existência ou não de limite, mas será que podem existir dois ou mais limites para a mesma sucessão? A resposta é negativa, o limite de uma sucessão quando existe é único.

Teorema 1.1 *Seja u_n uma sucessão real e $a, b \in \mathbb{R}$; se $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} u_n = b$ então $a = b$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Por definição de limite sabemos que:

existe um número p_1 tal que $n > p_1$ implica $|u_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

existe um número p_2 tal que $n > p_2$ implica $|u_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Para $n > \max(p_1, p_2)$, a desigualdade triangular mostra que

$$|a-b| = |a - u_n + u_n - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, obtemos que $|a-b| < \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$. Podemos concluir que $|a-b| = 0$, logo $a = b$. ■

Definição 1.5 *Diz-se que a sucessão (u_n) é um* ***infinitésimo*** *se $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Nota 1.2 *E claro, a partir das definições, que $u_n \to a$ é equivalente a $(u_n - a)$ ser um infinitésimo.*

1.3 Sucessões limitadas

Recordemos que sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, diz-se que b é um **majorante** de A se qualquer elemento de A for menor ou igual a b

$$\forall x \in A,\, x \leq b$$

e diz-se que a é um **minorante** de A se qualquer elemento de A for maior ou igual a a

$$\forall x \in A,\, x \geq a.$$

Diz-se que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é **majorado** se tiver majorantes, **minorado** se tiver minorantes e **limitado** se for majorado e minorado. Um conjunto que não seja limitado diz-se **ilimitado**.

Definição 1.6 *Uma sucessão (u_n) diz-se **limitada** se o conjunto dos seus termos, $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, é limitado, ou seja se:*

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \; \forall n \in \mathbb{N},\, a \leq u_n \leq b.$$

Nota 1.3 *A condição anterior é equivalente à seguinte:*

$$\exists b \in \mathbb{R}^+ : \; \forall n \in \mathbb{N},\; |u_n| \leq b.$$

Exemplo 1.15 *As sucessões de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n^3}$ e $v_n = (-1)^n$ consideradas em exemplos anteriores, são limitadas.*

Exemplo 1.16 *As sucessões de termo geral $u_n = 3 + 5(n-1)$ e $v_n = e^n$ não são limitadas.*

Consideramos algumas propriedades das sucessões limitadas.

Teorema 1.2 *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$ o limite da sucessão (u_n). Fazendo $\varepsilon = 1$ na definição de limite, temos então que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n > p \Longrightarrow |u_n - a| < 1$, pelo que $a - 1 < u_n < a + 1$ para todo o $n > p$. Definindo $m, M \in \mathbb{R}$ por $m = \min\{a-1, u_1, u_2, ..., u_p\}$ e $M = \max\{a+1, u_1, u_2, ..., u_p\}$, temos que $m \leq u_n \leq M$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão (u_n) é de facto limitada. ■

Nota 1.4 *A recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a sucessão de termo geral $a_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente.*

Esquematicamente:

$$\text{Sucessão convergente} \;\begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array}\; \text{sucessão limitada.}$$

Proposição 1.2 *Se (u_n) é um infinitésimo e (v_n) é uma sucessão limitada, então $(u_n.v_n)$ é um infinitésimo.*

Demonstração. Como (v_n) é uma sucessão limitada existe $M > 0$ tal que $|v_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado $\delta > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $|u_n| < \dfrac{\delta}{M}$, $\forall n > p$.

Então $|u_n.v_n| < \delta$, $\forall n > p$, ou seja, $|u_n.v_n - 0| < \delta$, $\forall n > p$, donde se conclui que

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |u_n.v_n - 0| < \delta.$$

A sucessão $(u_n.v_n)$ é um infinitésimo. ■

Exemplo 1.17 *Consideremos a sucessão de termo geral*

$$w_n = \frac{\cos^2(n+1)}{2n+3}.$$

A sucessão $u_n = (\cos^2(n+1))$ *é limitada pois* $0 \leq \cos^2(n+1) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão $v_n = \left(\dfrac{1}{2n+3}\right)$ *é um infinitésimo.*

Pela proposição anterior, a sucessão (w_n) *converge para zero, uma vez que é o produto do infinitésimo* $\left(\dfrac{1}{2n+3}\right)$ *pela sucessão limitada* $(\cos^2(n+1))$.

1.4 Sucessões monótonas

Gostaríamos de definir uma classe de sucessões que são necessárias e importantes para traçar este caminho das sucessões: as sucessões monótonas.

Monótonas não tem aqui o significado que habitualmente se dá a esta palavra!! Comecemos com alguns exemplos: consideremos as sucessões u, v, w e z definidas por:

$$u_n = n, \forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = 1 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}; \quad w_n = 3, \forall n \in \mathbb{N} \quad z = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...)$$

O que estas sucessões terão em comum? Pensemos na relação de ordem que, para cada uma delas, existe entre os seus termos.

Exemplo 1.18 *1) Consideremos a sucessão* (u_n)*: o primeiro termo* $u_1 (= 1)$ *é menor do que o segundo termo* $u_2 (= 2)$ *e este é menor do que* $u_3 (= 3)$*, e assim sucessivamente. Doutra forma:*

$$u_1 < u_2 < u_3 < ...$$

2) Consideremos a sucessão (v_n)*: o primeiro termo* $v_1 (= 0)$ *é menor do que o segundo termo* $v_2 (= \frac{1}{2})$ *e este é menor do que* $v_3 (= \frac{2}{3})$*, e assim sucessivamente. Doutra forma:*

$$v_1 < v_2 < v_3 < ...$$

3) Consideremos a sucessão (z_n)*: o primeiro termo* $z_1 (= 1)$ *é igual ao segundo* *termo* $z_2(=1)$, *este é menor que o terceiro* $z_3(=2)$, *este, por sua vez é igual ao quarto termo* $z_4(=2)$ *e assim sucessivamente. Doutra forma*

$$z_1 \leq z_2 \leq z_3 < z_4 \leq ....$$

4) Consideremos a sucessão (w_n)*: o primeiro termo* $w_1(=3)$ *é igual ao segundo termo* $w_2(=3)$, *por sua vez é igual ao terceiro termo* $w_3(=3)$ *e assim sucessivamente. Doutra forma*

$$w_1 = w_2 = w_3 = ...$$

Em muitas sucessões existe uma relação de ordem que se mantém entre todos os seus termos.

Consideremos outros exemplos de sucessões :

$$a_n = -2n, \forall n \in \mathbb{N}; \quad b_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}; \quad c_n = 5, \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que estas sucessões terão em comum? Pensemos na relação de ordem que, para cada uma delas, existe entre os seus termos.

Exemplo 1.19 *1) Consideremos a sucessão* (a_n)*: o primeiro termo* $a_1(=-2)$ *é maior do que o segundo termo* $a_2(=-4)$ *e este é maior do que* $a_3(=-6)$, *e assim sucessivamente. Doutra forma:*

$$a_1 > a_2 > a_3 > ...$$

2) Consideremos a sucessão (b_n)*: o primeiro termo* $b_1(=1)$ *é maior do que o segundo termo* $b_2(=\frac{1}{2})$ *e este é maior do que* $b_3(=\frac{1}{3})$, *e assim sucessivamente. Doutra forma:*

$$v_1 > v_2 > v_3 > ...$$

3) Consideremos a sucessão (c_n)*: o primeiro termo* $c_1(=5)$ *é igual ao segundo termo* $c_2(=5)$, *por sua vez é igual ao terceiro termo* $c_3(=5)$ *e assim sucessivamente. Doutra forma*

$$c_1 = c_2 = c_3 = ...$$

É necessário verificar se esta relação acontece para todos os valores de n.

Definição 1.7 *Uma sucessão*(u_n) *diz-se* ***crescente*** *se* $u_n \leq u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Dir-se-á ***estritamente crescente*** *se* $u_n < u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão(u_n) *diz-se* ***decrescente*** *se* $u_n \geq u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Dir-se-á ***estritamente decrescente*** *se* $u_n > u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão(u_n) *diz-se* ***monótona*** *se for crescente ou decrescente e* ***estritamente monótona*** *se for estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Porque se chamarão monótonas? Porque não varia a natureza do crescimento entre os seus termos. Consideremos uma sucessão e verifiquemos a monotonia.

Exemplo 1.20 *Seja* (u_n) *a sucessão de termo geral* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. *É claro que esta sucessão é decrescente uma vez que o numerador é constantemente igual a* 1 *e o denominador é positivo e crescente. De facto,*

$$n^2 + n < (n+1)^2 + (n+1),$$

donde se conclui que

$$\sqrt{n^2+n} < \sqrt{(n+1)^2 + (n+1)},$$

donde (sendo números positivos) se conclui que

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1)}}.$$

Portanto, $u_n > u_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$, *pelo que* (u_n) *é estritamente decrescente.*

Exemplo 1.21 *Seja* (v_n) *a sucessão de termo geral* $v_n = 2n + 6$. *Vamos recorrer ao estudo da diferença* $v_{n+1} - v_n$ *para averiguar sobre a monotonia desta sucessão.*

$$v_{n+1} - v_n = 2(n+1) + 6 - (2n+6) = 2n + 2 + 6 - 2n - 6 = 2 > 0$$

Podemos concluir que $v_{n+1} - v_n > 0$ $(\Longleftrightarrow v_{n+1} > v_n)$, *para todo o* $n \in \mathbb{N}$, *logo a sucessão é estritamente crescente.*

1.5 Subsucessões

No título desta secção aparece a palavra subsucessão. Que significará?

Consideremos uma sucessão u definida por:

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, ..., u_n, ...).$$

Exemplo 1.22 *Se eliminarmos alguns termos desta sucessão, por exemplo, os termos com as ordens* $1, 3, 4, 6$ *e* 8, *ou seja, se eliminarmos os termos* u_1, u_3, u_4, u_6 *e* u_8, *o que resta da sucessão, escrito na ordem herdada, será*

$$(u_2, u_5, u_7, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, ..., u_n, ...).$$

Ainda continua a ser uma sucessão? Como se define? Na verdade ainda continua a ser uma sucessão, que chamaremos v, *que se pode definir por:*

$$\begin{cases} v_1 = u_2 \\ v_2 = u_5 \\ v_3 = u_7 \\ v_n = u_{n+5}, \ \forall n \geq 4. \end{cases}$$

Escrevemos um primeiro exemplo duma subsucessão da sucessão u.

Exemplo 1.23 *Se eliminarmos todos os termos desta sucessão com ordens superiores a* 700*, ou seja, os termos com as ordens* $701, 702, 703, 704, 705, ...$ *, isto é, se eliminarmos os termos* $u_{701}, u_{702}, u_{703}, u_{704,......}$ *o que resta da sucessão, escrito na ordem herdada, seria*

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_{698}, u_{699}, u_{700}).$$

Ainda continua a ser uma sucessão? Não!

Obtemos uma sequência finita de números reais e uma sequência finita de números reais não pode ser uma sucessão, uma vez que uma sucessão é uma aplicação de $\mathbb{N}$ *em* $\mathbb{R}$*.*

Em primeiro lugar formalizamos este conceito e, em seguida, consideramos alguns exemplos que o ilustram.

Uma subsucessão duma sucessão (u_n) é simplesmente uma sucessão que é extraída da original escolhendo certos índices, em número infinito, por ordem crecente. Isto é, escolhendo n_1, n_2, n_3,..., com $n_1 < n_2 < n_3 < ...$, e considerando a sucessão $u_{n_1}, u_{n_2}, u_{n_3}$,...constituída pelos elementos da sucessão original correspondentes a esses naturais, obtemos uma subsucessão da sucessão original.

Na verdade trata-se dum caso particular de composição de sucessões: o caso em que, além de se verificarem as condições para a composição estar bem definida, uma das sucessões é estritamente crescente e o seu contradomínio (o conjunto dos seus termos) é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Definição 1.8 *Seja* (u_n) *uma sucessão e* (n_k) *uma sucessão estritamente crescente de elementos de* $\mathbb{N}$*. A sucessão* (v_k)*:*

$$v_k{=}u(n_k) = (u \circ n)_k = u_{n_k}$$

diz-se uma ***subsucessão*** *de* (u_n)*.*

Duma sucessão (u_n) podem extrair-se uma infinidade de subsucessões:

i) $(u_2, u_4, u_6, u_8, ..., u_{2k}, ...)$ dos termos de índice par;
ii) $(u_1, u_3, u_5, u_7, ..., u_{2k-1}, ...)$ dos termos de índice ímpar;
iii) $(u_3, u_6, u_9, ..., u_{3k}, ...)$ dos termos de índice múltiplo de 3;
etc

Exemplo 1.24 *Por exemplo, no estudo da sucessão de termo geral* $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ *são particularmente importantes duas subsucessões: a subsucessão dos termos de índice par, a sucessão de termo geral* $v_n = u_{2n} = \dfrac{1}{2n}$*, e a subsucessão dos termos de índice ímpar, a sucessão de termo geral* $w_n = u_{2n-1} = -\dfrac{1}{2n-1}$*.*

Consideremos o limite duma subsucessão quando este existe.

Definição 1.9 *Diz-se que* $a \in \mathbb{R}$ *é* ***sublimite*** *da sucessão* (u_n) *se existir uma subsucessão de* (u_n) *que converge para* a*.*

Se considerarmos a sucessão $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+5}$ então -1 e 1 são sublimites da sucessão.

Proposição 1.3 *O conjunto dos sublimites de uma sucessão limitada tem máximo e mínimo.*

Definição 1.10 *Sejam (u_n) uma sucessão limitada e S o conjunto dos sublimites de (u_n). Chama-se **limite máximo** ou **limite superior** de (u_n) ao máximo de S e representa-se $\overline{\lim}\, u_n = \limsup u_n = \max(S)$. Chama-se **limite múnimo** ou **limite inferior** de (u_n) ao mínimo de S e representa-se $\underline{\lim}\ u_n = \liminf\ u_n = \min(S)$.*

1.6 Propriedades dos limites

Proposição 1.4 *Não se altera o limite de uma sucessão convergente, modificando um número finito de termos da sucessão.*

Proposição 1.5 *Se os termos de uma sucessão são todos iguais a uma certa constante, então a sucessão tem por limite essa constante.*

Proposição 1.6 *(**Propriedades operatórias**) Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes, $u_n \to a$, $v_n \to b$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Então:*

1. *$u_n + v_n \to a + b$;*
2. *$cu_n \to ca$, com $c \in \mathbb{R}$;*
3. *$u_n.v_n \to a.b$;*
4. *se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ com $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{a}{b}$;*
5. *se $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \to a^p$;*
6. *$|u_n| \to |a|$;*
7. *se $p \in \mathbb{N}$ e $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então $\sqrt[p]{u_n} \to \sqrt[p]{a}$;*
8. *se $p \in \mathbb{N}$ e p é ímpar então$\sqrt[p]{u_n} \to \sqrt[p]{a}$.*

Demonstração. Vamos provar apenas a primeira propriedade enunciada: se $u_n \to a$, $v_n \to b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ então $u_n + v_n \to a + b$.

Pelas hipóteses da proposição sabemos que:

$$u_n \to a \ (\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p_1 \in N : n > p_1 \Rightarrow |u_n - a| < \delta)$$

$$v_n \to b \ (\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p_2 \in N : n > p_2 \Rightarrow |v_n - b| < \delta)$$

e queremos provar que

$$u_n + v_n \to a + b \ (\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p \in N : n > p \Rightarrow |(u_n + v_n) - (a + b)| < \delta)$$

Seja então $\delta > 0$ arbitrário,

$$\exists p_1 \in N : n > p_1 \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2},$$

$$\exists p_2 \in N : n > p_2 \Rightarrow |v_n - b| < \frac{\delta}{2}$$

tomemos $p = max\{p_1, p_2\}$. Com esta escolha de p, e para qualquer $n > p$, é válida a seguinte sequência de desigualdades:

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| = |(u_n - a) + (v_n - b)| \leq$$
$$\leq |u_n - a| + |v_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Podemos então concluir que $u_n + v_n \to a + b$. ■

Nota 1.5 *Observemos que a propriedade 6) do teorema anterior afirma que se $u_n \to a$ então $|u_n| \to |a|$.* ***Não*** *é verdade, em geral, que $|u_n| \to |a| \Longrightarrow u_n \to a$.*

Basta considerar a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$. A sucessão módulo $|u_n| = |(-1)^n| = 1$ é uma sucessão constante, convergente para essa constante, neste caso igual a 1. No entanto a sucessão (u_n) é divergente.

Também é interessante estabelecer propriedades dos limites relacionadas com relações de ordem.

Teorema 1.3 *Sejam (u_n) e (v_n) sucessões convergentes para as quais existe $p \in \mathbb{N}$, tal que para $n > p \Longrightarrow u_n \leq v_n$. Então $\lim u_n \leq \lim v_n$.*

Teorema 1.4 *(das sucessões enquadradas) Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) sucessões tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Se $u_n \to a$, $w_n \to a$ com $a \in \mathbb{R}$ então $v_n \to a$.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$, qualquer. Como $u_n \to a$ e $w_n \to a$ então:
$\exists p_1 \in N : n > p_1 \Rightarrow a - \delta < u_n < a + \delta$,
$\exists p_2 \in N : n > p_2 \Rightarrow a - \delta < w_n < a + \delta$.
Como, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n \leq w_n$,
$\exists p_3 \in N : n > p_3 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$.
Seja $p = max\{p_1, p_2, p_3\}$. Se $n > p$, então $a - \delta < u_n \leq v_n \leq w_n < a + \delta$.
Podemos concluir que:

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |v_n - a| < \delta,$$

ou seja, $v_n \to a$. ■

Exemplo 1.25 *Considere-se a sucessão de termo geral*

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + ... + \frac{1}{n^2+n}.$$

Vamos mostrar que $u_n \to 1$*, utilizando o teorema das sucessões enquadradas. Em primeiro lugar verifica-se facilmente que* $u_n \geq 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Por outro lado temos que:*

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + ... + \frac{1}{n^2+n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} + ... + \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1}.$$

Podemos enquadrar a sucessão da seguinte maneira:

$$0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

Como o limite da sucessão nula é o próprio zero e $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$*, pelo teorema das sucessões enquadradas, podemos concluir que* $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Nesta altura já introduzimos os conceitos de sucessão limitada, monótona e convergente. Podemos estabelecer um importante resultado que relaciona duma forma poderosa estes conceitos.

Teorema 1.5 *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente e:*
(i) se (u_n) *é crescente então* $\lim\ u_n = \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$,
(ii) se (u_n) *é decrescente então* $\lim\ u_n = \inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão limitada e crescente (a demonstração seria análoga para o caso duma sucessão decrescente). Denotemos por $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos seus termos. Como a sucessão é limitada o conjunto U é limitado, seja $a = \sup U$. Iremos mostrar que $a = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

Seja $\delta > 0$, qualquer. Como $a = \sup U$ então $a - \delta$ não é majorante do conjunto U, logo existe um elemento do conjunto U (um termo da sucessão) tal que $u_p > a - \delta$. Como a sucessão é decrescente temos que $u_p \leq u_n$, para todo $n > p$. Claro que $u_n \leq a$ uma vez que $a = \sup U$. Então $n > p$ implica que $a - \delta < u_n \leq a$ que por sua vez implica que $a - \delta < u_n \leq a + \delta$, donde podemos concluir que $|u_n - a| < \delta$. Ou seja,

$$\forall \delta > 0 \exists p \in N : n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta,$$

isto é, a sucessão converge para o número real a. ■

Nota 1.6 *A recíproca não é verdadeira, isto é, existem sucessões não monótonas que são convergentes. Consideremos a sucessão* $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$*: não é monótona mas converge para zero.*

Analisemos um caso muito significativo em Matemática.

Exemplo 1.26 *Considere-se um dos primeiros exemplos de sucessões estudados nestas notas, a sucessão de termo geral*

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Observemos o seu comportamento na figura 1.1. Prova-se que esta sucessão é crescente e tem todos os termos compreendidos entre 2 e 3. É, portanto, uma sucessão monótona e limitada, pelo que é convergente em $\mathbb{R}$.

John Napier (lê-se e escreve-se, em geral, Neper) (1550-1617) introduziu o cálculo logarítmico em 1614. A obra de Napier envolvia de uma forma não explícita o número que hoje, em homenagem a este matemático escocês, se designa por número de Neper e que se denota por **e**, sendo este um número irracional.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Teorema 1.6 *Uma sucessão real é convergente se e só se todas as suas subsucessões forem convergentes para um mesmo limite.*

Demonstração. Provaremos, apenas, uma das implicações: se a sucessão (u_n) converge, então todas as suas subsucessões convergem para o mesmo limite.

Seja (u_{n_k}) uma subsucessão da sucessão (u_n), arbitrária. Notemos que $n_k \geq k$ para qualquer k (prova-se facilmente por indução). Seja $a = \lim u_n$ e seja $\delta > 0$. Então existe uma ordem p tal que $n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$. Mas $k > p$ implica $n_k \geq p$ o que por sua vez implica $|u_{n_k} - a| < \delta$. Então $a = \lim u_{n_k}$. ■

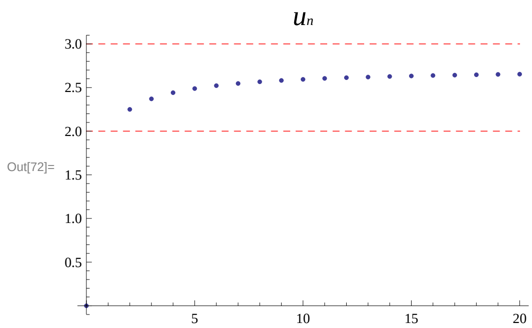


Figura 1.1: Comportamento da sucessão de termo geral $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Este teorema revela-se muito útil nomeadamente para provar a divergência de sucessões.

Exemplo 1.27 *Consideremos a sucessão real (u_n) com termo geral dado por $u_n = 2(-1)^n$. Temos que a sua subsucessão dos termos de ordem par satisfaz*

$$u_{2n} = 2(-1)^{2n} = 2 \to 2,$$

enquanto que a sua subsucessão dos termos de ordem ímpar satisfaz

$$u_{2n-1} = 2(-1)^{2n-1} = -2 \to -2.$$

Assim, a sucessão $u_n = 2(-1)^n$ tem duas subsucessões com limites distintos, $2 \neq -2$. Usando o Teorema anterior, podemos então concluir que a sucessão $u_n = 2(-1)^n$ não é convergente.

O nosso objectivo, agora, é provar o teorema de Bolzano-Weiestrass. Precisamos de estabelecer dois resultados cuja demonstração deixaremos como exercício.

Teorema 1.7 *Toda a sucessão (u_n) tem uma subsucessão monótona.*

Teorema 1.8 *Seja (u_n) uma sucessão arbitrária. Então existe uma subsucessão monótona cuja limite é o* $\limsup u_n$ *e existe uma subsucessão monótona cuja limite é o* $\liminf u_n$.

Estamos agora em condições de enunciar o teorema de Bolzano-Weiestrass.

Teorema 1.9 ***(Bolzano-Weiestrass)*** *Toda a sucessão limitada (u_n) tem uma subsucessão convergente.*

Demonstração. Este resultado prova-se facilmente através das proposições anteriores. Sabemos por um dos teoremas anteriores que (u_n) tem uma subsucessão (u_{n_k}) monótona. Mas se (u_n) é limitada então qualquer sua subsucessão é limitada, logo (u_{n_k}) é limitada. Mas se é limitada e monótona então (u_{n_k}) é convergente. Podemos concluir que (u_n) tem uma subsucessão convergente. ■

1.7 Limites infinitos

Já apareceram duma forma implícita, por diversas vezes os símbolos $+\infty$, $-\infty$ ou ∞. Duma forma pouco rigorosa, para uma sucessão (u_n), $\lim u_n = +\infty$ significará que os seus termos, a partir duma certa ordem, "são tão grandes quanto se queira". Nesta seccção vamos estudar estas situações.

Definição 1.11 *Diz-se que a sucessão (u_n) é um* ***infinitamente grande positivo*** *(ou que tende para $+\infty$), e representa-se $u_n \to +\infty$, se*

$$\forall L \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n > L.$$

Diz-se que a sucessão (u_n) é um ***infinitamente grande negativo*** *(ou que tende para $-\infty$), e representa-se $u_n \to -\infty$, se*

$$\forall L \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n < -L.$$

Diz-se que a sucessão (u_n) é um ***infinitamente grande em módulo*** *(ou que tende para ∞), e representa-se $u_n \to \infty$, se*

$$\forall L \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n| > L.$$

Consideremos alguns exemplos

Exemplo 1.28 *1)* $u_n = n^2 \to +\infty$.
2) $v_n = -n \to -\infty$.
3) Seja $w_n = (-n)^n$. *Então* $|w_n| = n^n \to +\infty$.

Claro que muitas sucessões não tendem para $+\infty$ ou $-\infty$ ou ∞ mesmo não sendo limitadas.

Nota 1.7 *Se (u_n) é tal que $u_n \to +\infty$, $u_n \to -\infty$ ou $u_n \to \infty$ então (u_n) é não limitada.*

A recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a sucessão

$$u_n = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é não limitada e $u_n \nrightarrow +\infty$, $u_n \nrightarrow -\infty$ e $|u_n| \nrightarrow +\infty$.

Uma sucessão diz-se **propriamente divergente** se tende para mais infinito ou para menos infinito. Uma sucessão diz-se **oscilante** se não for convergente nem propriamente divergente.

Esquematicamente:

- **Convergentes** (limite finito)
- **Divergentes** $\begin{cases} \textbf{propriamente divergentes} \text{ (limite } +\infty \text{ ou } -\infty) \\ \textbf{oscilantes} \text{ (restantes casos).} \end{cases}$

Exemplo 1.29 *Mostre que* $\lim\ (\sqrt{n} + 7) = +\infty$.

Discussão: *Nós devemos considerar um número positivo arbitrário, $L > 0$ e mostrar que existe um número p tal que $n > p$ implica $(\sqrt{n}+7) > L$. Para identificar quão grande este número L deve ser vamos estudar a desigualdade $(\sqrt{n} + 7) > L$. Então de $(\sqrt{n} + 7) > L$ obtemos $\sqrt{n} > L - 7$ ou $n > (L - 7)^2$. Podemos tomar $p = (L - 7)^2$.*

Prova: *Seja $L > 0$ e seja $p = (L - 7)^2$. Então $n > p$ implica $n > (L - 7)^2$, donde $\sqrt{n} > L - 7$ e logo $(\sqrt{n} + 7) > L$. Mostrámos que* $\lim\ (\sqrt{n} + 7) = +\infty$.

Proposição 1.7 *Sendo (u_n) e (v_n) duas sucessões, tem-se que:*

1. *se $u_n \to +\infty$ e se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ então $v_n \to +\infty$;*
2. *se $u_n \to -\infty$ e se, a partir de certa ordem, $v_n \leq u_n$ então $v_n \to -\infty$.*

Proposição 1.8 ***(Propriedades operatórias)*** *Sendo (u_n) e (v_n) duas sucessões tem-se que:*

1. *se $u_n \to +\infty$ e $v_n \to +\infty$ então $u_n + v_n \to +\infty$;*
2. *se $u_n \to -\infty$ e $v_n \to -\infty$ então $u_n + v_n \to -\infty$;*
3. *se $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) e $v_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$ então $u_n + v_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$);*
4. *se $u_n \to \infty$ e $v_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$ então $u_n + v_n \to \infty$;*
5. *se $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) e $v_n \to b$, $b \in \mathbb{R}^+$ então $u_n.v_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$);*
6. *se $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) e $v_n \to c$, $c \in \mathbb{R}^-$ então $u_n.v_n \to -\infty$ (resp. $+\infty$);*
7. *se $u_n \to \infty$ e $v_n \to \infty$ então $u_n.v_n \to \infty$.*

Definição 1.12 *Designa-se por **recta acabada**, e representa-se por $\overline{\mathbb{R}}$, o conjunto*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Os elementos $-\infty$ e $+\infty$ satisfazem a relação de ordem

$$-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$$

bem como as regras operacionais algébricas que se descrevem de seguida.
1) Relativamente à adição, temos que

$$a + (+\infty) = +\infty \text{ e } \quad a + (-\infty) = -\infty, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

bem como

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \text{ e } \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Mas

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ é uma indeterminação do tipo } \infty - \infty.$$

Estes símbolos, são designados por **símbolos de indeterminação**. Significa que o facto de existir ou não limite, bem como o seu valor depende das sucessões envolvidas.

Exemplo 1.30 *Consideremos as sucessões de termos gerais:* $u_n = 2n^2 + 1$, $v_n = n^3 + 3$ *e* $w_n = n^3 + 2$.

Como (u_n), (v_n) *e* (w_n) *tendem para* $+\infty$, *as sucessões* $(v_n - w_n)$ *e* $(u_n - w_n)$ *correspondem a situações de indeterminação. Temos de estudá-las caso a caso quanto à convergência.*

$$\begin{aligned} \lim(v_n - w_n) &= \lim\left[(n^3+3) - (n^3+2)\right] = \lim(1) = 1, \\ \lim(u_n - w_n) &= \lim\left[(2n^2+1) - (n^3+2)\right] = \lim(-n^3 + 2n^2 - 1) \\ &= \lim\left[-n^3(1 - \tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{n^3})\right] = -\infty. \end{aligned}$$

2) Relativamente à multiplicação, temos que:

$$a.(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, \text{ se } a > 0 \\ \mp\infty, \text{ se } a < 0. \end{cases}$$

Temos também que:

$$(+\infty).(+\infty) = +\infty = (-\infty).(-\infty) \text{ e } \quad (+\infty).(-\infty) = -\infty.$$

Por outro lado,

$$0.(\pm\infty) \text{ é uma indeterminação do tipo } 0.\infty.$$

Esta indeterminação dá naturalmente origem a indeterminações na divisão: as chamadas indeterminações do tipo

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty}.\infty = 0.\infty \text{ e } \quad \frac{0}{0} = \frac{1}{0}.0 = 0.\infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty}.\infty = 0.\infty.$$

Relativamente à potenciação, se considerarmos as sucessões (u_n) e (v_n) tais que $u_n \to a$ e $v_n \to b$:

(i) $u_n \to a$ e $v_n \to +\infty$, temos que:

$$u_n^{v_n} \to \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq a < 1 \\ +\infty, \text{ se } a > 1 \end{cases}$$

(ii) $u_n \to +\infty$ e $v_n \to b$, temos que:

$$u_n^{v_n} \to \begin{cases} 0, \text{ se } b < 0 \\ +\infty, \text{ se } b > 0. \end{cases}$$

Por outro lado, são indeterminações, os casos em que $a = 1$ e $b = +\infty$ ou $a = +\infty$ e $b = 0$, as chamadas indeterminações do tipo

$$1^{+\infty} \quad \text{e} \quad (+\infty)^0.$$

Nota 1.8 *Durante o ensino secundário, foram estudadas formas para levantar (ou seja, resolver) alguns tipos de indeterminações que surgem no cálculo do limite de sucessões:*

(i) indeterminações do tipo $0 \cdot \infty$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *ou* $\dfrac{0}{0}$, *podem normalmente ser levantadas pondo em evidência os termos de maior grau;*

(ii) indeterminações do tipo $\infty - \infty$ *que envolvem a raiz quadrada podem normalmente ser levantadas multiplicando e dividindo pelo conjugado.*

Uma sucessão particularmente importante é a sucessão exponencial de termo geral $u_n = a^n$. Tem-se que:

$$\left[\begin{array}{l|l} \textbf{Valor de a} & \lim_{n\to+\infty} (\mathbf{a}^n) \\ a > 1, & +\infty, \text{ inf. grande positivo} \\ a = 1, & 1 \\ -1 < a < 1, & 0 \\ a \leq -1, & \text{não existe} \end{array} \right].$$

Nestas notas apenas mostramos o comportamento desta sucessão, em termos de convergência, para um dos casos, o caso em que $|a| < 1$.

Exemplo 1.31 *Para* $|a| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} (\mathbf{a}^n) = \mathbf{0}$.

1º) Se $a = 0$, $\lim_{n\to+\infty} (\mathbf{a}^n) = \lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2º) Para $0 < a < 1$, *mostrámos, num exemplo anterior, que* $\lim_{n\to+\infty} (\mathbf{a}^n) = \mathbf{0}$.

3ª) Se $-1 < a < 0$, *então* $0 < -a < 1$ *e aplicando o (2º) caso, temos que* $\lim_{n\to+\infty} (-\mathbf{a})^n = \mathbf{0}$. *Mas* $\mathbf{a}^n = [(-1)(-a)]^n = (-1)^n(-a)^n$. *Como a sucessão de termo geral* $(-1)^n$ *é uma sucessão limitada e pelo (2º) caso,* $\lim_{n\to+\infty} (-\mathbf{a})^n = \mathbf{0}$, *podemos concluir que a sucessão produto,* $\mathbf{a}^n$, *também é um infinitésimo.*

Lema 1.1 *Sejam* (u_n) *uma sucessão de termos positivos,* $a \in \mathbb{R}^+$, $\delta \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < \delta < a$ *e* $p \in \mathbb{N}$. *Então:*

$$a - \delta < \tfrac{u_{n+1}}{u_n} < a + \delta, \, \forall n \geq p \implies (a-\delta)^n \tfrac{u_p}{(a-\delta)^p} < u_n < (a+\delta)^n \tfrac{u_p}{(a+\delta)^p}, \, \forall n > p.$$

Demonstração. Pode ser provado, duma forma, simples, usando o Método de Indução. ■

Teorema 1.10 *Seja* (u_n) *uma sucessão de termos positivos tal que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$*,* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*. Então:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a.$$

Demonstração. Demonstraremos apenas para $0 < a < +\infty$. Deixamos os casos $a = 0$ e $a = +\infty$ como exercício.

Uma vez que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, sabemos que

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in N : n > p \Rightarrow |\frac{u_{n+1}}{u_n} - a| < \delta,$$

logo

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in N : n > p \Rightarrow a - \delta < \frac{u_{n+1}}{u_n} < a + \delta.$$

Em particular, se $0 < \delta < a$ temos pelo lema anterior que

$$(a-\delta)^n \frac{u_p}{(a-\delta)^p} < u_n < (a+\delta)^n \frac{u_p}{(a+\delta)^p}$$

Que implica

$$\Longrightarrow \ (a-\delta) \sqrt[n]{\frac{u_p}{(a-\delta)^p}} < \sqrt[n]{u_n} < (a+\delta) \sqrt[n]{\frac{u_p}{(a+\delta)^p}}, \forall n > p.$$

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\tfrac{u_p}{(a-\delta)^p}} &= \left[\tfrac{u_p}{(a-\delta)^p}\right]^0 = 1 \text{ e} \\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\tfrac{u_p}{(a+\delta)^p}} &= \left[\tfrac{u_p}{(a+\delta)^p}\right]^0 = 1 \end{aligned}$$

E que δ pode ser arbitrariamente pequeno, podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a.$$

■

Exemplo 1.32 *Mostre que* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Uma vez que $u_n = n!$ *é uma sucessão de termos positivos e que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty,$$

Podemos concluír que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Recordando que $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, enunciamos um resultado muito importante, que só demonstraremos no capítulo 3 destas notas.

Teorema 1.11 *Sejam* (u_n) *uma sucessão real tal que* $\lim |u_n| = +\infty$ *e* (x_n) *uma sucessão real tal que* $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, *com* $a \in \mathbb{R}$.

Então:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^a.$$

Exemplo 1.33 *Consideramos a sucessão de termo geral*

$$v_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}.$$

Então:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{3n}\right)^{3n} = e^6.$$

Definição 1.13 *Sejam* (u_n) *e* (v_n) *duas sucessões reais. Diz-se que* (v_n) *tem uma ordem de grandeza superior a* (u_n), *e escreve-se* $u_n \ll v_n$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Consideremos dois exemplos de grande importância.

Exemplo 1.34 *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Então*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

(1º) Se $a = 0$ *então temos que* $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{0}{n!} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.

(2º) Seja $a > 0$. *Consideremos* $p \in \mathbb{N}$, *fixo e tal que* $\dfrac{a}{p+1} < 1$. *Então para todo o* $n > p$,

$$0 \le \frac{a^n}{n!} = \frac{a^p}{p!}\frac{a^{n-p}}{(p+1)(p+2)...n} \le \frac{a^p}{p!}\left(\frac{a}{p+1}\right)^{n-p}.$$

Mas

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{a^p}{p!}\left(\frac{a}{p+1}\right)^{n-p}\right] = \frac{a^p}{p!}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{p+1}\right)^{n-p} = \frac{a^p}{p!}0 = 0$$

Pelo teorema das Sucessões Enquadradas podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

(3º) Seja $a < 0$. *Então* $-a > 0$ *e, temos que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\left[(-1)^n\frac{(-a)^n}{n!}\right] = 0$$

uma vez que a sucessão de termo geral $(-1)^n$ *é uma sucessão limitada e pelo (2º) caso,* $\lim^n_{n\to+\infty}\dfrac{(-a)^n}{n!} = \mathbf{0}$. *Então*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Significa que a sucessão de termo geral $n!$ tem uma ordem de grandeza superior a a^n.

Exemplo 1.35 *Mostramos que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Consideremos $p \in \mathbb{N}$, fixo. Então para todo o $n > p$,

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{p!}{n^p}\frac{(p+1)(p+2)...n}{n^{n-p}} \leq \frac{p!}{n^p}\frac{n^{n-p}}{n^{n-p}} = \frac{p!}{n^p}.$$

Mas

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p!}{n^p} = p! \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = p!0 = 0$$

Pelo teorema das Sucessões Enquadradas podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Significa que a sucessão de termo geral n^n tem uma ordem de grandeza superior a $n!$.

Consideremos a proposição seguinte que sistematiza ordens de grandeza entre sucessões bastante importantes.

Proposição 1.9 *Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 1$ e sejam α, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Tem-se que*

$$\log^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

Demonstração. Os dois exemplos anteriores mostram duas destas relações. A demonstrações dos restantes casos é deixada como exercício. ■

1.8 Sucessões de Cauchy

Definição 1.14 *Uma **sucessão** (u_n) diz-se **de Cauchy** se*

$$\forall \delta > 0 \exists p \in N : m, n > p \Rightarrow |u_n - u_m| < \delta.$$

A sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$ é uma sucessão de Cauchy.
De facto, sejam $m, n > p$; então

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2p}.$$

Sendo $\delta > 0$, qualquer; para concluir, basta tomarmos $p > \dfrac{2}{\delta}$

Na definição de sucessão convergente a ideia intuitiva de aproximação é estabelecida entre um número real e os termos da sucessão. A sucessão converge se, a partir de certa ordem, todos os elementos da sucessão "se aproximam" do limite. Na definição de sucessão de Cauchy apenas comparamos os elementos da própria sucessão uns com os outros. Dizemos que a sucessão é de Cauchy se, a partir de certa ordem, todos os elementos da sucessão "se aproximam" uns dos outros.

Teorema 1.12 *Uma sucessão real é convergente se, e só se, for sucessão de Cauchy.*

Este teorema permite-nos mostrar que uma sucessão é convergente sem ter que calcular o seu limite. Consideremos a sucessão:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}.$$

Podemos tomar, sem perda de generalidade, $n > m$; então:

$$|u_n - u_m| = \left| \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + ... + \frac{1}{n^2} \right| = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + ... + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}.$$

Se $p > \dfrac{1}{\delta}$ e $n \geq m > p$, obtemos $|u_n - u_m| < \delta$ pelo que a sucessão é de Cauchy, logo convergente.

1.9 Exercícios propostos

1) Escreva os primeiros cinco termos das sucessões cujos termos de ordem n são:

a) $u_n = \dfrac{1}{3n+1}$,

b) $v_n = \dfrac{n}{3^n}$,

c) $w_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

2) Indique quais são majoradas, minoradas, limitadas, de entre as sucessões definidas de modo seguinte:

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$,

b) $v_n = \dfrac{2+2(-1)^n}{2n}$,

c) $w_1 = 0,\ w_{n+1} = \dfrac{2w_n+1}{3}$,

d) $v_n = n^{(-1)^n}$.

3) Para as sucessões consideradas no exercício anterior, indique se são monótonas (crescentes ou decrescentes).

4) Prove, por definição, que:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+10}{2n-1} = \frac{1}{2}$,

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$,

c) A sucessão de termo geral $u_n = n^2$ é divergente.

5) Calcule os limites das seguintes sucessões, caso existam, cujos termos de ordem n, são:

a) $\dfrac{n^2+1}{3n^2-2n+1}$, *b)* $\dfrac{n^3+1}{2n^2-3}$, *c)* $\dfrac{n-2}{n^3+2n^2-2}$, *d)* $\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$,

e) $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, *f)* $\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$, *g)* $n-\sqrt{n^2-n}$, *h)* $\dfrac{n+\operatorname{sen}^2 n}{2n+3}$,

i) $\dfrac{\cos(n\pi)}{n^2}$, *j)* $\dfrac{n^{n-1}}{n^n+2}$, *l)* $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$, *m)* $\sqrt[n]{(n+1)!-n!}$,

n) $\sqrt[n]{\dfrac{n^3-1}{4n^3+2}}$, *o)* $\sqrt[n]{\log n}$, *p)* $\left(\dfrac{4n-3}{4n+1}\right)^n$, *q)* $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{-2n}$.

6) Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular os limites das sucessões, cujos termos de ordem n, são:

a) $u_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+...+\dfrac{1}{(n+n)^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^2}$,

b) $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,

c) $w_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

7) Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) A sucessão seguinte é divergente, cujo termo de ordem n é definido por:

$$a_n=\begin{cases}\frac{n}{n+1} & \text{se } n\leqslant 10\\ 3 & \text{se } n>10\end{cases};$$

b) A sucessão seguinte é divergente, cujo termo de ordem n é definido por

$$a_n=\begin{cases}\frac{n}{n+1} & \text{se } n \text{ é par}\\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar}\end{cases};$$

c) Se $(u_n)_n$ é uma sucessão decrescente de termos positivos então é convergente;

d) Uma sucessão decrescente de termos positivos tende para zero.

8) Mostre que:

$$\lim_{n\to+\infty}a^n=\begin{cases}0 & \text{se } |a|<1,\\ 1 & \text{se } a=1,\\ +\infty & \text{se } a>1,\\ \text{não existe} & \text{se } a\leq -1.\end{cases}$$

9) Estude a natureza das seguintes sucessões e indique se são ou não limitadas. Calcule, em cada caso, os limites inferior e superior:

a) $[2+(-1)^n].n$, *b)* $\dfrac{(\operatorname{sen} n)^n}{5^{n-1}}$, *c)* $\dfrac{\cos(n\pi)+\cos(2n\pi)}{n}$,

d) $\dfrac{a^n}{4^{2n}}, a \in \mathbb{R}$, *e)* $(-1)^n .n!$, *f)* $[(-1)^n+1]\dfrac{2n^2-n}{n^2+2n}$,

g) $n^{(-1)^n}$, *h)* $\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}+\cos\dfrac{n\pi}{3}$, *i)* $\dfrac{n+(-1)^n(2n-1)}{n+1}$.

10) Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| > 3\} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[,$$

$$B = \left]0, \sqrt{2}\right[, \qquad C = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dê um exemplo ou justifique a não existência de:

a) uma sucessão de termos no conjunto A monótona e divergente;
b) uma sucessão de termos no conjunto B crescente e divergente;
c) uma sucessão de termos no conjunto B com limite em $\mathbb{R}\backslash B$;
d) uma sucessão de termos no conjunto $\mathbb{R}\backslash B$ com limite em B;
e) uma sucessão de termos no conjunto $A\backslash B$ com limite em $A \cap B$;
f) uma sucessão de termo geral u_n no conjunto C tal que $lim\ u_n < \sqrt{2}$.

11) Considere a sucessão

$$u_n = \frac{3^n}{n!}.$$

Sabendo que, qualquer que seja $n > 3$,

$$u_n < \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^2,$$

utilize o Teorema das Sucessões Enquadradas para determinar $\lim u_n$.

12) Sejam

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \quad \text{em que } n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule $\lim u_n$;

b) Sabendo que

$$v_n < 3 - \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

justifique que $(u_n + v_n)$ é convergente.

13) Considere as seguintes sucessões definidas por:

$$u_n = \cos(\frac{n\pi}{3}), \qquad v_n = \frac{3}{4n+1}, \qquad w_n = (-\frac{1}{2})^n, \qquad p_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

$a)$ Para cada sucessão, identifique o conjunto dos seus sublimites.
$b)$ Para cada sucessão, determine o $\lim$ sup e o $\lim$ inf.
$c)$ Alguma ou algumas sucessões são limitadas?

14) Considere a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+1}. \end{cases}$$

a) Encontre um minorante para o conjunto dos termos;

b) Mostre que (x_n) é decrescente;

c) Mostre que (x_n) é convergente;

d) Calcule $\lim u_n$.

15) Considere a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2}. \end{cases}$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$;

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente;

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique o seu limite.

16) Sendo u_n o termo geral de uma sucessão monótona, v_n o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - v_n| < \frac{1}{n},$$

prove que u_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

17) Justifique que, se as condições:

$$u_n > 0 \ \text{ e } \ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então u_n é convergente.

18) a) Mostre que:

$i)$ se $u_n \to +\infty$ então $\dfrac{1}{u_n} \to 0$,

$ii)$ se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.

b) Será verdade que $u_n \to 0 \Longrightarrow (\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$ ou $\dfrac{1}{u_n} \to -\infty)$?

19) Determine, se são convergentes ou propriamente divergentes, as sucessões que têm como termo de ordem n:

$$a)\ \frac{n^n}{1000^n}, \qquad b)\ \frac{(2n)!}{n!}, \qquad c)\ \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}},$$

$$d)\ \sqrt[n]{n!}, \qquad e)\ \left(2-\frac{1}{n}\right)^n.$$

1.9.1 Soluções exercícios

1) $a)\ \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}.$ $\quad b)\ \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}.$ $\quad c)\ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

2) a) Limitada. b) Limitada. c) Limitada. d) Minorada e não majorada.

3) a) Decrescente. b) Não monótona. c) Estritamente crescente. d) Não monótona.

5) a) $\frac{1}{3}$; b) $+\infty$; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{3}{2}$; f) -1; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{2}$; i) 0;
j) 0; l) 1; m) $+\infty$; n) 1; o) 1; p) e^{-1}; q) e.

6) a) 0; b) 1; c) 0.

7) a) Falsa. b) Verdadeira. c) Verdadeira. d) Falsa.

9) a) Divergente, não limitada, $+\infty$, $-\infty$; b) Convergente, limitada, 0, 0; c) Convergente, limitada, 0, 0;

$$\text{d)} \begin{cases} |a| < 16, \text{ convergente, limitada}, 0, 0; \\ a > 16, \text{ divergente, não limitada}, +\infty, -\infty; \\ a < -16, \text{ divergente, não limitada}, +\infty, -\infty; \\ a = 16, \text{ convergente, limitada, } 1,\ 1; \\ a = -16, \text{ divergente, não limitada}, +\infty, -\infty. \end{cases} ;$$

e) Divergente, não limitada, $+\infty$, $-\infty$; f) Divergente, limitada, 0, 4; g) Divergente, não limitada, $+\infty$, 0; h) Divergente, limitada, $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; i) Divergente, limitada, 3, -1.

10)

i) A sucessão de termo geral $u_n = n + 1$.
ii) Não existe.
iii) A sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$.
iv) Não existe.
v) Não existe.
vi) A sucessão constante de termo geral $u_n = \sqrt{2} - 1$.

11) 0.

12) a) 1.

13) a) Seja S o conjunto dos sublimites. Para a sucessão u_n: $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$; para a sucessão v_n: $S = \{0\}$; para a sucessão w_n: $S = \{0\}$; para a sucessão p_n: $S = \{-1, 1\}$.

b) $\limsup u_n = 1$, $\liminf u_n = -1$; $\limsup v_n = \liminf v_n = 0$;
$\limsup w_n = \liminf w_n = 0$; $\limsup p_n = 1$, $\liminf p_n = -1$.

c) Todas as sucessões são limitadas.

14) a) 0. d) 0.

15) c) 2.

18) b) Não.

19) a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) 1, d) $+\infty$, e) $+\infty$.

CAPÍTULO 2

Séries Numéricas

2.1 Introdução

Desde a Antiguidade que os matemáticos se têm interessado pelas séries infinitas. Zenão criou paradoxos que criaram impasses perante as concepções que existiam na época em que viveu, cerca de 480 a.C. Por exemplo, num dos seus paradoxos - a Dicotomia - Zenão de Eleia discute o movimento de um atleta que se move entre dois pontos fixos, A e B, situados a uma distância finita, considerando uma sucessão infinita de intervalos de tempo - T_0, T_1, T_2,..., T_n,... - cada um deles sendo o tempo gasto para percorrer metade da distância percorrida no movimento anterior. Um pobre atleta que deseje realizar a corrida do ponto A ao ponto B terá primeiro que efectuar o percurso até ao ponto médio entre A e B, o que lhe demorará o tempo $\frac{T}{2}$, terá depois que chegar ao ponto médio entre este ponto e B, ou seja percorrer metade da distância restante, no que gastará $\frac{T}{4}$ e assim sucessivamente. O tempo total, que demorará o trajecto, será:

$$\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+...+\frac{T}{2^n}+...$$

Como era afirmado nessa época "*...Deve efectuar um número infinito de contactos com a pista num tempo limitado, o que é impossível, pois tal significa ultrapassar uma quantidade infinita num tempo finito...*" Ou seja, o atleta nunca conseguirá chegar a B!

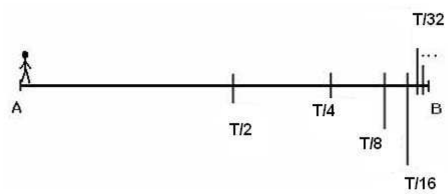


Figura 2.1: Ilustração do paradoxo - a Dicotomia - de Zenão de Eleia.

A questão de como, ao resultado de uma adição de infinitas parcelas de números positivos pode ser atribuído um número finito tem intrigado gerações de matemáticos e tem sido um contínuo desafio dando origem a animadas e interessantes questões tanto do ponto de vista filosófico como imenentemente científico.

Convém realçar que se deve a um matemático português, José Anastácio da Cunha, um papel percursor de grande relevo no estudo desta teoria (em particular, deve-se-lhe a primeira definição rigorosa do conceito de série convergente, formulada em 1790).

Esta noção de adição de infinitas parcelas de números reais é, exactamente, o objecto desta secção. Pretendemos determinar quando é que é possível atribuir um significado matemático preciso a uma expressão do tipo

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

Tal estudo faz uso do conceito de limite, fundamental em em Análise Matemática e já nosso conhecido.

2.2 Definição, natureza e exemplos de séries

Definição 2.1 *Seja u_n uma sucessão numérica. Chama-se **série numérica** a uma expressão do tipo $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$, representada em geral por:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \qquad \sum\nolimits_{n\geq 1} u_n, \qquad \text{ou apenas por } \sum u_n$$

*Os números $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$, chamam-se **termos da série**, u_n diz-se termo geral da série e as somas $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ designam-se por **somas parciais da série***

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1\\
&S_2 = u_1 + u_2\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3\\
&...\\
&S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n\\
&...
\end{aligned}$$

*A sucessão constituida pelas somas parciais $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ designa-se por **sucessão das somas parciais da série**. A S_n chama-se a **soma parcial de ordem n**.*

Definição 2.2 ***(Natureza duma série)*** *Uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diz-se **convergente** se a sucessão das somas parciais, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$, converge para um número real S. Se este limite existir, chama-se **soma da série** ao seu valor, S: $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.*

Se a sucessão das somas parciais for divergente, a série diz-se divergente.

*Duas séries dizem-se da **mesma natureza** se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.*

Para que fique claro a distinção entre série numérica, sucessão das somas parciais da série ou soma da série vamos considerar alguns exemplos.

Exemplo 2.1 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1.$$

O seu termo geral é $u_n = 1$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l} S_1 = u_1 = 1, \\ S_2 = u_1 + u_2 = 1 + 1 = 2, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 1 + 1 = 3, \\ ... \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n \\ ... \end{array}$$

.Como $S_n = n$ *temos que* $S_n \to +\infty$*, logo a série é divergente.*

Exemplo 2.2 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n.$$

O seu termo geral é $u_n = n$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l} S_1 = u_1 = 1, \\ S_2 = u_1 + u_2 = 1 + 2 = 3, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \\ ... \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = n\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \\ ... \end{array}$$

.Como $S_n = n\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \dfrac{n^2+n}{2}$ *temos que* $S_n \to +\infty$*, logo a série é divergente.*

Exemplo 2.3 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.$$

O seu termo geral é $u_n = (-1)^n$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l} S_1 = u_1 = -1, \\ S_2 = u_1 + u_2 = -1 + 1 = 0, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \\ ... \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \\ ... \end{array}$$

Como $S_n = \begin{cases} -1 & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ 0 & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$ *temos que* (S_n) *é divergente, logo a série é divergente.*

Exemplo 2.4 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

O seu termo geral é $u_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l} S_1 = u_1 = 1, \\ S_2 = u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{7}{4}, \\ ... \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} \\ ... \end{array}$$

Como $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$ *temos que* $\lim_{n \to +\infty} S_n = 2$, *é convergente.*
A série é convergente e a sua soma é 2.

Os dois exemplos anteriores são casos particulares das chamadas séries geométricas.

Exemplo 2.5 *Chama-se* ***série geométrica*** *à série gerada por uma progressão geométrica de razão* r,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + ... + u_1 r^{n-1} + ..., \qquad u_1,\ r \in \mathbb{R} \ (\textit{com } u_1 \neq 0).$$

Se (u_n) *é uma progressão geométrica de razão* $r \neq 1$ *temos que:*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_n = \sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i-1} = u_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Sabemos que S_n é convergente se, e só se $|r| < 1$, logo a série geométrica converge se, e só se, o valor absoluto da razão da progressão geométrica, que a gera, é menor que 1. No caso de convergência temos que:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(u_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \right) = \frac{u_1}{1 - r} = S.$$

No caso em que $r = 1$ a série é uma série de termo geral constante, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} u_n = \sum_{i=1}^{n} u_1,$$

sendo $S_n = n\ u_1$ e, se $u_1 \neq 0$, a série é divergente.

No caso em que $r = 0$ a série é uma série de termo geral constante, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} u_n = \sum_{i=1}^{n} 0,$$

sendo $S_n = 0$, a série é convergente, logo $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0 = S$.

Esquematicamente podemos resumir o comportamento da série geométrica, com respeito à sua natureza:

A série geométrica $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i-1}$ (com $u_1,\ r \in \mathbb{R}$ e $u_1 \neq 0$) é

- uma série convergente de soma $S = \dfrac{u_1}{1-r}$ se $|r| < 1$; e
- uma série divergente se $|r| \geq 1$.

Exemplo 2.6 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

é uma série geométrica de razão $r = \frac{3}{2} > 1$, logo divergente.

Exemplo 2.7 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

é uma série geométrica com primeiro termo $u_1 = 2$ e de razão $r = -\frac{1}{4}$. Como $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ a série é convergente e a sua soma é $S = \dfrac{u_1}{1-r} = \dfrac{2}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{8}{5}$.

No exemplo seguinte iremos considerar uma série que **não é** uma série geométrica

Exemplo 2.8 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

O seu termo geral é $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e a sucessão das somas parciais é dada por:

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1 = 1,\\
&S_2 = u_1 + u_2 = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}},\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}},\\
&...\\
&S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}},\\
&...
\end{aligned}$$

Como

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, a sucessão $S_n \to +\infty$, logo a série é divergente.

Exemplo 2.9 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

O seu termo geral é $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ *e a sucessão das somas parciais pode escrever-se:*

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1 = 1 - \tfrac{1}{2},\\
&S_2 = u_1 + u_2 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = 1 - \tfrac{1}{3},\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = 1 - \tfrac{1}{4},\\
&\dots\\
&S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \dots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \tfrac{1}{n+1},\\
&\dots
\end{aligned}$$

Como $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ *temos que* $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, *a série é convergente e a sua soma é* $S = 1$.

Exemplo 2.10 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log(n) - \log(n+1)\right).$$

O seu termo geral é $u_n = \log(n) - \log(n+1)$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1 = \log 1 - \log 2 = -\log 2,\\
&S_2 = u_1 + u_2 = (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) = \log 1 - \log 3 = -\log 3,\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + (\log 3 - \log 4) =\\
&\qquad = \log 1 - \log 4 = -\log 4,\\
&\dots\\
&Sn = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + \dots + (\log n - \log(n+1)) =\\
&\qquad = \log 1 - \log(n+1) = -\log(n+1),\\
&\dots
\end{aligned}$$

.*Como* $S_n = -\log(n+1)$ *temos que* $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$, *a série é divergente.*

Os dois últimos exemplos são casos particulares de um tipo de séries chamadas **séries redutíveis**, **de Mengoli** ou **telescópicas**. São séries da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k}),$$

em que k é um número natural e o termo geral se pode escrever na forma $u_n = a_n - a_{n+k}$.

Convém referir o caso particular (mas bastante frequente) em que $k = 1$, a série é da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_n - a_{n+1}) + ...$$

sendo a sua sucessão das somas parciais

$$S_n = a_1 - a_{n+1}.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}$, podemos concluir que a sucessão (S_n) converge se, e só se, (a_n) converge e neste caso $\lim_{n\to+\infty} S_n = a_1 - \lim a_n$. Então, quanto à sua natureza, temos que:

- se (a_n) é convergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ é convergente e e a sua soma é $S = a_1 - \lim a_n$;
- se (a_n) é divergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ é divergente.

Nos casos anteriores estudámos duas grandes famílias de séries, as séries geométricas e as séries de Mengoli. Consideramos agora, uma única série, que, pela sua importância, merece referência especial. Trata-se da **série harmónica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

O seu termo geral é $u_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ e a sucessão das somas parciais é dada por:

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1 = 1,\\
&S_2 = u_1 + u_2 = 1 + \tfrac{1}{2},\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3},\\
&...
\end{aligned}$$

O termo geral da sucessão das somas parciais é dado por

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

Mas, ao contrário do que acontecia nas séries anteriormente estudadas, não é possível determinar uma fórmula mais simples para o termo geral da sucessão de somas parciais, o que dificulta o estudo das suas propriedades. Embora seja a primeira vez que enfrentamos esta dificuldade, trata-se duma situação (infelizmente) bastante frequente no estudo de séries.

Proposição 2.1 *A série harmónica* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ *é uma série divergente.*

Demonstração. Esta demonstração será feita por *redução ao absurdo*, técnica já utilizada nestas folhas.

Vamos admitir que a série é convergente para depois se chegar a uma situação contraditória. Assim, admitimos que a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é convergente. Por definição, esta suposição significa que a sucessão das somas parciais (S_n) é uma sucessão convergente, com limite $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Como qualquer sua subsucessão converge para o mesmo limite, se considerarmos a subsucessão dos termos de ordem par, (S_{2n}), obtemos que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S$.

Podemos concluir que $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0$. Mas:

$$\begin{aligned} S_n \quad &= u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}, \\ S_{2n} \quad &= u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n-1} + u_{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

A diferença entre estes dois termos é dada por:

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n \quad &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Através das propriedades dos limites sabemos que

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Obtivemos que:

$$\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0, \text{ por uma lado e} \\ \lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}, \text{ por outro lado} \end{array}$$

Estamos perante uma contradição, que tem de resultar da hipótese de que a série harmónica é convergente.

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é uma série divergente.

■

A divergência desta série é conhecida há muito tempo, foi demonstrada por Nicole Oresme por volta do ano 1350 com argumentos semelhantes aos que nós utilizámos. A divergência desta série é relativamente lenta, é, portanto, um bom contra-exemplo para a incorrecta mas, infelizmente muito frequente, expressão: "..t*udo o que precisamos para verificar se uma série é convergente é calcular alguns termos da série...*"

Esta série é um caso particular (muito importante) duma série de Dirichlet.

Chamam-se **séries de Dirichlet,** as séries, com α um número real fixo, da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ...$$

A série harmónica que estudámos anteriormente é um caso particular duma série de Dirichlet em que $\alpha = 1$. Como mostrámos trata-se duma série divergente.

A natureza destas séries é conhecida e, como justificaremos mais adiante:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ é } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{se} \quad \alpha \leq 1. \end{cases}$$

2.3 Algumas propriedades de séries

As propriedades que iremos apresentar serão de grande utilidade para o estudo das séries nomeadamente quando é difícil o estudo da sucessão das somas parciais. É frequente não ser possível determinar uma expressão simples para o termo geral da sucessão das somas parciais.

Teorema 2.1 *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente então* u_n *é um infinitésimo, ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \textit{ convergente} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Demonstração. Por definição, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ ser convergente significa que a sucessão das somas parciais, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ admite limite real, $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$. Mas a sucessão $S_{n+1} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1}$ tende para o mesmo limite, S, uma vez que é subsucessão de (S_n). Como $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ então $\lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1})$. Então:

$$\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} \text{ por um lado e} \\ \lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = S - S = 0, \end{array}$$

logo podemos concluir que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ e, portanto, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

Nota 2.1 *Convém notar que a recíproca desta afirmação é falsa, isto é, que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \underset{\textit{(não implica)}}{\not\Rightarrow} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \textit{ convergente.}$$

Basta recordar o exemplo da série harmónica

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$

Este teorema dá-nos uma ferramenta que em muitos casos permite verificar facilmente que uma série é divergente. De facto o teorema anterior é logicamente equivalente ao seu contra-recíproco, ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ divergente.}$$

Assim qualquer série cujo termo geral não tenda para zero é necessariamente uma série divergente.

Exemplo 2.11 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Então

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0,$$

logo a série é divergente.

Teorema 2.2 *A natureza duma série não se altera pela modificação de um número finito dos seus termos. Caso a série seja convergente, a modificação de um número finito dos seus termos irá,* ***em geral, modificar a soma da série****.*

Demonstração. Considere-se uma série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

A sua sucessão das somas parciais tem termo geral $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$. Supomos que se alteram um número finito de termos da série, e que $\in \mathbb{N}$ é a maior ordem de entre as ordens dos termos alterados, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n + \ldots, \quad \text{a série original,}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_{p-1} + v_p + u_{p+1} + \ldots + u_n + \ldots, \quad \text{a nova série.}$$

Consideramos as respectivas sucessões de somas parciais: (U_n) da série original e (V_n) da nova série. Então:

$$U_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p) + u_{p+1} + \ldots + u_n = U_p + u_{p+1} + \ldots + u_n,$$

$$V_n = (v_1 + v_2 + \ldots + v_{p-1} + v_p) + u_{p+1} + \ldots + u_n = V_p + u_{p+1} + \ldots + u_n.$$

Donde podemos escrever que

$$V_n - U_n = V_p - U_p \Longleftrightarrow V_n = U_n + (V_p - U_p).$$

Como $(V_p - U_p)$ é um número real constante, através das propriedades dos limites de sucessões, podemos concluir que V_n converge se, e só se, U_n converge. Então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são ambas convergentes ou são ambas divergentes, isto é, têm a mesma natureza.

No caso em que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, $\lim_{n\to+\infty} U_n = U$, $U \in \mathbb{R}$. Então:

$$V = \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} [U_n + (V_p - U_p)] = U + (V_p - U_p).$$

Assim, embora tenham a mesma natureza, as somas das séries são diferentes, $V = U + (V_p - U_p)$, desde que $V_p \neq U_p$. ■

Através deste teorema podemos mostrar o resultado seguinte.

Corolário 2.1 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *tem a mesma natureza que a série* $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n,\ \ p \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.12 *Através deste resultado sabemos que as séries:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \qquad e \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$$

têm a mesma natureza. Neste caso são todas divergentes uma vez que a série harmónica é divergente.

Estes dois últimos resultados permitem o estudo do resto de ordem p duma série.

Definição 2.3 *Chama-se* ***resto de ordem p*** *da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *à série:*

$$r_p = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+p} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = u_{p+1} + ... + u_n + ...$$

Através dos resultados anteriores concluimos que a se a série é convergente o mesmo acontece ao seu resto de qualquer ordem.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = (u_1 + u_2 + ... + u_{p-1} + u_p) + u_{p+1} + ... + u_n + ...,\\
&S_p = u_1 + u_2 + ... + u_{p-1} + u_p,\\
&r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = u_{p+1} + ... + u_n + ...,\\
&r_p = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - S_p.
\end{aligned}$$

O resto de ordem p de uma série convergente dá-nos o erro que se comete quando se toma para valor aproximado da soma da série a sua soma parcial S_p.

Exemplo 2.13 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Sabemos que é uma série geométrica de razão $r=\dfrac{1}{2}$ *e primeiro termo* 1*, logo é uma série convergente cuja soma é* $V=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$

A sua soma parcial de ordem p *é* $S_p=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^p}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^{p-1}}.$

O seu resto de ordem p*, é* $r_p=S-S_p=2-.\dfrac{1}{2^{p-1}}.$

Neste caso determinámos o valor exacto da soma desta série. Frequentemente não se consegue determinar este valor o que torna o estudo dos restos muito importante. Através do estudo dos majorantes do valor do resto garantimos que o erro cometido na aproximação não excede um determinado valor, podemos controlar a magnitude do erro.

Proposição 2.2 ***(Operações com séries)***:

1. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ *são duas séries convergentes então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ *é convergente e* $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n+\sum_{n=1}^{+\infty}v_n.$

2. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *é uma série convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}cu_n$*, com* $c\in\mathbb{R}$*, é convergente e* $\sum_{n=1}^{+\infty}cu_n=c\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.$

Demonstração. 1) Consideremos as séries $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ e as respectivas sucessões das somas parciais:

$$\begin{aligned}U_n&=u_1+u_2+...+u_n,\\ V_n&=v_1+v_2+...+v_n.\end{aligned}$$

A sucesssão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ tem termo geral

$$\begin{aligned}S_n&=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+...+(u_n+v_n)=\\ &=(u_1+u_2+...+u_n)+(v_1+v_2+...+v_n)=\\ &=U_n+V_n\end{aligned}$$

Como as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são convergentes então $\lim_{n\to+\infty} U_n = U$ e $\lim_{n\to+\infty} V_n = V$, com $U, V \in \mathbb{R}$. Logo, obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n = U + V.$$

2) De forma análoga se demonstraria esta alínea que deixaremos como exercício.
■

Exemplo 2.14 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}+1}{4^{n-1}}.$$

.

Mas $\dfrac{3^{n-1}+1}{4^{n-1}} = \dfrac{2^{n-1}}{4^{n-1}} + \dfrac{1}{4^{n-1}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Como* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ *é uma série geométrica de razão* $r = \dfrac{3}{4}$ *e primeiro termo* 1*, então é uma série convergente cuja soma é* $U = \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$. *Da mesma forma,* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ *é uma série geométrica de razão* $r = \dfrac{1}{4}$ *e primeiro termo* 1*, logo é uma série convergente cuja soma é* $V = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

Assim, pela proposição anterior, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^{n-1}+1}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$ *é uma série convergente de soma* $S = U + V = 4 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{3}$.

2.4 Séries de termos não negativos

Consideramos nesta secção as séries em que os seus termos são sempre não negativos. Embora seja uma restrição ao caso geral, é muito importante a sua consideração pois permite a obtenção de alguns resultados de grande utilidade no estudo da natureza das séries.

Definição 2.4 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *diz-se de* ***termos não negativos*** *se* $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Um facto importante associado a qualquer série de termos não negativos é que a sua **sucessão de somas parciais é uma sucessão crescente**:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1}) - (u_1 + u_2 + ... + u_n) = \\ &= u_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \\ \iff \quad & S_{n+1} \geq S_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Este facto tem consequências importantes na obtenção de resultados para as sucessões de termos não negativos.

Teorema 2.3 ***(Condição necessária e suficiente de convergência)*** *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos não negativos. Então:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente} \iff (S_n) \text{ é uma sucessão majorada.}$$

Demonstração. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ convergente. Então, por definição, a sucessão das somas parciais (S_n) é uma sucessão convergente, logo é limitada e, portanto, majorada.

Supomos, agora que (S_n) é uma sucessão majorada. Como é, sempre, uma sucessão crecente então é também minorada, logo limitada. Então a sucessão das somas parciais (S_n) é uma sucessão convergente pois é monótona e limitada. Consequentemente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente. ■

Uma das razões que nos leva a estudar este caso das séries de termos não negativos é que a determinação da sua natureza é muitas vezes facilitada por critérios de comparação entre os seus termos e os termos de outra série cuja natureza seja conhecida. Infelizmente, estes critérios não nos permitem determinar, caso as séries sejam convergentes, a sua soma. Permitem, no entanto, determinar a sua natureza.

Teorema 2.4 ***(Primeiro critério de comparação)*** *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *duas séries de termos não negativos. Se, a partir de certa ordem p*

$$u_n \leq v_n, \text{ para todo o } n \geq p$$

Então:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é convergente* $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente,*
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente* $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é divergente.*

Demonstração. Como a modificação de um número finito de termos duma série não altera a sua natureza, podemos admitir sem perda de generalidade, que $p = 1$. Designando por U_n e V_n os termos gerais das sucessões das somas parciais, de cada série,

$$U_n = u_1 + u_2 + ... + u_n,$$
$$V_n = v_1 + v_2 + ... + v_n,$$

temos que

$$U_n \leq V_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Admitimos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente.Então, pelo teorema anterior, sabemos que a sucessão das somas parciais (V_n) é uma sucessão majorada. Como $U_n \leq V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então a sucessão (U_n) também é uma sucessão majorada. Mais uma vez, pelo teorema anterior, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

2) Admitimos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente. Então, pelo teorema anterior, sabemos que a sucessão das somas parciais (U_n) não é uma sucessão majorada. Como $U_n \leq V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então a sucessão (V_n) também não é uma sucessão majorada.Mais uma vez, pelo teorema anterior, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente. ■

Vamos aplicar este critério, utilizando as séries que estudámos e cuja natureza conhecemos, que já formam uma base de dados bastante razoável.

Exemplo 2.15 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

que é uma série de termos não negativos. Mas

$$n \geq \sqrt[3]{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

. Como sabemos que a série harmónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ é divergente,}$$

então, pelo critério de comparação, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ *também é divergente.*

Exemplo 2.16 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2},$$

que é uma série de termos não negativos.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ (n+1) \geq n \iff (n+1)(n+1) \geq n(n+1) \iff \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Como já estudámos, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *é uma série de Mengoli convergente. Podemos concluir, pelo critério de comparação, que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ *também é convergente.*

Exemplo 2.17 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

que é, também, uma série de termos não negativos. Mas:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)...2} \leq \frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como já estudámos, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *é uma série geométrica convergente. Podemos concluir, pelo critério de comparação, que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ *também é convergente.*

Enunciamos outro critério de comparação que seprova utilizando o primeiro critério.

Proposição 2.3 ***(Segundo critério de comparação)*** *Sejam* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos não negativos e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *uma série de termos positivos.tais que* $\displaystyle\frac{u_n}{v_n} \to L$. *Tem-se que:*

- *se* $L \neq 0, +\infty$, *então as séries são da mesma natureza;*
- *se* $L = 0$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é convergente, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *também é convergente;*
- *se* $L = +\infty$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é divergente, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *também é divergente.*

Demonstração. 1) Consideremos, em primeiro lugar que $L = 0$. Se $\frac{u_n}{v_n} \to 0$, existe uma ordem a partir da qual $u_n \leq v_n$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é convergente, pelo primeiro critério de comparação.

2) Consideremos, em segundo lugar que $L = +\infty$. Se $\frac{u_n}{v_n} \to +\infty$, existe uma ordem a partir da qual $\frac{u_n}{v_n} \geq 1$, e, portanto, $u_n \geq v_n$.Podemos concluir que, se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é divergente, pelo primeiro critério de comparação.

3) Finalmente consideramos o caso em que $\frac{u_n}{v_n} \to L$, com $L \neq 0, +\infty$ (como as séries são de termos não negativos então L é um real positivo).

Recordando a definição de limite de uma sucessão:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - L \right| < \varepsilon,$$

que é equivalente a afirmar que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow L - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < L + \varepsilon.$$

Escolhemos ε tal que $0 < \varepsilon < L$, ou seja, $0 < L - \varepsilon$. Como $v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ obtemos que:

$$0 < (L - \varepsilon) .v_n < u_n < (L + \varepsilon) .v_n.$$

Utilizando o primeiro critério de comparação tem-se, a partir desta desigualdade, que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente } &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (L - \varepsilon) .v_n \text{ convergente (pois } (L - \varepsilon) .v_n < u_n) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ convergente;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ convergente } &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (L + \varepsilon) .v_n \text{ convergente (pois } u_n < (L + \varepsilon) .v_n) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente.} \end{aligned}$$

A convergência de uma das séries implica a convergência da outra. De forma análoga, se provaria que a divergência de uma das séries implica a divergência da outra.

Concluindo, as duas séries têm a mesma natureza. ■

Exemplo 2.18 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

que é uma série de termos não negativos. Já mostrámos, num exemplo anterior, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *é uma série de Mengoli, convergente e de termos positivos. Calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \neq 0, +\infty.$$

Então por este critério as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *tem a mesma natureza, logo a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente.*

Exemplo 2.19 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}.$$

Trata-se duma série de termos não negativos. Já mostrámos, no exemplo anterior, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é uma série convergente e de termos positivos. Calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

Então, por este critério, como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, podemos concluir que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$ *também é convergente.*

Exemplo 2.20 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[5]{n} + \sqrt[3]{n}}.$$

Trata-se duma série de termos não negativos. Sabemos que a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é uma série divergente e de termos positivos. Calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt[5]{n} + \sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{\sqrt[5]{n} + \sqrt[3]{n}} = +\infty.$$

Então, por este critério, como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente, podemos concluir que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[5]{n}+\sqrt[3]{n}}$ *também é divergente.*

Exemplo 2.21 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}.$$

Trata-se duma série de termos não negativos.

Sabemos que a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é uma série divergente e de termos positivos. Calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n}} = 0$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é uma série divergente, por este critério nada podemos concluir.*

Sabemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é uma série convergente e de termos positivos.*

Calculemos.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0.$$

Então, por este critério, como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, podemos concluir que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$ *também é convergente.*

Corolário 2.2 *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *duas séries de termos positivos.tais que, existe uma ordem* $p \in \mathbb{N}$ *em que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}, \forall n \ge p.$$

Então:

1) *se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é convergente, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente,*

2) *se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é divergente.*

Demonstração. Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ e $v_n > 0$ temos que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Longleftrightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n},$$

ou seja, a sucessão $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ é uma sucessão decrescente a partir da ordem p. Então existe uma constante k $\left(k \geq \dfrac{u_p}{v_p}\right)$ tal que

$$\frac{u_n}{v_n} \leq k,$$

ou seja,

$$u_n \leq k v_n, \forall n \geq p.$$

Então:

1) se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} k v_n$ é convergente, logo pelo 1^o critério de comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é convergente.

2) se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} k u_n$ é divergente, logo pelo 1^o critério de comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ também é divergente.

■

Exemplo 2.22 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n}.$$

Trata-se duma série de termos positivos. Sabemos que a série harmónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é uma série divergente e de termos positivos. Como:*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n(2n+2)}}{\dfrac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

e

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1},$$

e verifica-se, facilmente, que:

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{2n+1}{2n+2},$$

o que permite concluir, pelo corolário anterior que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n}$ *é divergente.*

Teorema 2.5 ***(Critério da Razão)*** *Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos positivos.*

1) *Se existirem* $r < 1$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *tais que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq r < 1, \forall n \geq p$

então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente.*

2) *Se existir* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \forall n \geq p$ *então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente.*

Demonstração. 1) Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n$, que é uma série geométrica de razão r. Como $0 < r < 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ é convergente. Mas $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{r^{n+1}}{r^n} = r, \forall n \geq p$. Podemos concluir, pelo corolário anterior que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

2) Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1$, que é uma série divergente. Como $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}, \forall n \geq p$, podemos concluir, pelo corolário anterior que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente. ■

Corolário 2.3 ***(Critério de D'Alembert)*** *Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos positivos. Se existir*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \quad (a \in \mathbb{R}_0^+ \text{ ou } a = +\infty),$$

então:

a) se $a < 1$*, a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente;*

b) se $a > 1$*, a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente.*

Demonstração. 1) Consideremos em primeiro lugar o caso em que $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - a \right| < \delta.$$

a) Se $a < 1$, seja δ tal que $0 < \delta < 1 - a$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - a \right| < \delta, \forall n > p \quad &\Longleftrightarrow -\delta < \frac{u_{n+1}}{u_n} - a < \delta, \forall n > p \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow a - \delta < \frac{u_{n+1}}{u_n} < a + \delta, \forall n > p. \end{aligned}$$

Mas se $\delta < 1 - a$ então $a + \delta < 1$ e a alínea 1) do critério da razão permite-nos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

b) Se $a > 1$, seja δ tal que $\delta = a - 1$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - a \right| < \delta, \forall n > p \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 2a - 1, \forall n > p.$$

Então a segunda alínea do critério da razão permite-nos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

2) Consideremos, agora, o caso em que $a = +\infty$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n > p.$$

Pelo teorema anterior, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

■

Nota 2.2 *Cuidado, que se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *nada se pode concluir através deste critério, pois existem séries divergentes e séries convergentes nesta situação. No entanto, se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ *e a convergência for por valores maiores que* 1, *isso significa que existe uma ordem* $p \in \mathbb{N}$ *a partir da qual* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *o que implica, pelo Critério da Razão, que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente.*

Exemplo 2.23 *Considere a série de termos positivos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+1}=0<1,$$

concluí-se, por este critério, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}$ *é convergente.*

Exemplo 2.24 *Estudemos a série de termos positivos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k^n n!}{n^n}, k>0.$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{k^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}k\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{k}{e},$$

o critério de D'Alembert permite-nos concluir que

$$\begin{aligned}\text{se }\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\frac{k}{e}<1,\text{ isto é, se } k<e,\text{ a série é convergente}\\ \text{se }\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\frac{k}{e}>1,\text{ isto é, se } k>e,\text{ a série é divergente}\end{aligned}$$

se $k=e$, através deste critério, nada podemos concluir.

Temos de estudar o caso da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$ *utilizando um outro processo. O* $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=1$, *mas a convergência obtem-se por valores maiores que 1, o que significa que existe uma ordem $p\in\mathbb{N}$ a partir da qual* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

Pelo Critério da Razão, podemos concluir que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *é divergente.*

Resumindo, concluimos que:

$$\text{a série }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k^n n!}{n^n}\begin{cases}\text{é convergente se } k<e,\\ \text{é divergente se } k\geq e.\end{cases}$$

Teorema 2.6 ***(Critério da Raiz)*** *Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *uma série de termos não negativos.*

1) *Se existirem $r<1$ e $p\in\mathbb{N}$ tais que $\sqrt[n]{u_n}\leq r,\forall n\geq p$*

então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *é convergente.*

2) *Se existirem $p\in\mathbb{N}$ e uma subsucessão (u_{n_k}), de (u_n) tal que $\sqrt[n_k]{u_{n_k}}\geq 1,\forall_{n_k}\geq p$*

então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *é divergente.*

Demonstração. 1) Consideremos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n$, que é uma série geométrica de razão r. Como $0 < r < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ é convergente. Mas $\sqrt[n]{u_n} \leq r, \forall n \geq p$ logo $u_n \leq r^n < 1$. Portanto, pelo critério de comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

2) Se $\sqrt[n_k]{u_{n_k}} \geq 1, \forall_{n_k} \geq p$ então $u_{n_k} \geq 1, \forall_{n_k} \geq p$, pelo que não tende para zero o que implica que a sucessão (u_n) também não converge para zero, logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

■

Tal como no critério da razão este teorema tem como consequência um corolário muito utilizado no estudo da natureza duma série.

Corolário 2.4 ***(Critério de Cauchy)*** *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos não negativos tal que*

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a \quad (a \in \mathbb{R} \text{ ou } a = +\infty),$$

então:

a) se $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente;*

b) se $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente.*

Demonstração. Seja $a = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

a) Tomamos r tal que $a < r < 1$. Podemos afirmar que

$$\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \sqrt[n]{u_n} < r.$$

Então, pelo teorem anterior, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

b) Por definição de limite superior, existe uma subsucessão de $\sqrt[n]{u_n}$ com limite $a > 1$, pelo que esta sucessão tem uma infinidade de valores maiores do que 1. Pelo teorema anterior, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente. ■

Nota 2.3 *Cuidado, que se* $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, *nada se pode concluir através deste critério.*

Exemplo 2.25 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

é uma série de termos positivos. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1,$$

então $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e > 1$. *Podemos concluir, pelo critério de Cauchy, que a série é divergente.*

Exemplo 2.26 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}.$$

é uma série de termos positivos. Mas

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \textit{se } n \textit{ é para} \\ \frac{1}{2} & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases}$$

então $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$. *Podemos concluir, pelo critério de Cauchy, que a série é convergente.*

Exemplo 2.27 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n-(-1)^n},$$

é uma série de termos positivos. Mas

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{-1}2^{-\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

então $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$. *Podemos concluir, pelo critério de Cauchy, que a série é convergente.*

Convém realçar que o critério de Cauchy é mais geral que o critério de D'Alembert, ou seja, se não pudermos concluir a natureza de uma série através do critério de Cauchy, também não o conseguiremos fazer através do critério de D'Alembert. Tal afirmação é justificada através do seguinte facto conhecido: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, o recíproco não é verdadeiro. Se, no exemplo anterior, aplicássemos o critério de D'Alembert, obteríamos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}+n+(-1)^n} = \begin{cases} 2, & \text{se n é par} \\ 2^{-3}, & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

Logo nada se concluiria pelo critério de D'Alembert.

Para terminar esta secção, das séries de termos não negativos vamos mostrar quando é que uma série de Dirichlet é convergente.

Proposição 2.4 *Consideremos uma série de Dirichlet. Quanto à sua natureza podemos afirmar que:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{é} \begin{cases} \textit{convergente} & \textit{se} \quad \alpha > 1 \\ \textit{divergente} & \textit{se} \quad \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Em primeiro observamos que se trata duma série com termos não negativos.

i) Se $\alpha \leq 0$, então $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \neq 0$, logo a série é divergente.

ii) Se $\alpha = 1$, trata-se da série harmónica que já provámos ser divergente.

iii) Para $0 < \alpha < 1$ tem-se que $n^\alpha \leq n$ e, portanto, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Como a série harmónica é divergente, podemos concluir, pelo critério de comparação, que a série de Dirichlet é divergente para $0 < \alpha < 1$.

iv) Para $\alpha = 2$, obtemos a série de termo geral $\frac{1}{n^2}$, que já mostrámos ser convergente.

v) Para $\alpha > 2$ usamos a desigualdade $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ e concluímos, pelo critério de comparação, que a série de Dirichlet converge.

vi) Resta-nos estudar o caso $1 < \alpha < 2$ (bastante mais difícil, que apresentamos como curiosidade matemática); aliás, a demonstração que faremos aplica-se sempre que $\alpha > 1$. Consideremos a sucessão das somas parciais (S_n) da série de Dirichlet com $\alpha > 1$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
S_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{n-1}-1)^\alpha}\right) \leq \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha}\right) = \\
&= 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{2^2}{2^{(n-1)\alpha}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{1-\alpha}\right)^k.
\end{aligned}$$

Como $\alpha > 1$, vem que $0 < 2^{1-\alpha} < 1$, o que nos permite majorar a expressão anterior pela seguinte série geométrica convergente:

$$S_{2^n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{1-\alpha}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k$$

e a série geométrica $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k$ é convergente cuja soma tem o valor $\frac{1}{1-2^{1-\alpha}}$. Vemos, assim, que a sucessão de termo geral S_{2^n-1} é majorada: sendo uma subsucessão da sucessão de termo geral S_n, que é crescente, concluimos que a sucessão das somas parciais (S_n) é majorada, logo a série é convergente, sempre que $\alpha > 1$. ∎

2.5 Séries de termos sem sinal fixo

Na secção anterior estudámos séries em que todos os seus termos não podiam ser números negativos. Vamos agora considerar o caso em que uma série tem termos positivos e negativos.

Definição 2.5 *Uma série diz-se de* ***termos sem sinal fixo*** *se possui infinitos termos positivos e infinitos termos negativos.*

Em particular, consideramos o caso em que ostermos positivos e negativos são alternados.

Definição 2.6 *Uma série diz-se* ***alternada*** *se os seus termos são alternadamente positivos e negativos. Supondo que o primeiro termo é positivo podemos escrevê-la na forma*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n, \quad u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Existe um critério bastante simples que, quando aplicável, permite rapidamente concluir a convergência duma série alternada.

Proposição 2.5 ***(Critério de Leibniz)*** *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ *uma série alternada. Se a sucessão* (u_n) *for uma sucessão decrescente, com limite zero, então a série é convergente.*

Demonstração. Vamos considerar a sucessão das somas parciais (S_n) associada à série, e duas subsucessões, cujos termos incluem a totalidade dos termos de (S_n): a subsucessão dos termos de ordem par

$$(S_{2n}) = (S_2, S_4, S_6, S_8, ...)$$

e a subsucessão dos termos de ordem ímpar,

$$(S_{2n-1}) = (S_1, S_3, S_5, S_7, ...).$$

Verifiquemos que a subsucessão dos termos de ordem par é uma subsucessão crescente.

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= (-1)^2u_1 + (-1)^3u_2 + ... + (-1)^{2n}u_{2n-1} + (-1)^{2n+1}u_{2n},\\
S_{2(n+1)} = S_{2n+2} &= (-1)^2u_1 + (-1)^3u_2 + ... + (-1)^{2n}u_{2n-1} + (-1)^{2n+1}u_{2n}+\\
&\quad +(-1)^{2n+2}u_{2n+1} + (-1)^{2n+3}u_{2n+2},\\
S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2}u_{2n+1} + (-1)^{2n+3}u_{2n+2} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geq 0
\end{aligned}$$

Então, como a sucessão (u_n) é uma sucessão decrescente, podemos concluir que

$$S_{2n+2} \geq S_{2n}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, a subsucessão dos termos de ordem par é uma subsucessão crescente.

Mas por outro lado,

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_1 &= (u_1 - u_2 + u_3 - ... + u_{2n-1} - u_{2n}) - u_1 \\ &= \underbrace{(-u_2 + u_3)}_{\leq 0} + ... + \underbrace{(-u_{2n-2} + u_{2n-1})}_{\leq 0} + \underbrace{(-u_{2n})}_{\leq 0} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Então a subsucessão dos termos de ordem par é majorada. Como é majorada e crescente é convergente para um limite real **a**.

De forma perfeitamente análoga, se provaria que a subsucessão (S_{2n+1}) dos termos de ordem ímpar é decrescente e minorada logo convergente para um limite real **b**.

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) &= b - a \ \text{ e} \\ \lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) &= \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Destas duas igualdades podemos concluir que $b - a = 0$, ou seja $b = a$. Como as duas subsucessões (de termos pares e ímpares) cobrem todos os termos da sucessão (S_n), o facto de convergirem para o mesmo limite $b = a$ significa que a própria sucessão converge para esse limite. Logo a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é convergente. ■

Exemplo 2.28 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

que se designa ***série harmónica alternada****.*

Trata-se duma série alternada, em que a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$*, é uma sucessão decrescente e de limite zero:* $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$*. Então, por este critério, a série harmónica alternada é convergente.*

Exemplo 2.29 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{-3}} = 1 - 8 + 27 - ...$$

é uma série alternada. Mas a sucessão de termo geral $(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^{-3}} = (-1)^{n+1}n^3$ *não converge para zero, é uma sucessão divergente, logo a série é divergente.*

Exemplo 2.30 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Trata-se duma série alternada. Vamos estudar os diferentes casos:

Se $\alpha \leq 0$	*a série diverge porque o seu termo geral não tende para zero.*
Se $\alpha > 0$	*a série é convergente, pelo critério de Leibniz, porque a sucessão de termo geral* $\frac{1}{n^{\alpha}}$ *é decrescente, de termos positivos e* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0$.

Quando consideramos uma série alternada nas condições do critério de Leibniz, mesmo não conseguindo determinar o valor exacto do resto de uma certa ordem, r_p, obtemos uma majoração para o seu valor absoluto.

Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n, \;\; u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

uma série alternada nas condições do critério de Leibniz. Então

$$|r_p| \leq u_{p+1.}$$

2.6 Convergência absoluta

Dada uma qualquer série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, define-se uma nova série, que será bastante importante no estudo que se segue, a **série dos módulos**, dada por:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + ...$$

Definição 2.7 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *diz-se absolutamente convergente se a série doa módulos* $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ *é convergente. Uma série convergente, que não seja absolutamente convergente, diz-se simplesmente convergente.*

Exemplo 2.31 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$$

A série dos módulos é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

que é uma série de Dirichlet convergente. Então se a série dos módulos converge dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ *é absolutamente convergente.*

Exemplo 2.32 *Considere a série harmónica alternada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

que é uma série convergente.

A série dos módulos é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

harmónica que é divergente. Logo a série é convergente mas não é absolutamente convergente. Neste caso dizemos que a série harmónica alternada é simplesmente convergente.

O teorema seguinte mostra a importância da convergência absoluta.

Teorema 2.7 *Uma série absolutamente convergente é convergente.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente.}$$

Demonstração. A demonstração baseia-se numa série auxiliar, cujo termo geral é dado por:

$$\begin{aligned} v_n = u_n + |u_n| &= \begin{cases} u_n + u_n & \text{se } u_n \geq 0 \\ u_n - u_n & \text{se } u_n < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2u_n = 2|u_n| & \text{se } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } u_n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por construção, o termo geral v_n verifica a dupla desigualdade:

$$0 \leq v_n \leq 2|u_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, utilizando a hipótese da convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e as propriedades de séries já conhecidas, tem-se que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 2|u_n| \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ é convergente}$$

sendo a última implicação resulatante do primeiro critério de comparação.

Mas, pela própria definição do termo geral v_n, tem-se:

$$v_n = u_n + |u_n| \Longleftrightarrow u_n = v_n - |u_n|\,.$$

Logo, pelas propriedades operatórias das séries,

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| & \text{convergente} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n & \text{convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente.}$$

■

Nota 2.4 *Como a série dos módulos é, por definição, uma série de termos não negativos, podemos utilizar todos os critérios apresentados na secção das séries de termos não negativos, para identificar a natureza desta série.*

Exemplo 2.33 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2},$$

que é uma série com uma infinidade de termos positivos e negativos. A respectiva série dos módulos é dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$. *Mas, verifica-se a desigualdade*

$$\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| = \frac{|\cos(n)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, pelo primeiro critério de comparação, tem-se que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(n)|}{n^2} \text{ é convergente.}$$

Assim a série dos módulos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$ *é convergente, logo a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ *é absolutamete convergente e, como tal, convergente.*

Muitos problemas nos diferentes ramos do conhecimento podem ser expressos e resolvidos através da teoria de séries. Enunciamos dois deles.

1) O interesse pelos números primos vem desde Euclides, 300 A.C. onde prova que existe um número infinito de números primos. Euler, dois mil anos depois apresenta uma prova, com a teoria de séries, onde mostra que

Proposição 2.6 *Existe um número infinito de números primos inteiros.*

Como consequência de muitos resultados mais ou menos célebres, estudando números primos Riemann apresentou uma famosa conjectura, utilizando a não menos célebre função zeta, ζ, que se tornou num dos mais importantes problemas em matemática e que normalmente é conhecida pelo nome de hipótese de Riemann.

Conjectura 2.1 *(Hipótese de Riemann): Se z é um número complexo tal que $\zeta(z) = 0$, então a parte real de z é $\frac{1}{2}$.*

2.7 Exercícios propostos

1) Utilizando a definição de convergência de uma série, determine a natureza das séries seguintes e, sempre que possível, calcule a sua soma:

$a)$ $2+4+6+8+...;$ $b)$ $2-2+2-2+2-...;$ $c)$ $7+\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+...;$

$d)$ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-...+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+...;$ $e)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{6}{5^{n-2}};$ $f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n};$

$g)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2};$ $h)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right);$ $i)$ $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+...;$

$j)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\left(n+2\right)}};$ $l)$ $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2}{4n^2-1}.$

2) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ uma série convergente de soma S. Indique, justificando, os limites das sucessões de termos gerais:

$$U_k=\sum_{n=1}^{2k}u_n \qquad \text{e} \qquad V_k=\sum_{n=k+1}^{2k}u_n.$$

3) Diga qual a natureza e determine o termo geral de uma série cuja sucessão das somas parciais é

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

4)

$a)$ Calcule o resto de ordem 100 da série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2+n}.$

$b)$ Determine uma ordem a partir da qual, o erro que se comete ao tomar para valor da soma da série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{\left(n+1\right)^2}$ a sua soma parcial, não exceda $0,1$.

5) Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

$a)$ A soma de duas séries divergentes é divergente;
$b)$ A soma de uma série convergente com uma série divergente é uma série divergente;
$c)$ Se $a_n\to0$, então a série $\sum a_n$ é convergente;
$d)$ As séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ e $\displaystyle\sum_{n\geqslant100}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ são da mesma natureza.

6) Prove que se a série de termos não negativos $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e se $p > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^p$ também converge.

7) Determine a natureza das séries de termos não negativos cujos termos gerais são:

a) $1 + (-1)^n \dfrac{1}{2^n}$; *b)* $\dfrac{|\mathrm{sen}\, n|}{n^2}$; *c)* $\cos \frac{1}{n}$;

d) $\dfrac{n+1}{n^3 - n + 2}$; *e)* $\dfrac{1}{\sqrt{n\,(n+2)}}$; *f)* $\dfrac{\log\ n}{n}$;

g) $\dfrac{1}{n\ \log\ n}$; *h)* $\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n+1)}{3 \times 6 \times 9 \times \times ... \times (3n+3)}$; *i)* $\dfrac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}}{4^n}$;

j) $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}\, n - 1}{3n+1}\right)^n$; *l)* $\dfrac{2^n n!}{n^n}$.

8) Seja (a_n) uma sucessão de números reais não nulos tais que a sucessão $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é uma sucessão constante. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série geométrica.

9) Determine, em função de $\alpha \in \mathbb{R}$, a natureza da série de termo geral $\log\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

10) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos com limite $+\infty$. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

é divergente e que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)$$

é convergente.

11) Indique quais das seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};\qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^3+1};\qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^4}{n^4+1};$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n+1)};\qquad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-3}{n}\right)^n;\qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(1+\operatorname{sen}x)^n.$$

12) Prove que se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n^2$ é convergente. Mostre que a proposição recíproca é falsa.

13) Mostre que

$$a)\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)}=\frac{1}{4};\qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n\,(n+1)}=1.$$

14) Estude, quanto à convergência, as seguintes séries:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+1};\qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log\ n}{n^2\sqrt{n+1}};\qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{n^5+3};$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n^2+1};\qquad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}};\qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-(2n+1)};$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(n\operatorname{sen}\tfrac{1}{n}-(n+2)\operatorname{sen}\tfrac{1}{n+2}\right).$$

15) Indique quais das seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{n^2},\ \text{com}\ \alpha\in\mathbb{R};\qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+n^2};$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{3+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right)^n;\qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

16) Determine os valores de $p\in\mathbb{R}$ para os quais as seguintes séries são convergentes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}n^p\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right);$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{sen}\tfrac{1}{n}\right)^p.$$

17) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente para $a \in \mathbb{R}$. Sendo $p \in \mathbb{N}$, mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p})$$

é convergente e calcule a sua soma.

18) Determine os valores do número real α para os quais a série:

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n (n+1)^{-\alpha}$$

$a)$ é simplesmente convergente;

$b)$ é absolutamente convergente.

19) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos e (b_n) uma sucessão limitada.

$a)$ Mostre que a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ implica a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$;

$b)$ Use o resultado anterior para provar que se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

então também converge a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.

$c)$ Mostre, por meio dum contraexemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

2.7.1 Soluções dos exercícios

1) a) Divergente; b) Divergente; c) Convergente, $S = \dfrac{70}{9}$; d) Convergente, $S = \dfrac{2}{3}$; e) Convergente, $S = \dfrac{15}{2}$; f) Convergente, $S = \dfrac{7}{3}$; g) Convergente; h) Divergente; i) Convergente, $S = \dfrac{1}{2}$; j) Convergente, $S = 1$; l) Convergente, $S = \dfrac{1}{5}$.

2) $\lim_{n\to+\infty} U_k = S$, $\lim_{n\to+\infty} V_k = 0$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, convergente.

4) a) $\dfrac{1}{101}$; b) 9.

5) a) F; b) V; c) F; d) V.

7) a) Divergente. b) Convergente. c) Divergente. d) Convergente. e) Divergente. f) Divergente. g) Divergente. h) Convergente. i) Convergente. j) Convergente. l) Convergente.

9) Convergente(absolutamente) se $\alpha > 1$; divergente se $\alpha \leq 1$.

11) a) Simplesmente convergente. b) Absolutamente convergente. c) Divergente. d) Absolutamente convergente. e) Absolutamente convergente. f) Absolutamente convergente se $x \in](2k-1)\pi, 2k\pi[$, divergente nos restantes casos

14) a) Divergente. b) Convergente. c) Convergente. d) Divergente. e) Convergente. f) Convergente. g) Convergente.

15) a) Absolutamente convergente. b) Divergente. c) Divergente. d) Simplesmente convergente.

16) a) $p < -\dfrac{1}{2}$; b) $p > 1$.

17) $S = a_1 + a_2 + ... + a_p - a$.

18) a) $0 < \alpha \leq 1$, b) $\alpha > 1$.

19) c) Basta considerar $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

CAPÍTULO 3

Funções reais de variável real

Para realçar a importância da entidade matemática, que iremos estudar neste capítulo - uma função - nada melhor que transcrever algumas passagens do livro, da nossa bibliografia, do grande matemático português Bento de Jesus Caraça, onde por sua vez, um outro grande homem do conhecimento, Leonardo da Vinci, é citado. Bento de Jesus Caraça esboça historicamente o caminho do conceito de função.

"... Veja bem o leitor o que há de importante nesta nova relação-tradução de leis analíticas em leis geométricas...";" ...Nesta unificação, realizada de há três séculos para cá, reside um dos factos mais dramáticos, mais importantes e mais profundos da história do Conhecimento..."; "...o facto de ser o próprio conceito de função, instrumento do estudo das correspondências que vai agora servir de elemento definidor dessa nova correspondência, de motivo de unificação dos dois campos...","...Foi um homem extraordinário, a quem nada parece ter sido alheio das preocupações dominantes no seu tempo, do domínio da Técnica ao da Ciência, da Filosofia e das Artes - Leonardo da Vinci - quem deu essa formulação precisa...", escreve Leonardo*: "...Dizem ser mecânico aquele conhecimento que sai da Esperiência, e científico o que nasce da Razão, e semi-mecânico o que nasce na Ciência e acaba nas operações manuais...",* continua Leonardo*: "...Nenhuma investigação merece o nome de Ciência se não passa pela demonstração matemática...";"...nenhuma certeza existe onde não se pode aplicar um ramo das ciências matemática ou se não pode ligar essas ciências..."* Estes textos são extractos do seu livro*: "Tratado de Pintura*".

Como um termo matemático, "função", foi introduzido por Leibniz em 1694, para descrever quantidades relacionadas com uma curva tais como a inclinação da curva ou um ponto específico dessa curva. Funções relacionadas com curvas são actualmente chamadas funções diferenciáveis, tema do nosso próximo capítulo. A palavra função foi posteriormente usada por Euler em meados do século XVIII para descrever uma expressão envolvendo vários argumentos; i.e. $y = F(x)$. Ampliando esta definição os matemáticos foram capazes de estudar "estranhos" objectos matemáticos tais como funções que não são diferenciáveis em qualquer dos seus pontos. Tais funções, inicialmente tidas como puramente imaginárias e chamadas genericamente de "monstros", foram, já no final do século XX, identificadas como importantes para a construção de muitos modelos físicos.

No século XIX Weierstrass defendia que se construísse o cálculo infinitesimal utilizando a Aritmética e não a Geometria, o que favorecia a definição de Euler relativamente à definição de Leibniz. Já no final do século, o desenvolvimento da formalização de toda a Matemática começou a utilizar como forte ferramenta a Teoria dos conjuntos. É nesta sequência que Dirichlet cria a moderna definição "formal" de função.

3.1 Generalidades

Vamos agora estudar funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}$, i.e.,

$$\begin{aligned} f: \ & D \subset \mathbb{R} && \to \mathbb{R} \\ & x && \to f(x). \end{aligned}$$

O conjunto $D \subset \mathbb{R}$ onde a função f está definida é designado por **domínio** de f. O **contradomínio** de f é o conjunto

$$D' = f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \ \text{ para algum } \ x \in D\}.$$

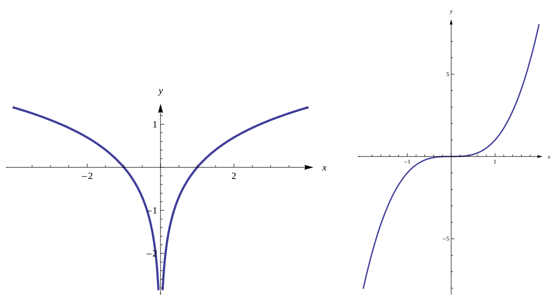
Definição 3.1 *Uma função f, diz-se **minorada**, **majorada** ou **limitada**, se o seu contradomínio $f(D) = D'$ for um conjunto minorado, majorado ou limitado. Escrito de uma outra forma, uma função f, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, diz-se **limitada** se*

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq L, \quad \forall x \in D.$$

O **gráfico** de uma função f é o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\text{gráfico de } f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D \ \text{ e } \ y = f(x)\right\}.$$

Tabela 3.1: Gráficos duma função par e duma função ímpar.



Definição 3.2 *Uma função f, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, diz-se:*

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{par}} & \textit{se} & f(x) = f(-x), \quad \forall x \in D, \\ \textbf{\textit{ímpar}} & \textit{se} & f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in D. \end{array}$$

Observemos que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos yy enquanto o gráfico de uma função ímpar (ver tabela 3.1) é simétrico relativamente à origem dos eixos.

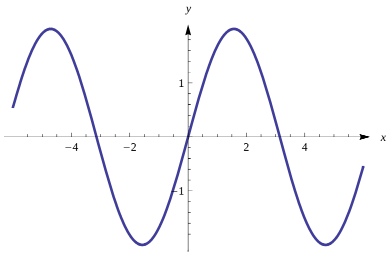
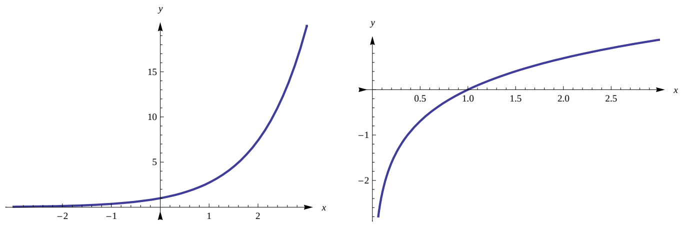


Figura 3.1: Função periódica.

Definição 3.3 *Uma função f, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, diz-se:*

crescente	*se* $x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y), \quad \forall x, y \in D,$
decrescente	*se* $x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y), \quad \forall x, y \in D,$
estritamente crescente	*se* $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y), \quad \forall x, y \in D,$
estritamente decrescente	*se* $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y), \quad \forall x, y \in D,$
monótona	*se é crescente ou decrescente e*
estritamente monótona	*se é est. crescente ou est. decrescente.*

Tabela 3.2: Gráficos da função $f(x) = e^x$ para $-4 \leq x \leq 2$ e da função $f(x) = \log x$ para $0 < x \leq 3$



Consideremos as funções $f(x) = e^x$ e $f(x) = \log x$ (ver tabela 3.2) que são ambas estritamentes crescentes nos respectivos domínios.

Definição 3.4 *Uma função f, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, (ver fig.3.1) diz-se:*

periódica *com período $T > 0$* *se* $f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D.$

Definição 3.5 *Chamam-se zeros da função f, os elementos x do domínio tais que $f(x) = 0$.*

Definição 3.6 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $A \subset D$. A* ***restrição*** *de f a A, designada por $f_{|A}$ é a aplicação de A em $\mathbb{R}$ tal que $f_{|A}(x) = f(x)$ para cada $x \in A$.*

Definição 3.7 *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ diz-se:*

injectiva	*se* $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y), \quad \forall x, y \in D,$
sobrejectiva	*se* $\forall y \in B, \quad \exists x \in D : f(x) = y,$
bijectiva	*se é injectiva e sobrejectiva.*

A injectividade (ou não injectividade) duma função é visível no seu gráfico (ver tabela 3.3). Uma função é injectiva se e só se nenhuma recta horizontal (de equação $y = k$) intersectar o seu gráfico em mais do que um ponto.

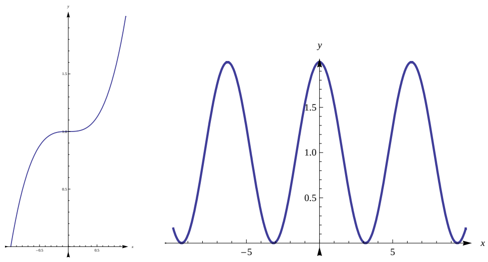


Tabela 3.3: Gráficos duma função injectiva e duma função que não é injectiva.

Definição 3.8 *Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to f(D_f)$ uma função injectiva. A sua* ***função inversa*** *é definida como a função*

$$\begin{aligned} f^{-1} : D_{f^{-1}} = f(D_f) \subset \ & \mathbb{R} \to D_f \subset \mathbb{R} \\ & y \to f^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

onde $x \in D_f$ é o único ponto do domínio de f tal que $f(x) = y$.

O conceito de função inversa é fácil de visualizar através duma representação gráfica como podemos observar na figura 3.2.

Dado o gráfico duma função invertível f, o gráfico da sua inversa f^{-1} é simétrico ao gráfico de f, relativamente à recta $y = x$. Podemos observar os casos da função $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \log x$ na figura 3.3.

Nota 3.1 *Dada uma função injectiva $f(x)$ é importante não confundir a notação da função inversa $f^{-1}(x)$ com o inverso multiplicativo $\dfrac{1}{f(x)}$.*

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, é estritamente crescente em todo o seu domínio, logo é injectiva e o seu contradomínio é $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tem assim inversa f^{-1} definida em todo o $\mathbb{R}$, que é a função raiz cúbica:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na figura 3.4.

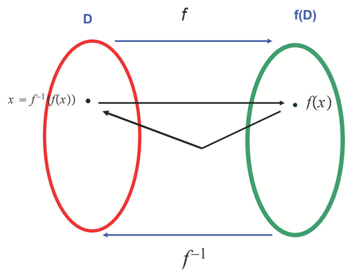


Figura 3.2: Função inversa.

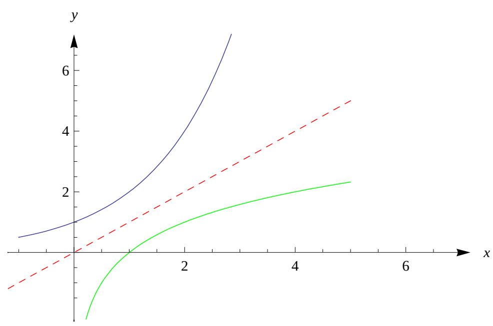


Figura 3.3: Gráficos das funções $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \log x$.

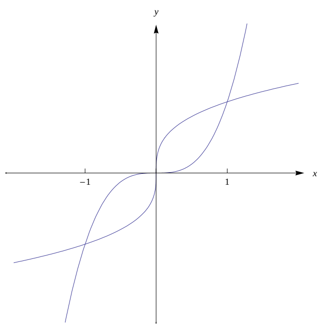


Figura 3.4: Gráfico da função $f(x) = x^3$ e da sua inversa.

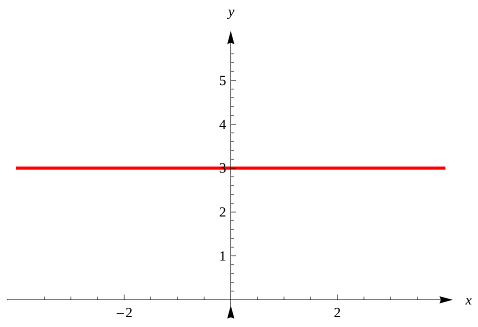


Figura 3.5: Gráfico da função constante $f(x) = 3$.

3.2 Exemplos importantes

Apresentamos nesta secção vários exemplos de funções elementares já vossas conhecidas, mas que convém recordar.

3.2.1 Funções polinomiais

Exemplo 3.1 ***Funções polinomiais*** *são funções com expressão analítica dada por um polinómio, i.e., funções da forma*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \quad \textit{com} \;\; c_0, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

O domínio de qualquer uma destas funções é $D = \mathbb{R}$.

Quando uma função polinomial tem grau ímpar o seu contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$, enquanto que quando uma função polinomial tem grau par o seu contradomínio é um intervalo da forma $[m, +\infty[$ ou $]-\infty, M]$, com $m, M \in \mathbb{R}$.

Consideremos alguns casos particulares de funções polinomiais:

Exemplo 3.2 ***Função constante****: quando $n = 0$, (ver fig. **??**) polinómio de grau zero,*

$$f(x) = a$$

Exemplo 3.3 ***Função afim****: quando $n = 1$, (ver fig. 3.6) polinómio de grau 1,*

$$f(x) = ax + b, \quad \textit{com} \;\; a \neq 0$$

O grau do polinómio é ímpar o domínio e o contradomínio $D = D' = \mathbb{R}$.

Exemplo 3.4 ***Função cúbica****: quando $n = 3$, (ver fig. 3.7) polinómio de grau 3,*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \textit{com} \;\; a \neq 0$$

Como o grau do polinómio é ímpar o domínio e o contradomínio $D = D' = \mathbb{R}$.

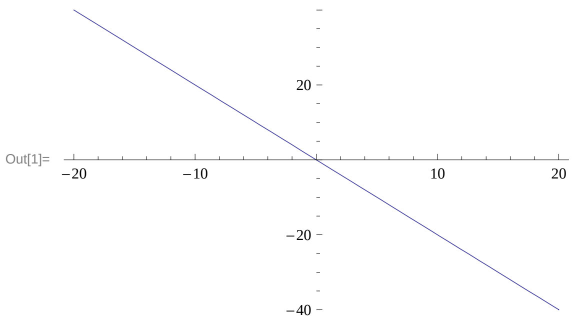


Figura 3.6: Gráfico da função afim $f(x) = 3x - 2$.

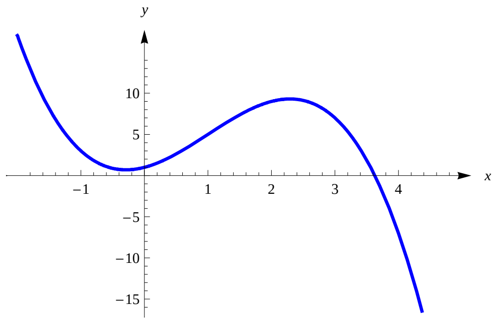


Figura 3.7: Gráfico da função cúbica $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x + 1$.

3.2.2 Funções racionais

Exemplo 3.5 ***Funções racionais*** *são funções com expressão analítica dada pelo quociente de dois polinómios, i.e. funções da forma*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

Estas funções não estão definidas nos pontos em que o denominador se anula, pelo que o seu domínio é dado por

$$D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}.$$

Exemplo 3.6 *Um exemplo simples é a função definida por* $f(x) = \frac{1}{x}$, *cujo gráfico está representado na figura 3.8. Tanto o seu domínio como o seu contradomínio são* $D = D' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *É uma função ímpar e estritamente decrescente em* $(-\infty, 0)$ *e* $(0, +\infty)$.

As funções polinomiais são casos particulares das funções racionais mas, claro que podemos considerar funções racionais que não são funções polinomiais.

Exemplo 3.7 *Consideremos as funções*

$$f(x) = x^\alpha, \quad \textit{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Consoante o valor de α, f *é uma função polinomial ou não.*

Vejamos o gráfico desta função (fig.3.9) para vários valores de α.

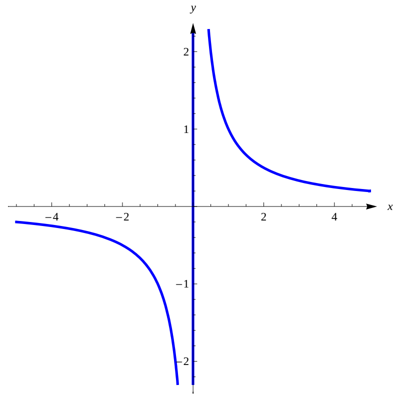


Figura 3.8: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

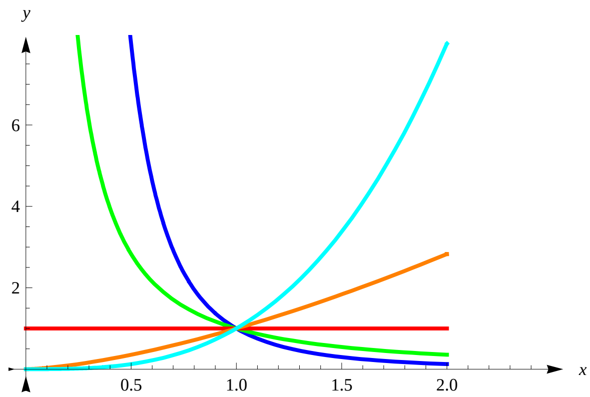


Figura 3.9: Gráficos das funções $f(x) = x^{\alpha}$ para $\alpha = -3, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 3$.

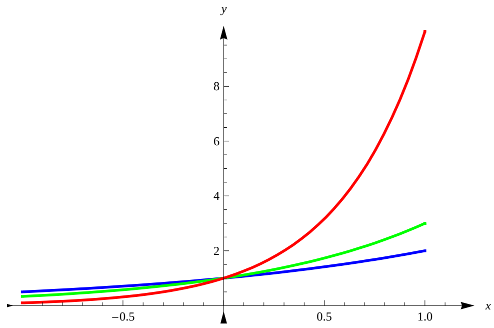


Figura 3.10: Gráfico da função $f(x) = a^x$ para $a = 2, 3, 10$..

3.2.3 Funções exponencial e logarítmica

Definição 3.9 *Sendo a um número positivo diferente de 1, chama-se* ***função exponencial*** *de base a, à função dada por*

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = a^x \end{aligned}$$

Na figura 3.10 estão representadas graficamente diversas funções exponenciais para diferentes valores de a.

O domínio da função exponencial é o conjunto de todos os números reais $D = \mathbb{R}$ e o contradomínio é o conjunto de todos os números reais positivos, $D' = \mathbb{R}^+$. A função exponencial é estritamente crescente em todo o seu domínio e é uma bijecção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$.

Podemos definir a função inversa da função exponencial, a função logaritmo.

Exemplo 3.8 *Seja $f(x) = a^x$ a função exponencial de base a $(a \neq 1)$. A função inversa de $f(x)$ designa-se por* ***função logaritmo*** *de base a e é definida por:*

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \to f^{-1}(x) = \log_a x \end{aligned}$$

Quando $a = e$ a função designa-se simplesmente por $\log x$ e este logaritmo designa-se por logaritmo neperiano.

O domínio desta função logaritmo é o conjunto $D = \mathbb{R}^+$.

Das definições anteriores resulta que

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$$

donde se pode concluir que se $y > 0$ e $a \neq 1$,

$$a^{\log_a y} = y$$

Recordamos algumas propriedades da função logaritmo.

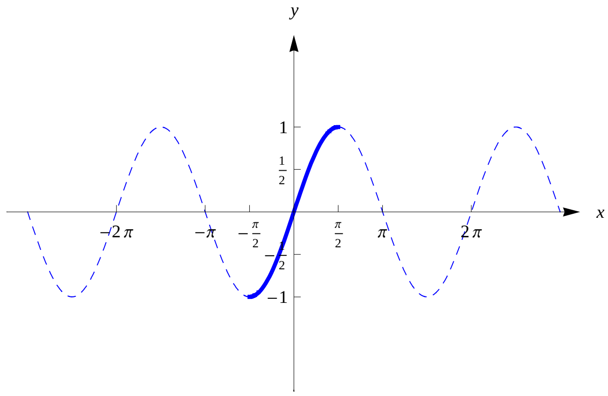


Figura 3.11: Gráfico da restrição da função *seno* ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposição 3.1 *Sendo a um número real positivo diferente de* 1 *tem-se que:*

1. $\log_a a = 1 \quad e \quad \log_a 1 = 0$

2. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

3. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

4. $\log_a x^b = b \log_a x, \quad \forall b \in \mathbb{R}.$

5. $\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{\log_a x}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

6. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$

3.2.4 Funções trigonométricas e as suas inversas

Exemplo 3.9 *A* ***função seno*** *define-se por*

$$\begin{aligned} seno: \quad & \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ & x \to \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}$ e o contradomínio é o intervalo $f(D) = D' = [-1, 1]$ (ver fig.3.11). Trata-se duma função ímpar e periódica de período 2π.

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quando se restringe a função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ obtém-se a chamada restrição principal. A função seno é estritamente crescente neste intervalo, logo injectiva, e sen $\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

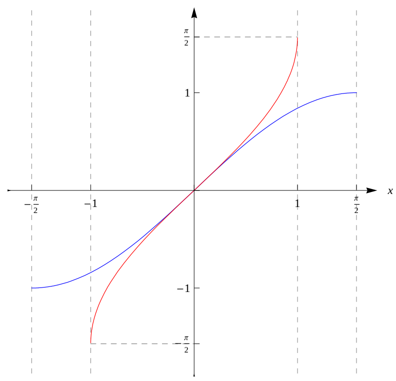


Figura 3.12: Gráficos da função *seno* e da sua inversa *arc seno*.

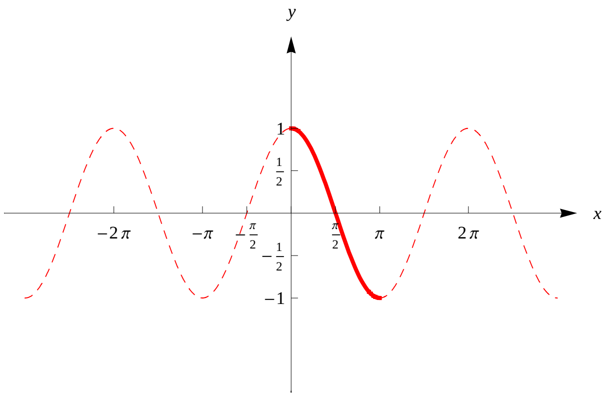


Figura 3.13: Gráfico da função *coseno*.

Exemplo 3.10 *A sua função inversa neste intervalo é a chamada **função arco seno**:*

$$\begin{aligned} \mathit{seno}^{-1} = \mathit{arco\ seno}: \quad & [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x \to \operatorname{arcsen} x. \end{aligned}$$

Os gráficos são apresentados na figura 3.12.

Exemplo 3.11 *A **função coseno** define-se por*

$$\begin{aligned} \mathit{coseno}: \quad & \mathbb{R} \to [-1,1] \\ & x \to \cos x \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}$ e o contradomínio é o intervalo $f(D) = D' = [-1,1]$. Trata-se duma função par e periódica de período 2π.

$$\cos x = \cos(-x) \qquad \text{e} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quando se restringe a função coseno ao intervalo $[0,\pi]$ obtém-se a chamada restrição principal. A função coseno é estritamente decrescente neste intervalo, logo injectiva, e $\cos([-0,\pi]) = [-1,1]$ (ver fig.3.13)

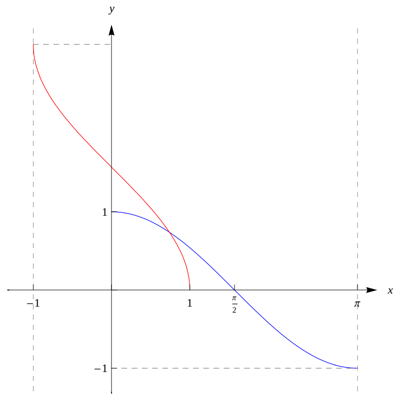


Figura 3.14: Gráficos das funções *coseno* e *arc coseno*.

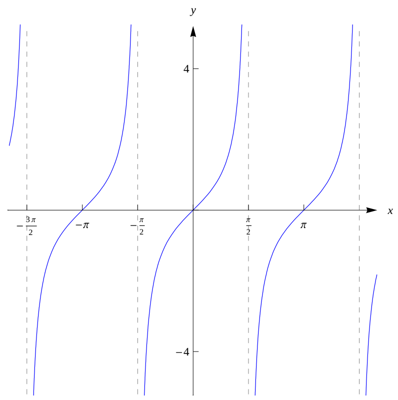


Figura 3.15: Gráfico da função *tangente*.

Exemplo 3.12 *A sua função inversa neste intervalo é a chamada* ***função arco coseno****:*

$$\begin{aligned} coseno^{-1} = arco\ coseno: \ & [-1,1] \rightarrow [-0,\pi] \\ & x \rightarrow \arccos x. \end{aligned}$$

Os gráficos são apresentados na figura 3.14.

A função tangente define-se pelo quociente entre a função seno e a função coseno.

Exemplo 3.13 *A* ***função tangente*** *define-se por:*

$$\begin{aligned} tangente: \ & D = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow tg(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. Trata-se duma função ímpar e periódica de período π.

$$tg\ x = -tg\ (-x) \qquad \text{e} \qquad tg\,(x+\pi) = tg\ x,\ \ \forall x \in D.$$

Uma vez que é periódica não é uma função injectiva em todo o seu domínio A sua restrição ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (a chamada restrição principal) é estritamente crescente, logo injectiva, e $tg\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$ (ver fig. 3.15).

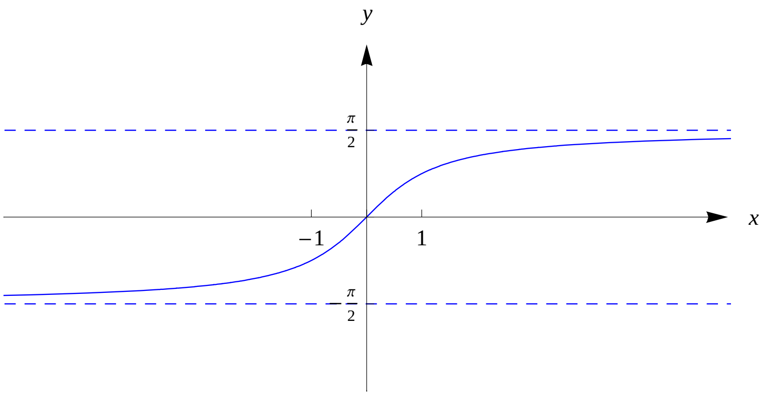


Figura 3.16: Gráfico da função *arco tangente*.

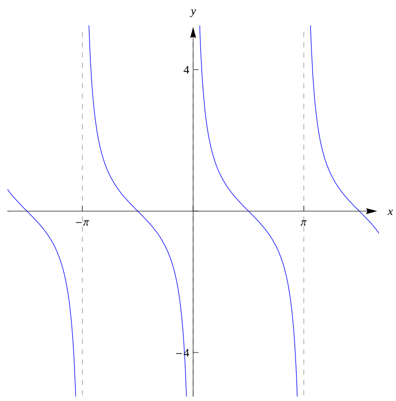


Figura 3.17: Gráfico da função co*tangente*.

Exemplo 3.14 *A sua função inversa, neste intervalo, é a chamada* ***função arco tangente****:*

$$\begin{aligned} tangente^{-1} = arco\ \tan gente: \ & \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x \to arctg\ x. \end{aligned}$$

O seu gráfico está representado na figura 3.16.

Exemplo 3.15 *A* ***função cotangente*** *é o inverso aritmético da tangente e define-se por:*

$$\begin{aligned} cotangente: \ & D = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ & x \to \cot g(x) = \frac{1}{tg\ x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ dado que esta função não está definida nos pontos em que o *seno* se anula. O contradomínio desta função é o conjunto $\mathbb{R}$ (ver fig.3.17). Tal como a *tangente*, trata-se duma função ímpar e periódica de período π.

$$cotg\ x = -\cot g\ (-x) \quad \text{ e } \quad cotg\,(x+\pi) = cotg\ x,\ \ \forall x \in D.$$

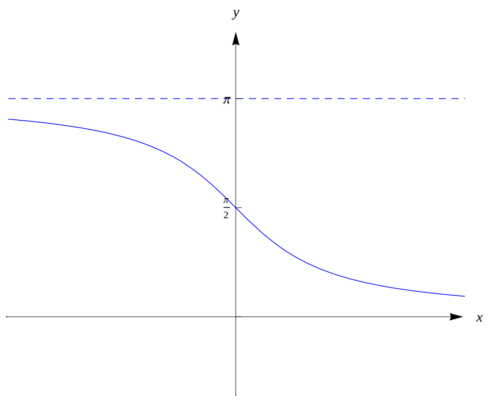


Figura 3.18: Gráfico da função *arco cotangente*.

Uma vez que é periódica não é uma função injectiva em todo o seu domínio. A sua restrição ao intervalo $]0, \pi[$ (a chamada restrição principal) é uma função injectiva.

Exemplo 3.16 *A sua função inversa neste intervalo é a chamada* ***função arco cotangente****:*

$$\begin{aligned} cotangente^{-1} = arco\ cotangente : \ & \mathbb{R} \to]0, \pi[\\ & x \to arc\ cotg\ x. \end{aligned}$$

3.2.5 Funções hiperbólicas

As funções seguintes são definidas a partir da função exponencial e, como o seu nome indica, têm uma relação directa com a hipérbole.

Exemplo 3.17 *A* ***função seno hiperbólico*** *define-se por*

$$\begin{aligned} seno\ hiperbólico : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Tem-se que o domínio e o contradomínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}$ (ver fig.3.19). Trata-se duma função ímpar.

$$\operatorname{senh} x = -\operatorname{senh}(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.18 *A* ***função coseno hiperbólico*** *define-se por*

$$\begin{aligned} coseno\ hiperbólico : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

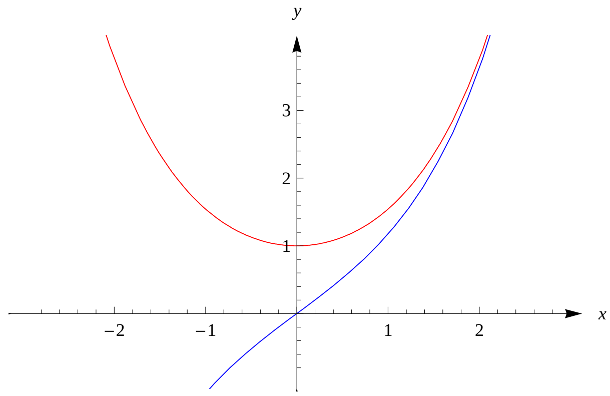


Figura 3.19: Gráficos das funções *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico*.

Tem-se que o domínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}$, e que o contradomínio é o intervalo $[1, +\infty)$ (ver fig.3.19). É uma função par:

$$\cosh x = \cosh(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estas funções satisfazem a seguinte relação fundamental

$$\cosh^2(x) - (\mathrm{senh}(x))^2 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.3 Definição de limite

A noção de limite demorou muito tempo a ser estabelecida na História da Matemática, aparecendo as primeiras definições aceitáveis apenas nos fins do século XVIII, princípios do século XIX. Entre os primeiros a apresentar uma definição satisfatória, contam-se o português Anastácio da Cunha e o francês Augustin-Louis- Cauchy.

No livro "Principios Mathematicos" (1790), José Anastácio da Cunha afirma:

I. Se uma expressão admitir mais de um valor, quando outra expressão admite um só, chamar-se-á esta constante, e aquela variável.

II. A variável que puder sempre admitir valor maior que qualquer grandeza que se proponha chamar-se-á infinita; e a variável que poder sempre admitir valor menor que qualquer grandeza que se proponha, chamar-se-á infinitésima.

No livro "Cours D'Analyse de L' École Royale Polytechnique: I-Analyse Algébrique" (1821) de Augustin-Louis Cauchy pode ler-se:

Chama-se quantidade variável aquela que se considera como devendo receber sucessivamente vários valores diferentes uns dos outros. Designa-se uma tal quantidade por uma letra tomada ordinariamente entre as últimas letras do alfabeto. Chama-se pelo contrário quantidade constante, e designa-se ordinariamente por uma das primeiras letras do alfabeto toda a quantidade que recebe um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de maneira a diferir dele tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite de todos os outros.

Para enunciar a definição de limite de uma função necessitamos de recordar alguns conceitos preliminares.

Definição 3.10 *Seja a um número real. Chama-se* ***vizinhança de*** **a**, *e representa-se por* $V_\delta(a)$, *ao conjunto de valores cuja distância a a é inferior a* δ:

$$V_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) \, .$$

Definição 3.11 *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *um conjunto. Um ponto* $a \in \mathbb{R}$ *diz-se um* ***ponto de acumulação*** *de A se em qualquer vizinhança de a existir pelo menos um elemento de A diferente de a. Chama-se* ***derivado*** *do conjunto A ao conjunto de pontos de acumulação de A que se denota por* A'

Observemos que um ponto de acumulação dum conjunto pode não pertencer ao próprio conjunto.

Exemplo 3.19 *Seja* $A = (b, c)$, *um intervalo aberto. Então o conjunto dos pontos de acumulação é o intervalo fechado* $A' = [b, c]$.

Exemplo 3.20 *Seja* $A = \{b\}$, *um conjunto singular. Então o conjunto dos pontos de acumulação é o conjunto vazio,* $A' = \varnothing$.

A noção de ponto de acumulação é bastante importante uma vez que só nos pontos de acumulação do domínio da função é que podemos definir limite de uma função.

Definição 3.12 ***(Segundo Cauchy)*** *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *a um ponto de acumulação do domínio de f e* $b \in \mathbb{R}$. *Diz-se que b é* ***limite*** *de f* ***no ponto*** *a (ou quando x tende para a), e escreve-se* $\lim_{x\to a} = b$, *se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D : 0 < |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Esta definição de limite também pode ser escrita, utilizando o conceito de vizinhanças, da seguinte forma:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D : x \in V_\varepsilon(a) \backslash \{a\} \Longrightarrow f(x) \in V_\delta(b)$$

Podemos interpretar graficamente este conceito (ver fig.3.20).

O matemático inglês G. H. Hardy, um apaixonado pelo criquete, o desporto nacional britânico, dizia que, para se entender bem a noção de limite, é preciso pensar numa competição entre um herói e um bandido. O herói tenta provar que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ enquanto que o bandido tenta provar o contrário. O bandido escolhe deltas (δ) à sua vontade enquanto o herói tenta encontrar épsilons (ε) de modo que para todo o x tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$ ele consiga ter que $|f(x) - b| < \delta$. O herói ganhará o jogo (e provará assim que $\lim_{x\to a} f(x) = b$) quando, para qualquer δ escolhido pelo bandido, conseguir encontrar sempre um ε nas condições pretendidas. O bandido ganhará, pelo contrário, quando conseguir encontrar um δ para o qual o herói não consiga encontrar um ε que satisfaça o pretendido.

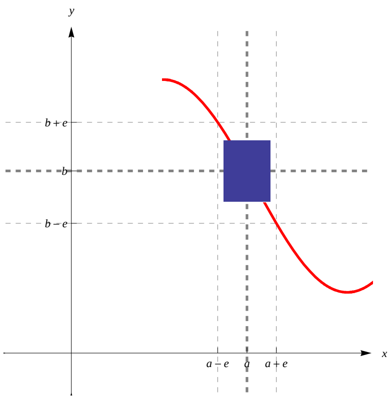


Figura 3.20: Interpretação geométrica de $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Exemplo 3.21 *Vamos mostrar, utilizando esta definição, que:*

$$\lim_{x\to 0}\left(x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

O domínio da função $f(x) = x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ *é* $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$*. Logo o ponto zero não pertence ao domínio da função mas é ponto de acumulação do domínio. É, portanto, legítimo analisar o limite da função neste ponto. O que se pretende mostrar é que*

$$\forall\delta>0\ \ \exists\varepsilon>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}: 0<|x-0|<\varepsilon \Longrightarrow \left|x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-0\right|<\delta$$

É imediato verificar que

$$\left|x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\,.\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Para garantir que a condição pretendida é verificada basta tomar $\varepsilon=\delta$*, ou seja,*

$$\forall\delta>0\ \ \exists\varepsilon=\delta>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}: 0<|x|<\varepsilon \Longrightarrow \left|x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|<\varepsilon=\delta.$$

No Ensino Secundário foi dada uma definição de limite de função recorrendo aos limites de sucessões. É costume designá-la por definição de limite segundo Heine, em homenagem ao matemático alemão Heinrich Eduard Heine (1821-1881). Esta definição faz a ponte entre os conceitos de limite em funções e em sucessões.

Esta definição reflecte duma forma mais sugestiva expressões usadas correntemente para descrever limites, como "*quando x tende para a, a função tende para b*".

Definição 3.13 *(**Segundo Heine**) Sejam* $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, a um ponto de acumulação do domínio de f e $b\in\mathbb{R}$. Diz-se que b é **limite** de f **no ponto** a (ou quando x tende para a) se para todas as sucessões (x_n) de termos no domínio de f, diferentes de a e convergentes para a, as correspondentes sucessões $(f(x_n))$ convergem para um mesmo valor, b, isto é,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{para toda a sucessão } (x_n) \text{ tal que } x_n\in D\setminus\{a\} \text{ e } \lim_{n\to+\infty} x_n = a \\ \Longrightarrow \text{ a correspondente sucessão } (f(x_n)) \text{ verifica } \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b. \end{cases}$$

É necessário garantir que estas duas definições, de limite de uma função num ponto, são equivalentes.

Teorema 3.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação do domínio de f e $b \in \mathbb{R}$. Então $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se, e só se, para toda a sucessão (x_n) tal que $x_n \in D\setminus\{a\}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ se verifica que para toda a correspondente sucessão $(f(x_n))$ verifica $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Hipóteses: $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $x_n \in D\setminus\{a\}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.

A provar: $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b$, i. é,

(?) $\forall\varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon$.

Seja então $\varepsilon > 0$ arbitrário.

(i)	Como $\lim_{x\to a} f(x) = b$	temos que $\exists\delta > 0 : (x \in D \text{ e } 0 < \lvert x-a\rvert < \delta) \Longrightarrow \lvert f(x) - b\rvert < \varepsilon$.
(ii)	Como $x_n \to a$	sabemos também que $\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \lvert x_n - a\rvert < \delta$.

Então, com $p \in \mathbb{N}$ dado por (ii) e para $n > p$, temos que

$$(x_n \in D\setminus\{a\} \text{ e } |x_n - a| < \delta) \Longrightarrow^{(i)} |f(x_n) - b| < \varepsilon.$$

Logo $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b$.

($\Longleftarrow$) Hipóteses: $(x_n \in D\setminus\{a\}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = a) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = b$.

A provar: $\lim_{x\to a} f(x) = b$, i. é,

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Suponhamos por absurdo que isto não era verdade. Teríamos então que

$$\exists\varepsilon > 0\ \ \forall\delta > 0\ \ \exists x \in D : 0 < |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - b| > \varepsilon.$$

Consideremos uma sucessão (δ_n) da forma $\delta_n = \frac{1}{n}$. Para cada δ_n existiria um $x_n \in D\setminus\{a\}$ tal que

$$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - b| > \varepsilon > 0.$$

Teríamos assim uma sucessão (x_n) com $x_n \in D\setminus\{a\}$ e $x_n \to a$ mas com $f(x_n) \nrightarrow b$. Isto é uma absurdo, pois contraria a hipótese. ■

Nota 3.2 *Em particular, se existirem sucessões (x_n) e (y_n), com $x_n, y_n \in D\setminus\{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ e $y_n \to a$ e $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) \neq \lim_{n\to+\infty}(f(y_n))$, então f não tem limite no ponto a.*

Exemplo 3.22 *Consideremos a função $f : D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

A função não está definida na origem mas 0 é ponto de acumulação do domínio. Verifiquemos que não existe o limite de f no ponto 0. Consideremos, por exemplo,

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \qquad e \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

temos que

$$\lim_{n\to+\infty} (f(x_n)) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

enquanto que

$$\lim_{n\to+\infty} (f(y_n)) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} (-1) = -1.$$

Logo não existe limite de f no ponto 0.

Usando o teorema anterior, as propriedades seguintes são consequência imediata das correspondentes propriedades do limite de sucessões especificadas no Cap.2 destas Notas.

Teorema 3.2 *(**Unicidade do limite**) O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.*

Teorema 3.3 *(**Operações Algébricas**) Sejam*

$$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ e \ g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

funções tais que a é ponto de acumulação do conjunto $D_f \cap D_g$, $b, c \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

Então:

(i) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b + c.$

(ii) $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = b - c.$

(iii) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$

(iv) *se $c \neq 0$ e se $g(x) \neq 0,\ \forall x \in D_f \cap D_g$,* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}.$

Teorema 3.4 *(**Limite da função composta**) Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real. A função composta $(f \circ g)$ é definida por*

$$\begin{array}{llll} (f \circ g): & D_{f \circ g} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & (f \circ g)(x) =^{def} f(g(x)), \end{array}$$

onde $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \ \text{ e } g(x) \in D_f\}$. Se a é ponto de acumulação de $D_{f \circ g}$,

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \qquad e \qquad \lim_{y \to b} f(x) = c$$

então

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = c.$$

Teorema 3.5 *(**Limite duma função enquadrada**) Sejam $f, g, h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções reais de variável real, a ponto de acumulação de D e $b \in \mathbb{R}$. Se, para todo o $x \in D \backslash \{a\}$,*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

e,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = b.$$

Demonstração. Como $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$ tem-se que:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \to a} f(x) = b & \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_f > 0 \ \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta_f \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \\ \lim_{x \to a} h(x) = b & \Longleftrightarrow & \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_h > 0 \ \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta_h \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \end{array}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}$, sabemos que para qualquer ε,

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} |f(x) - b| < \varepsilon & \Longleftrightarrow & b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \\ |h(x) - b| < \varepsilon & \Longleftrightarrow & b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon \end{array} \right.$$

Mas $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo o $x \in D \backslash \{a\}$, logo

$$b - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < b + \varepsilon, \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta.$$

Então, podemos concluir que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |g(x) - b| < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to a} g(x) = b.$$

■

Nota 3.3 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções reais de variável real e a ponto de acumulação de D. Se f for uma função limitada numa vizinhança de a e se $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.*

3.3.1 Limites infinitos

O conceito de limite de uma função num ponto anteriormente enunciado pode ser estendido em dois sentidos: limite de uma função quando "*a variável tende para infinito*" e "*limite infinito*" da função.

Definição 3.14 *Seja f uma função real com domínio D contendo um intervalo da forma $(a, +\infty)$. Diz-se que f* ***tem limite*** *b* ***quando*** *x* ***tende para*** *$+\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, quando*

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists M > a \ \textit{tal que} \ \forall x \in D \ \textit{e} \ x > M \implies |f(x) - b| < \delta.$$

Exemplo 3.23 *Vamos mostrar, utilizando esta definição, que:*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x\right) = 0.$$

O que se pretende mostrar é que

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists M > 0 \ \textit{tal que} \ x > M \Longrightarrow \left|\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x - 0\right| < \delta$$

De facto, tem-se que

$$\left|\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x - 0\right| = \left|\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x\right| = \left|\frac{1}{x}\right|.\,|\operatorname{sen} x| \leq \left|\frac{1}{x}\right|, \quad \forall x \in D_f.$$

Nesse caso, tem-se, para qualquer $\delta > 0$, que

$$\textit{se} \ \ |x| > M = \frac{1}{\delta} \ \ \textit{então} \ \ \left|\frac{1}{x}.\operatorname{sen} x - 0\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| < \delta.$$

Esta constante M está bem definida para qualquer $\delta > 0$, pelo que está verificada a condição pretendida.

Podemos ilustrar esta situação através do gráfico (ver fig.3.21) da função $f(x) = \frac{1}{x}.\operatorname{sen} x$.

De uma forma análoga podemos adaptar esta definição para o caso em que f **tem limite** b **quando** x **tende para** $-\infty$.

Definição 3.15 *Seja f uma função real com domínio D contendo um intervalo da forma $(-\infty, a)$. Diz-se que f* ***tem limite*** *b* ***quando*** *x* ***tende para*** *$+\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, quando*

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists M < a \ \textit{tal que} \ \forall x \in D \ \textit{e} \ x < M \implies |f(x) - b| < \delta.$$

Consideramos, agora, a situação em que o limite da função possa ser $+\infty$ ou $-\infty$.

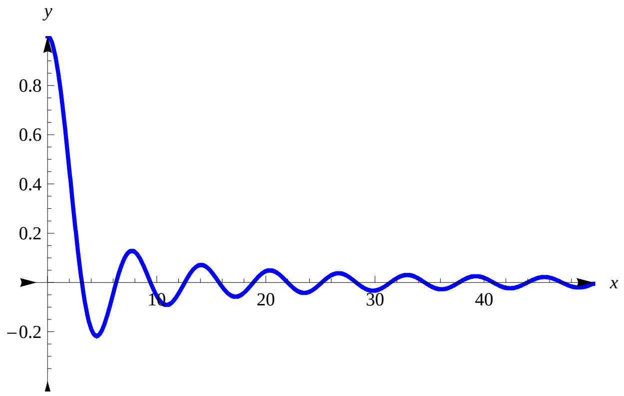


Figura 3.21: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}.\operatorname{sen} x$.

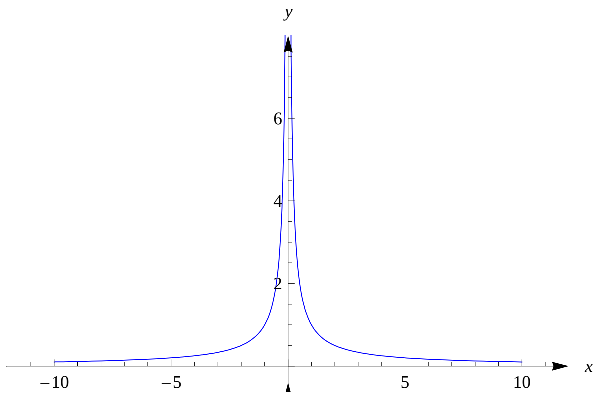


Figura 3.22: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ para $-5 \leq x \leq 5$.

Definição 3.16 *(i) Diz-se que o* ***limite de*** f ***em*** a *(sendo a ponto de acumulação do domínio de D de f)* ***é*** $+\infty$*, e escreve-se* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$*, quando*

$$\forall M > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall x \in D \text{ e } 0 < |x-a| < \epsilon \Longrightarrow \; f(x) > M.$$

(ii) Diz-se que o ***limite de*** f ***em*** a *(sendo a ponto de acumulação do domínio de D de f)* ***é*** $-\infty$*, e escreve-se* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$*, quando*

$$\forall M > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall x \in D \text{ e } 0 < |x-a| < \epsilon \Longrightarrow \; f(x) < M.$$

Exemplo 3.24 *Consideremos a função*

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to \mathbb{R} \\ & x & \to f(x) = \dfrac{1}{|x|}. \end{array}$$

Tem-se que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$*. Este caso está representado na figura 3.22.*

3.3.2 Limites Relativos e Laterais

Definição 3.17 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subset D$ e a um ponto de acumulação do conjunto A. Chama-se* ***limite*** *de f no ponto a* ***relativo*** *ao conjunto A, e escreve-se* $\lim_{x\to a, x\in A} f(x)$ *o limite em a da restrição $f_{|A}$. Ou seja,*

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = \lim_{x\to a} \left(f_{|A}\right)(x).$$

Dois casos particulares desta definição são bem conhecidos desde o Ensino Secundário.

Definição 3.18 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subset D$ e a um ponto de acumulação do conjunto A.*

1. *Sendo $A = (a, +\infty) \cap D$, chama-se* ***limite lateral direito*** *ao limite relativo a A e representa-se por* $\lim_{x\to a^+} f(x)$
2. *Sendo $A = (-\infty, a) \cap D$, chama-se* ***limite lateral esquerdo*** *ao limite relativo a A e representa-se por* $\lim_{x\to a^-} f(x)$

Em termos simbólicos podemos escrever da seguinte forma:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b \iff \forall\delta > 0 \;\; \exists\varepsilon > 0 : a < x < a + \varepsilon \implies |f(x) - b| < \delta \;\; (\text{com } x \in D)$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \iff \forall\delta > 0 \;\; \exists\varepsilon > 0 : a - \varepsilon < x < a \implies |f(x) - b| < \delta \;\; (\text{com } x \in D)$$

Exemplo 3.25 *Consideremos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ 1, & se\ x \geq 0. \end{cases}$$

Os limites laterais no ponto zero são:

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0.$$

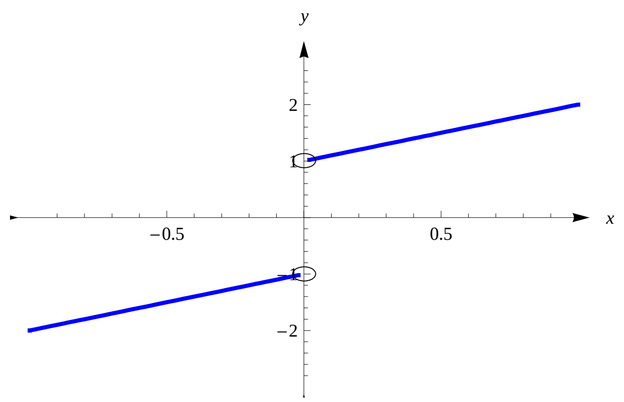


Figura 3.23: Gráfico da função $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

Exemplo 3.26 *Consideremos a função* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *(ver figura 3.23) definida por:*

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = x + \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

Os limites laterais no ponto zero são:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1.$$

Para pontos em que seja legítimo admitir a existência dos dois tipos de limite lateral, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 3.6 *Seja f uma função definida numa vizinhança de um ponto a. Então, existe limite de f em a se e só se existirem e forem iguais ambos os limites laterais de f nesse ponto.*

No exemplo anterior os limites laterais no ponto $x = 0$ da função $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ existem, mas não são iguais, logo não existe limite da função nesse ponto.

3.4 Funções contínuas num ponto

A continuidade é uma propriedade importante no estudo de uma função.

Definição 3.19 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que f é uma* ***função contínua no ponto*** *a, se*

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in D : |x-a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

ou seja, se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Desta definição resulta imediatamente que a função é contínua em qualquer ponto isolado do seu domínio.

Definição 3.20 *Os pontos do domínio em que a função não é contínua, dizem-se* ***pontos de descontinuidade.***

Tendo em conta as equivalentes definições de limite de uma função num ponto, estudadas na secção anterior é imediato o seguinte resultado.

Teorema 3.7 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é contínua no ponto a,*

(ii) ***continuidade à Cauchy:***
$\forall \delta > 0 \ \ \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in D : |x-a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta,$

(iii) ***continuidade à Heine:***
$\forall$ *sucessão* (x_n), $(x_n \in D$ *e* $x_n \to a) \Longrightarrow f(x_n) \to f(a).$

Exemplo 3.27 *Consideremos a função $f(x) = 2x^2 + 1$ para $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que dado $a \in \mathbb{R}$ a função é contínua nesse ponto, de duas formas.*

(i) Usando a definição de Cauchy.

Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja $\delta > 0$.

Pretendemos provar que, para $|x - a|$ suficientemente pequeno, isto é, para $|x - a| < \varepsilon$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \delta$. Observemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left|2x^2 + 1 - (2a^2 + 1)\right| = \left|2x^2. - 2a^2\right| = \\ &= 2\,|x - a|\,|x + a|\,. \end{aligned}$$

Precisamos de encontrar um majorante para $|x + a|$ que não dependa de x. Notemos, no entanto, que se $|x - a| < 1$ também $|x| < |a| + 1$ e, logo, $|x + a| \leq |x| + |a| < 2\,|a| + 1$. Então sendo, $|x - a| < 1$, tem-se

$$|f(x) - f(a)| < 2\,|x - a|\,(2\,|a| + 1)\,.$$

Para encontrar $2\,|x - a|\,(2\,|a| + 1) < \delta$ é suficiente ter $|x - a| < \dfrac{\delta}{[2\,(2\,|a| + 1)]}$ e $|x - a| < 1$. Então dado $\delta > 0$ escolhemos $\varepsilon = \min\left\{1, \dfrac{\delta}{[2\,(2\,|a| + 1)]}\right\}$. Todos os cálculos anteriores mostram que se escolhermos ε, desta forma, verificamos que $|x - a| < \varepsilon$ implica $|f(x) - f(a)| < \delta$, como desejado.

(ii) Usando a definição de Heine.

Consideramos uma sucessão (x_n), qualquer, formada por elementos pertencentes ao domínio de f tal que $x_n \to a$. Temos então, aplicando as propriedades dos limites de sucessões, que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[2x_n^2 + 1\right] = 2\left[\lim_{n\to+\infty} x_n\right]^2 + 1 = 2a^2 + 1 = f(a).$$

Então a função é contínua no ponto a.

A noção de limite lateral dá, naturalmente, origem à seguinte definição de continuidade lateral assim como ao resultado posterior.

Definição 3.21 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que:*

(i) f é contínua à esquerda em a se $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$;
(ii) f é contínua à direita em a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Proposição 3.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. f é contínua em a se, e só se, f é contínua à direita no ponto a e é contínua à esquerda no ponto a.*

Exemplo 3.28 *Consideremos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta função é contínua à direita no ponto zero mas não é contínua à esquerda nesse ponto, (ver figura 3.24) uma vez que:

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 = H(0) \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0).$$

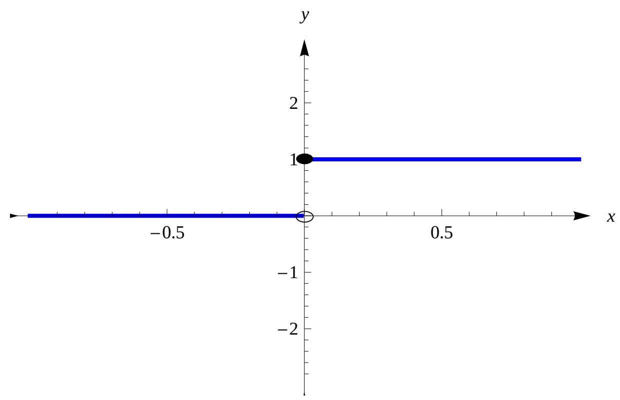


Figura 3.24: Gráfico da função de Heaviside para $-1 \leq x \leq 1$.

As propriedades do limite de uma função num ponto dão origem a propriedades análogas para as funções contínuas. As demonstrações são exercícios simples considerando os resultados desta secção.

Proposição 3.3 *Uma função constante é contínua em todos os pontos do seu domínio.*

Proposição 3.4 *(**Propriedades algébricas**) Se duas funções f e g são contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então $f+g$, $f-g$, fg e $\dfrac{f}{g}$ (com $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D_f \cap D_g$) também são contínuas no ponto a.*

Proposição 3.5 *(**Continuidade da função composta**) Sejam f e g duas funções reais de variável real. Se $a \in D_{f\circ g}$, se g é contínua em a e se f é contínua em $g(a)$, então $(f \circ g)$ é contínua no ponto a.*

Como poderíamos verificar qualquer função polinomial, racional, trigonométrica, exponencial, logarítmica, hiperbólica é contínua em todos os pontos do deu domínio.

Então, se considerarmos as proposições anteriores, poderemos estudar o comportamento dum enorme número de funções quanto à continuidade.

Exemplo 3.29 *Considere a função $f(x) = e^{2x^2+3x}$ e $a \in R$. A função exponencial é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$ assim como a função polinomial $g(x) = 2x^2 + 3x$. Então a função f é contínua em a uma vez que a composição de duas funções contínuas, nos pontos respectivos, ainda é uma função contínua.*

3.4.1 Prolongamento por continuidade

Definição 3.22 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D tal que $a \notin D$. Diremos que f é **prolongável por continuidade** ao ponto a, se existir em $\mathbb{R}$, o $\lim_{x\to a} f(x)$. Nesse caso a função $F : D \cup \{a\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D, \\ b & \text{se } x = a. \end{cases}$$

*com $\lim_{x\to a} f(x) = b$, é contínua em a e designa-se por **prolongamento por continuidade de f ao ponto** a.*

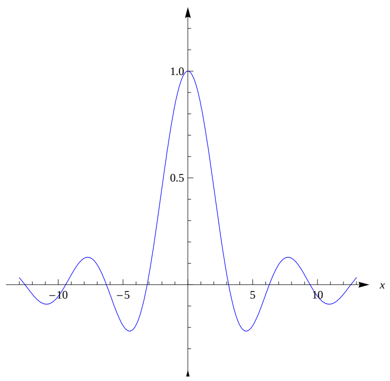


Figura 3.25: Gráfico da função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)/x$ se $x \neq 0$ e $F(0) = 1$ se $x = 0$.

Exemplo 3.30 *Consideremos a função $f : D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

A função não está definida na origem mas 0 é ponto de acumulação do domínio. Tem-se que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Como existe limite no ponto zero podemos afirmar que a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero. A função prolongamento por continuidade de f ao ponto 0 pode ser definida por:

$$\begin{aligned} F :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to F(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 1 & se\ x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta situação é ilustrada na figura 3.25.

3.5 Propriedades globais das funções contínuas

Nesta secção estudaremos teoremas fundamentais que caracterizam o comportamento das funções contínuas definidas em intervalos de $\mathbb{R}$.

Em particular o primeiro teorema, o teorema de Bolzano, traduz uma ideia intuitiva das funções contínuas: *uma função contínua num intervalo fechado não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.*

Bernard Bolzano (1781-1848), matemático checo, foi um dos primeiros a reconhecer que essas propriedades sobre funções contínuas, que parecem "óbvias", necessitavam de uma demonstração matemática rigorosa. As suas observações sobre continuidade foram publicadas em 1850 num importante livro, para a época, chamado "*Paradoxien des Unandlichen*".

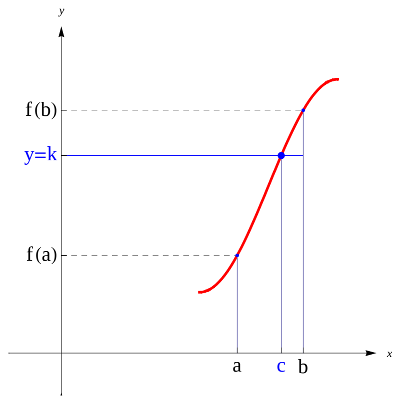


Figura 3.26: Interpretação geométrica do teorema de Bolzano.

Definição 3.23 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função f diz-se* ***contínua no conjunto*** *$A \subset D$ se é contínua em todos os pontos de A. A função diz-se simplesmente contínua se é contínua em todos os pontos do seu domínio.*

Teorema 3.8 *(**Teorema do valor intermédio ou de Bolzano**) Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $I = [a, b] \subset D$. Então, para qualquer valor k entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.*

Demonstração. Vamos supor que $f(a) \leq k \leq f(b)$; a demonstração seria análoga para o caso em que $f(b) \leq k \leq f(a)$.

Consideramos o intervalo I e dividimos este intervalo em dois subintervalos. Denotamos por $[a_1, b_1] = I_1$ o subintervalo tal que $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$. Dividimos este intervalo em dois subintervalos. Denotamos por $[a_2, b_2] = I_2$ o subintervalo tal que $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$. Repetindo sucessivamente esta operação obtemos uma sucessão de intervalos

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

tal que

$$f(a_n) \leq k \leq f(b_n) \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Estamos nas condições do princípio do encaixe que nos garante que as sucessões (a_n) e (b_n) convergem para um ponto $c \in \mathbb{R}$ e que este ponto c pertence a todos os intervalos I_n (e é único). Então temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} f(a_n) &= c, \\ \lim_{n\to+\infty} f(b_n) &= c. \end{aligned}$$

Como f é contínua em I e utilizando o teorema das sucessões enquadradas obtemos que $f(c) = k$. ■

Exemplo 3.31 *Seja*

$$f(x) = x^3 - x^2 + x$$

Provemos que existe um número c tal que a sua imagem $f(c) = 10$. *De facto* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *logo é contínua por exemplo no intervalo* $[0, 3]$. *Mas*

$$f(0) = 0 < 10 < f(3) = 21.$$

Então o teorema de Bolzano garante que existe um elemento c tal que $f(c) = 10$.

Algumas consequências deste teorema muito utilizadas no estudo das funções.

Corolário 3.1 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua num intervalo* $I = [a, b] \subset D$ *tal que* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demonstração. Podemos supor que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Seria análogo para o caso em que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Então $f(a) < 0 < f(b)$. Como f é contínua em I, o teorema de Bolzano garante que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

■

Este corolário é muito útil na identificação dos zeros de uma função.

Exemplo 3.32 *Seja*

$$f(x) = x^4 - x^2 + x - 2$$

Provemos que existe um número c tal que a sua imagem $f(c) = 0$. *De facto* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *logo é contínua por exemplo no intervalo* $[1, 2]$. *Como* $f(1) = -1$ *e* $f(2) = 12$ *então* $f(1) \cdot f(2) = -12 < 0$, *donde se conclui que existe pelo menos um zero desta função no intervalo* $(1, 2)$.

Exemplo 3.33 *Mostre que*

$$x^6 - 6x = -1$$

é uma equação que tem pelo menos uma raíz real.

De facto $f(x) = x^6 - 6x + 1$ *é contínua em* $\mathbb{R}$ *logo é contínua por exemplo no intervalo* $[-1, 2]$. *Como* $f(-1) = -4$ *e* $f(2) = 77$ *então* $f(-1) \cdot f(2) < 0$, *donde se conclui que existe pelo menos um zero desta função no intervalo* $(1, 2)$. *A equação inicial tem uma raíz real.*

Exemplo 3.34 *Mostre que qualquer polinómio do terceiro grau,* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_3 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$, *isto é, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $p(c) = 0$.

De facto, supondo sem perda de generalidade que $a_3 > 0$, *temos que*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} p(x) = & \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right) = -\infty \quad e \\ \lim_{x\to+\infty} p(x) = & \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

Logo existem números reais $a \in \mathbb{R}^-$ *e* $b \in \mathbb{R}^+$ *tais que* $p(a) \cdot p(b) < 0$, *donde se conclui que existe pelo menos* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $p(c) = 0$.

O resultado seguinte pode ser enunciado duma forma sugestiva dizendo que a imagem, por uma função contínua, dum intervalo, ainda é um intervalo.

Corolário 3.2 *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num intervalo $I \subset D$ então $f(I)$ é também um intervalo.*

Demonstração. Seja $f : I \subset D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Se f é uma função constante então esta afirmação é imediata uma vez que $f(I)$ ou é vazio ou se reduz a um ponto.

Recordemos que um conjunto J, que contenha pelo menos dois pontos, é um intervalo se, e só se, verifica a propriedade

$$r, s \in J \text{ e } r < s \Longrightarrow [r, s] \subset J \text{ que é equivalente a } r, s \in J \text{ e } r < k < s \Longrightarrow k \in J$$

Supomos que f não é constante e que $r, s \in f(I)$ e $r < k < s$. Por definição de $f(I)$, existem $a, b \in I$ tais que $r = f(a)$ e $s = f(b)$. Como $f(a) = r < k < s = f(b)$, pelo teorema de Bolzano existe um c estritamente compreendido entre a e b (portanto $c \in I$), tal que $f(c) = k$. Então $k \in f(I)$, podemos concluir que $f(I)$ é um intervalo.
■

Claro que o intervalo $f(I)$ pode ser de um tipo diferente do intervalo I. vejamos alguns exemplos (ver figuras 3.27, 3.28 e 3.29).

Exemplo 3.35

$$\begin{array}{rlcl} f: & (-\infty, +\infty) & \to & [-1, 1] \\ & x & \to & \operatorname{sen} x \end{array}$$

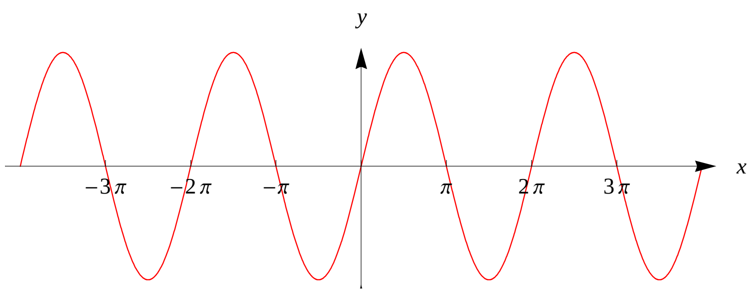


Figura 3.27: Gráfico da função seno.

Exemplo 3.36

$$\begin{array}{rlcl} f: & (-\infty, +\infty) & \to & (0, 1) \\ & x & \to & \frac{1}{x^2+1} \end{array}$$

Exemplo 3.37

$$\begin{array}{rlcl} f: & \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \to & (-\infty, +\infty) \\ & x & \to & tg(x) \end{array}$$

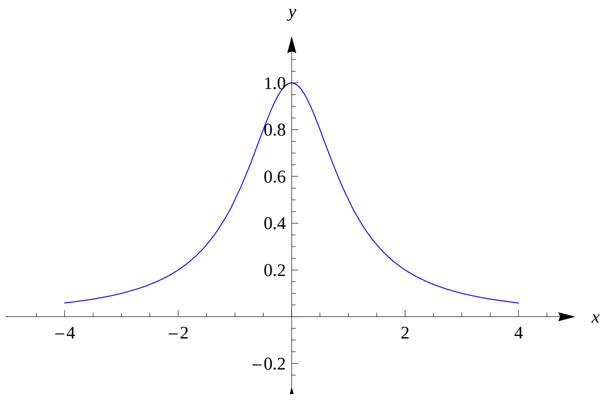


Figura 3.28: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

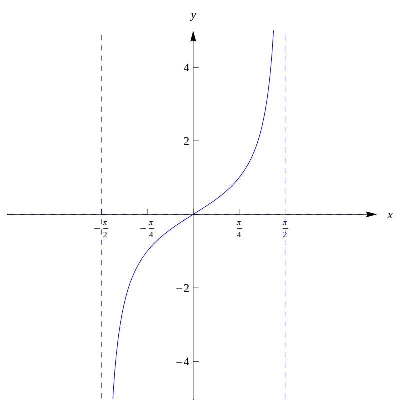


Figura 3.29: Gráfico da função tangente.

Corolário 3.3 *Se f é uma função contínua num intervalo I e injectiva em I, então f é estritamente monótona em I.*

Demonstração. Consideremos uma função f contínua num intervalo I e injectiva em I. Vamos supor, com vista a uma contradição, que f não era estritamente monótona. Supomos que existem $x, y, z \in I$ tais que $x < y < z$ e $f(z) < f(x) < f(y)$; então pelo teorema de Bolzano existe w tal que $y < w < z$ e $f(w) = f(z)$ pelo que f não é injectiva o que não é possível. Podemos concluir que f é estritamente monótona. Os outros casos de negação da monotonia estrita levariam , duma forma análoga, a estabelecer uma contradição com a injectividade da função. ■

Corolário 3.4 *Se f é monótona num intervalo I e se $f(I)$ é um intervalo então f é contínua em I.*

Demonstração. Supomos que f é crescente. (Seria análogo para o caso decrescente).

Para todo o ponto $c \in I$, diferente de $\inf I$, e para todo o $\delta > 0$, existe $a < c$ (com $a \in I$) tal que $f(a) > f(c) - \delta$.

Se esta afirmação não fosse verdadeira ter-se-ia que para qualquer $x < c$ em I, $f(x) < f(c) - \delta$, logo $f(I)$ não seria um intervalo, o que contraria a hipótese.

Tem-se, então, que em $[a, c]$, $f(c) - \delta < f(x) \leq f(c)$, donde se conclui que f é contínua à esquerda em c, isto é, $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$.

Analogamente se provaria que f é contínua à direita em c.

Podemos concluir que f é contínua em c. ■

O teorema de Bolzano e os respectivos corolários permitem provar que a função inversa duma função contínua ainda é uma função contínua.

Proposição 3.6 ***(Continuidade da função inversa)*** *Seja f é uma função injectiva definida num intervalo I. Então, se f é contínua, a função inversa $g : J = f(I) \to I$ é também contínua.*

Demonstração. Seja f uma função contínua e injectiva no intervalo I. Sabemos por um dos corolários que $f(I)$ é um intervalo e pelo último corolário que f é estritamente monótona. Então f^{-1} é estritamente monótona no intervalo $f(I)$ e a sua imagem, I, é também um intervalo. Pelo corolário anterior f^{-1} é contínua em I. ■

Exemplo 3.38 *Consideremos a função*

$$\begin{array}{rlcl} g: & [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ & x & \to & \sqrt[n]{x}. \end{array}$$

É uma função contínua em $[0, +\infty)$ uma vez que é a função inversa da função $f(x) = x^n$ definida também em $[0, +\infty)$.

Com o objectivo de estudar mais pormenorizadamente uma função é importante conhecer os seus pontos extremos.

Definição 3.24 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:*

1) *f tem um **máximo** no conjunto D, se existir um ponto $c \in D$ tal que $f(x) \leq f(c), \forall x \in D$. Neste caso, c diz-se ponto de máximo de f em D, e $f(c)$ diz-se o máximo de f em D.*

2) *f tem um **mínimo** no conjunto D, se existir um ponto $c \in D$ tal que $f(c) \leq f(x), \forall x \in D$. Neste caso, c diz-se ponto de mínimo de f em D, e $f(c)$ diz-se o mínimo de f em D.*

Proposição 3.7 *Se f é uma função contínua num conjunto fechado e limitado X, subconjunto de $\mathbb{R}$, então o conjunto imagem $f(X)$ é também fechado e limitado em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Por um dos Corolários do Teorema de Bolzano sabemos que $f(I)$ é um intervalo. Resta-nos então provar que é fechado e limitado. Dividimos a demonstração em duas partes.Provemos que:

(i) $f(I)$ é limitado.

(ii) $f(I)$ é fechado.

(i) Suponhamos que $f(I)$ não era limitado e tentamos chegar a uma contradição.
Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in I$ tal que $|f(x_n)| \geq n$.
Como I é limitado a sucessão (x_n) é limitada, logo (x_n) tem uma subsucessão (x_{n_k}) convergente.
Seja $x = \lim_{n\to+\infty} f(x_{n_k})$; como I é fechado tem-se que $x \in I$.
Como f é contínua então $\lim_{n\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ o que contraria a suposição $|f(x_n)| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Mostrámos que $f(I)$ é limitado.

(ii) Temos de provar que existem

$$a, b \in I \text{ tais que } f(a) = \sup_{x\in I} f(x) \text{ e } f(b) = \inf{}_{x\in I} f(x).$$

.

Suponhamos que tal não é verdade, ou seja, que não existe $a \in I$ tal que $f(a) = \sup_{x\in I} f(x)$, isto é, $L = \sup_{x\in I} f(x)$ não é atingido.

Então $L - f(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Portanto, $g(x) = \dfrac{1}{L - f(x)}$ é uma função contínua em I. Mas em (i) provámos que toda a função contínua num intervalo limitado é limitada o que implica que g é uma função limitada.

Sabemos, então, que

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0\ \exists c \in I : f(c) > L - \delta \ &\Longrightarrow \forall \delta > 0\ \exists c \in I : L - c < \delta \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \forall \delta > 0\ \exists c \in I : g(c) = \frac{1}{L - f(c)} > \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

o que contradiz o facto de g ser limitada.
Então existe $a \in I$ tal que $f(a) = \sup_{x\in I} f(x)$.

De forma análoga se provaria que $b \in I$ tal que $f(b) = \inf{}_{x\in I} f(x)$.

Logo $f(I)$ é fechado. ■

Estamos em condições de enunciar e provar o teorema de Weierstrass.

Teorema 3.9 *(**Teorema de Weierstrass**) Se f é uma função contínua num intervalo fechado e limitado I em $\mathbb{R}$ então tem máximo e mínimo.*

Demonstração. Se f é uma função contínua num intervalo I em $\mathbb{R}$ então, como mostrámos, $f(I)$ é fechado e limitado.

Se $f(I)$ é limitado então é majorado e minorado logo existem supremo e ínfimo de $f(I)$. Como $f(I)$ é fechado então o supremo e o ínfimo pertencem a $f(I)$, logo são máximo e mínimo de $f(I)$. ■

A continuidade da função é indispensável neste resultado como se pode observar no exemplo seguinte (ver figura 3.30).

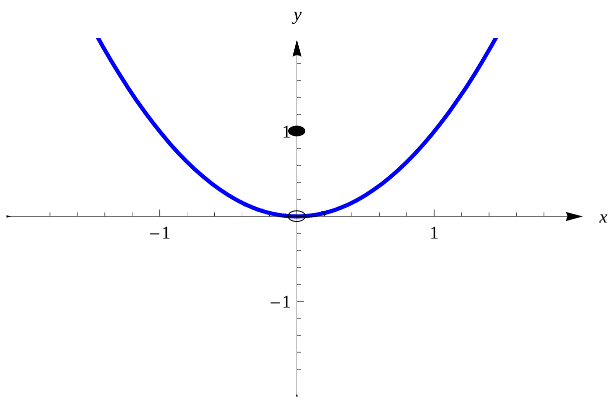


Figura 3.30: Gráfico da função f para ou $-2 < x \leq 2$.

Exemplo 3.39 *Consideremos a função*

$$\begin{array}{rlcl} f: & [-2,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & se \quad -2 \leq x < 0 \quad ou \quad 0 < x \leq 2 \\ 1 & se \quad x = 0. \end{array} \right. \end{array} .$$

Esta função está definida num intervalo fechado e limitado e, no entanto, não tem mínimo. O seu ínfimo é zero mas nenhum ponto do intervalo tem por imagem zero. Esta afirmação não contradiz o teorema de Weierstrass uma vez que f não é contínua na origem.

3.6 Exercícios propostos

1) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$; *b)* $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$; *c)* $f(x) = \sqrt{x^2-2}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$; *e).* $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$; *f)* $f(x) = \log\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$;

g) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$; *h)* $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\log\left(\dfrac{x}{10}\right)\right)$; *i)* $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$;

j) $f(x) = \log(1 - \operatorname{arcsen} x)$; *k)* $f(x) = \log\left(1 - x^{\frac{3}{2}}\right)$; *l)* $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.

2) Verifique quais das funções dadas são pares e quais são ímpares:

a) $f(x) = x$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2}$;

e) $f(x) = \log(|x|)$;

f) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$;

g) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;

h) $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

i) $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

3) Encontre a inversa da função y e determine o domínio da inversa:

a) $y = 2x+3$; *b)* $y = \log\left(\dfrac{x}{2}\right)$; *c)* $y = \operatorname{arctg}(3x)$.

4) Sendo $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = e^{2x}$ caracterize as funções:

a) $g \circ f$;

b) g^{-1}.

5) Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}$.
Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

a) $\forall a \in D_f : f(a) = f(-a)$;
b) $\forall a, b \in D_f : a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$.

6) Mostre, usando a definição de limite, que:

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = 5$; *b*) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty$; *c*) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

7) Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$; *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; *c*) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$; *e*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; *f*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; *h*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; *i*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x+1}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$; *l*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$; *m*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x}-e^{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen}(2x)}$;

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x^2}\right)^{x^2}$; *o*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

8) Sabendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, calcule:

a). $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$; *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$; *c*) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$; *d*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;

e). $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$; *f*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$; *g*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(2x)}{x+\operatorname{sen}(3x)}$.

9) Construa $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua num e num só ponto.

10) Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes encontre os pontos de continuidade e de descontinuidade:

$$a)\ f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}; \qquad b)\ f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x};$$

$$c)\ f(x) = \left|\frac{x-1}{x^2+1}\right|; \quad d)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5}, & x \neq 5 \\ 1, & x = 5 \end{cases}.$$

11) Determine os valores de a e de b para os quais a segunite função é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 < x < 3, \\ x^2 + ax + b, & |x-2| \geq 1. \end{cases}$$

12) Construa uma bijecção de $[0,1]$ em si próprio que não seja contínua.

13) Para cada par de valores reais atribuídos a m e t a expressão seguinte define uma função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} m, & x \leq 0, \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-4x+3}, & 0 < x < 1, \\ t, & x \geq 1. \end{cases}$$

Determine m e t de modo que a função seja contínua no intervalo $[0,1]$.

14) Sejam f e g funções reais de variável real contínuas no ponto $a \in \mathbb{R}$. Prove que a função $\max(f,g)$ é contínua no ponto a.

Sug.: Mostre primeiro que $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$.

15) Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1; \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1; \\ r \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Determine r.
b) Estude f do ponto de vista da continuidade.
c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.
d) Quais são os limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, caso existam?

16)

a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pelas fórmulas:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad g(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções f e g é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.

c) Mostre que f e g são funções limitadas.

17) Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

b) Calcule:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

c) Justificando abreviadamente a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

18) Justifique que existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\log\left(1 + x^2\right) \leqslant a\,|x| + b \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

19) Consideremos a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log|x+2| + arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) - \log 2, & \text{se } x < 0; \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) - \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } 0 < x < 1; \\ e^{x-1} + \dfrac{\pi}{4}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Estude f quanto à continuidade e prolongamento por continuidade.

20) Consideremos a chamada *função de Dirichlet* $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$ é apenas contínua no ponto $x = 0$.

21) Mostre que, tem pelos menos duas raízes, a equação

$$x - \log x = 2.$$

22) Consideremos a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ a, & \text{se } x = 1; \\ \dfrac{x+5}{3}, & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

a) Determine os valores de a e b de modo que f seja contínua em todo o seu domínio.

b) Aplicando o teorema de Bolzano, mostre que:

$$\exists c \in (2,4) : f(c) = c.$$

23) Dada a função real de variável real h, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ -x^2 + 2x, & x \leq 2. \end{cases}$$

a) Determine $h(0)$ e $h(3)$.

b) Indique o valor lógico da proposição:

$$\exists c \in (0,3) : h(c) = \frac{3}{2}.$$

c) O resultado anterior contraria o teorema de Bolzano? Justifique.

d) Prove que a restrição de h ao intervalo $[0,2]$ tem nesse intervalo um máximo e um mínimo.

3.6.1 Soluções dos exercícios

1) a) $[-1,+\infty)$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}\backslash\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$; d) $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$; e) $(-2,0]$; f) $(-2,2)$; g) $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$; h) $\left[\dfrac{10}{e},10\right]e$; i) $\mathbb{R}\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$; j) $(-1,\operatorname{sen}1)$; k) $[0,1)$; ł) $\mathbb{R}$.

2) a) Ímpar. b) Par c) Par, se n par e ímpar se n ímpar.
d) Par. e) Par f) Par. g) Ímpar. h) Ímpar. i) Ímpar.

3) a) $y = \dfrac{1}{2}(x-3)$, $D_y = \mathbb{R}$. b) $y = 2e^x$, $D_y = \mathbb{R}$.

c) $y = \frac{1}{3}tg(x)$, $D_y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4) a) $gof(x) = (x+1)^2$, $D_{gof} = (-1, +\infty)$, $D'_{gof} = \mathbb{R}^+$.

b) $g^{-1}(x) = \frac{\log x}{2}$, $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}^+$, $D'_{g^{-1}} = \mathbb{R}$.

5) a) Verdadeira; b) Falsa.

7) a) 2; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$; d) 1; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{2}$; g) 4; h) 0; i) 0;

j) 1; l) e; m) $\frac{1}{2}$; n) 0; o) Não existe.

8) a) 5; b) $\frac{\operatorname{sen} 2}{2}$; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) $\frac{2}{3}$; g) $-\frac{1}{4}$.

9) A função definida por. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1-x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$

10) a) Contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; b) Contínua em $\mathbb{R}^+$; c) Contínua em $\mathbb{R}$;
d) Contínua em $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

11) $a = -3$ e $b = 4$.

12) A função definida por. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ x & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$.

13) $m = 0$ e $t = \frac{1}{2}$.

15) a) $r = \frac{\pi}{2}$; b) Contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; c) $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ não existe.

16) a) f e g são contínuas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; b) f é prolongável por continuidade a 0 e g não é prolongável por continuidade a 0 .

17) a) $D = [0,1) \cup (1, +\infty)$. b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$. c) $f(D) = \mathbb{R}$.

d) Por exemplo as sucessões de termo geral $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $v_n = n$.

19) f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$ e é descontínua nos pontos $x = -2$ e $x = 1$.

22) $a = 2$ e $b = 0$.

23) a) $h(0) = 0$ e $h(3) = 3$. b) Falsa. c) Não

d) Máximo $h(1) = 1$ e mínimo $h(0) = h(2) = 0$.

CAPÍTULO 4

Cálculo diferencial

4.1 Introdução

Fermat, o verdadeiro criador do cálculo diferencial, afirma Laplace.

Em 1629, Pierre de Fermat realizou uma das suas primeiras investigações matemáticas, recuperou uma obra de Apollonius, "*Plane Loci*", chegando assim, a um importante trabalho sobre máximos e mínimos intitulado "*Métodos para determinar Máximos e Mínimos e Tangentes a Linhas Curvas*".

Ao tentar determinar máximos e mínimos de uma curva, Fermat vai observar que a tangente tem que ser paralela ao eixo horizontal, nestes pontos. O problema era identificar quais os pontos em que a tangente é paralela ao eixo horizontal. Para resolver este problema, Fermat vai usar o processo da posição limite de uma secante, em que considera infinitamente pequena a distância entre os pontos de intersecção com a curva.

O único senão deste procedimento foi ter considerado este infinitamente pequeno aparentemente igual a zero, em vez de ser a tender para zero. Mais tarde, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), em simultâneo e de forma independente, vão desenvolver este ramo da Matemática reparando esta falha

Newton tentava resolver vários problemas de Mecânica nomeadamente precisava de, dado um deslocamento, determinar a velocidade (ou seja, derivar) e de, dada a velocidade, determinar o deslocamento (ou seja, integrar ou primitivar). Nesta ímtima relação com a Física desenvolveu decisivamente o Cálculo Diferencial.

Com Leibniz (doutorado em Direito) o Cálculo Infinitesimal foi algebrizado introduzindo-se com rigor as definições das quantidades infinitesimais dx e dy.

A aceitação do conceito de derivada foi difícil e demorada. Contudo, no século XIX a introdução formal da definição de limite por Cauchy veio resolver esta questão.

4.2 Funções diferenciáveis

Consideremos o seguinte problema geométrico: dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que num ponto $a \in D$ tem o valor $f(a) \in \mathbb{R}$, qual a recta do plano $\mathbb{R}^2$ que melhor aproxima o gráfico de f num vizinhança do ponto $(a, f(a))$?

A resposta a este problema é, naturalmente, a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Surge então a questão de como calcular a equação dessa recta

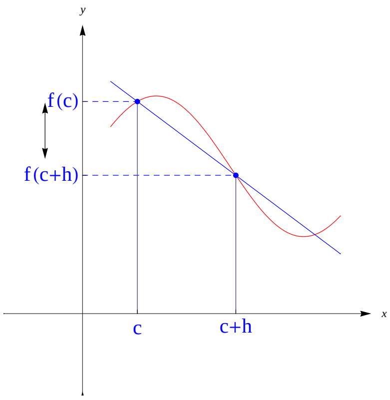


Figura 4.1: razão incremental como declive de uma recta secante ao gráfico de f em torno do ponto c.

tangente.

A resolução do problema geométrico inicial passa então por calcular o declive da recta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$.

Dada uma função f definida numa vizinhança $V_\varepsilon(c)$ dum ponto c do deu domínio, designa-se por **razão incremental de f em** c à função definida em $V_\varepsilon(c)\setminus\{c\}$ pelo quociente:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \ (x \neq c).$$

Sendo $h = x - c$, que se designa por incremento ou acréscimo, a razão incremental também se pode escrever sob a forma:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \ (h \neq 0).$$

Ilustramos esta função na figura 4.1.

Esse cálculo do declive da recta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(c, f(c))$ pode ser feito com base na noção de limite, pode ser obtido como o "limite" de rectas secantes ao mesmo.

Para cada $h \in \mathbb{R}$ suficientemente perto de zero, podemos considerar a única recta do plano que passa nos pontos $(c, f(c))$ e $(c + h, f(c + h))$, o seu declive é dado por

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Na figura 4.2 podemos observar que a variação do valor de h $(h_i, i = 1, 2, 3, ...)$, faz deslocar os pontos $(c + h, f(c + h))$ que, em conjunto com o ponto $(c, f(c))$ definem as rectas secantes $(s_1, s_2, s_3, ...)$ ao gráfico da função f.

Quando $h \to 0$, as correspondentes rectas secantes "tendem" para a recta tangente, t, ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, pelo que é natural considerar que o declive desta última é dado pelo limite dos declives das rectas secantes:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

onde a igualdade é consequência da mudança de variável $h = x - c \iff x = c + h$.

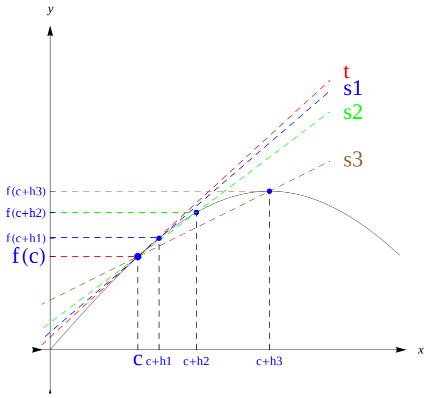


Figura 4.2: Rectas secantes $(s_1, s_2, s_3, ...)$ ao gráfico da função f.

Definição 4.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que f é **diferenciável no ponto** $a \in D$ com derivada $f'(a)$ se existir em $\mathbb{R}$ o limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Exemplo 4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x) = mx + b, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $m, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Temos então que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(mx + b) - (ma + b)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{m(x - a)}{x - a} = m = f'(a)$$

Concluimos que:

$$f(x) = mx + b, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{então} \quad f'(x) = m, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nota 4.1 *Observe que esta expressão inclui como caso particular, quando $m = 0$, a função constante. Temos então que*

$$f(x) = b, \ b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{então} \quad f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x) = \operatorname{sen} x \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando a igualdade trigonométrica

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a - b}{2}\right) \cos\left(\frac{a + b}{2}\right), \forall a, b \in \mathbb{R},$$

temos, então, que para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2a+h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) = \cos(a)$$

Concluimos, assim, que:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{então} \quad f'(x) = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nota 4.2 *Duma forma análoga se concluiria que*

$$f(x) = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{então} \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Temos, então, que para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h}-e^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a e^h - e^a}{h} = \lim_{h\to 0} e^a \frac{e^h-1}{h} = \\ &= e^a \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^a. \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que:

$$f(x) = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{então} \quad f'(x) = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x) = x^n \ \forall x \in \mathbb{R} \ \textit{com} \ n \in \mathbb{N}.$$

Usando a igualdade (prove por indução esta igualdade)

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1}\right), \forall a \in \mathbb{R},$$

temos, então, que

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1}\right)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a} \left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1}\right) = na^{n-1}. \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que:

$$f(x) = x^n, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{então} \quad f'(x) = nx^{n-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nota 4.3 *Usando os resultados do exemplo anterior, é possível mostrar que para qualquer expoente $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,*

$$f(x) = x^\alpha, \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \textit{então} \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Embora tenha sido a noção geométrica intuitiva de recta tangente a motivar a definição anterior de derivada de uma função, podemos agora usar esta segunda noção para dar uma definição precisa da primeira.

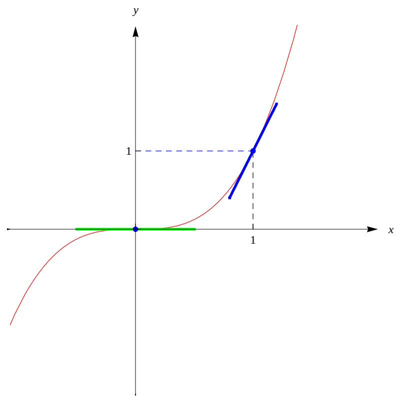


Figura 4.3: Gráfico da função $f(x) = x^3$ e das suas rectas tangentes nos pontos $(1,1)$ e $(0,0)$.

Definição 4.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} -> \mathbb{R}$, uma função diferenciável num ponto $a \in D$. A recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é a recta definida pela equação:*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Considere a função $f(x) = x^3$, definida em $\mathbb{R}$. A sua derivada no ponto $x = 1$ existe e é dada por:

$$\begin{aligned} f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^3 + 3h^2 + 3h + 1) - 1}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h\to 0} (h^2 + 3h + 3) = 3 \end{aligned}$$

logo a recta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto $(1, f(1)) = (1,1)$ é a recta de equação

$$y = f(1) + f'(1)\cdot(x - 1) \Longleftrightarrow y = 1 + 3(x - 1) \Longleftrightarrow y = 3x - 2.$$

Por outro lado, a derivada da função $f(x) = x^3$, no ponto $x = 0$ é dada por:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 = 0.$$

Logo a recta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto $(0, f(0)) = (0,0)$ é a recta horizontal de equação

$$y = 0.$$

O gráfico da função e estas duas rectas tangentes são apresentados na figura **??**.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de $D_a^- = (-\infty, a) \cap D$.

Diz-se que f é **diferenciável à esquerda no ponto** a se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_d(a) = f'(a^+).$$

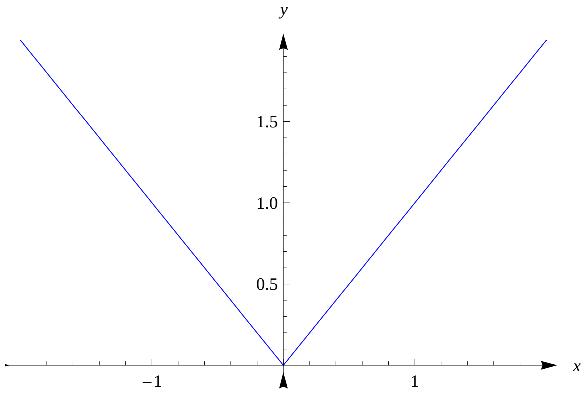


Figura 4.4: Gráfico da função módulo.

Definição 4.3 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de $D_a^- = (-\infty, a) \cap D$. Diz-se que f é* ***diferenciável à esquerda no ponto*** *a (ou f tem* ***derivada lateral à esquerda,*** *$f'(a^-)$,* ***no ponto*** *a) se existir em $\mathbb{R}$ o limite*

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f_e'(a) = f'(a^-).$$

Proposição 4.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de D_a^+ e de D_a^-. f é diferenciável no ponto a se, e só se, f tem derivadas laterais iguais nesse ponto.*

Demonstração. Consequência simples da definição de limites laterais. ■

Exemplo 4.5 *Consideremos a função módulo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

cujo gráfico está representado na figura 4.4.

Averiguemos se esta função é diferenciável no ponto zero.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1 = f'(0^+).$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-1) = -1 = f'(0^-).$$

Podemos concluir que f é diferenciável à esquerda e à direita no ponto zero mas que os valores das derivadas à direita e à esquerda são diferentes, ou seja,

$$f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-),$$

logo a função módulo não é diferenciável no ponto zero.

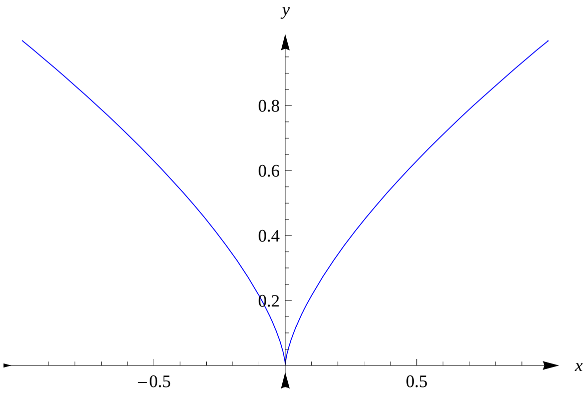


Figura 4.5: Gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Exemplo 4.6 *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, cujo gráfico está representado na figura 4.5.*

Averiguemos se esta função é diferenciável no ponto zero.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

Logo a função não é diferenciável no ponto zero.

Observemos que estes dois últimos exemplos mostram que uma função pode ser contínua num ponto (como é o caso da função módulo $f(x) = |x|$ e da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto zero) e, no entanto, não ser diferenciável nesse ponto. Qual será então a relação entre a diferenciabilidade e a continuidade de uma função num ponto?

Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é uma função diferenciável num ponto $a \in D$ então f é contínua nesse ponto.

Demonstração. Sabemos por hipótese que f é diferenciável em a, logo existe e é finito o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Com efeito para $x \in D$, $(x \neq a)$ tem-se que

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

e logo

$$\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a} (x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Podemos concluir que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

o que mostra a continuidade da função f no ponto a. ■

Nota 4.4 *Este teorema diz-nos que*

$$f \text{ diferenciável em } a \implies f \text{ contínua em } a.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e,

$$f \text{ contínua em } a \;\not\Rightarrow\; f \text{ diferenciável em } a,$$

como observámos nos exemplos da função módulo $f(x) = |x|$ *e da função* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Nota 4.5 *Por outro lado este teorema garante que*

$$f \text{ não é contínua em } a \implies f \text{ não é diferenciável em } a,$$

Por exemplo no capítulo anterior verificámos que a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por:*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ 1, & se\ x \geq 0. \end{cases}$$

não era contínua no ponto zero, logo, por este teorema , sabemos que também não é diferenciável no ponto zero.

Vejamos agora as regras algébricas de derivação para as funções soma, produto, múltiplo escalar e quociente.

Teorema 4.1 *Sejam* $f : Df \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : Dg \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis num ponto* $a \in Df \cap Dg$*. Seja, ainda,* $c \in \mathbb{R}$ *uma constante. Então as funções* $c \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$ *e* $\dfrac{f}{g}$ *(com* $g(a) \neq 0$*) também são diferenciáveis no ponto* a*, sendo as suas derivadas dadas por:*

1) $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$
2) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
3) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$

Demonstração. Como f e g são funções diferenciáveis no ponto a sabemos que existem e são finitos os limites

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

1) Multiplicação por uma constante:

$$\lim_{x\to a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} c \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = c \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a)$$

Podemos concluir que $c \cdot f$ é diferenciável em a e que

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$$

2) Função soma:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} = \\
\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a)
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que $f+g$ é diferenciável em a e que

$$(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$$

3) Função produto:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)+f(x)g(a)-f(x)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\left(g(x)-g(a)\right)+g(a)\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a} g(a)+\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).
\end{aligned}
$$

Como f é diferenciável no ponto a, sabemos que é contínua no ponto a, logo $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, facto necessário para obter a última igualdade. Podemos concluir que $f\cdot g$ é diferenciável em a e que

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).$$

4) Função quociente, supondo que $g(a)\neq 0$.

Vamos dividir esta demonstração em duas partes:

(i) Consideramos o caso particular em que a função $f(x)=1$, ou seja, estudamos o caso da função $\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ em a.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\left(-\frac{1}{g(x)g(a)}\right)\right] = \\
&= -\frac{1}{g(a)}\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \\
&= -\frac{1}{[g(a)]^2}g'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}
$$

Também neste cálculo utilizámos o facto de g ser diferenciável no ponto a, logo contínua para obter $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Podemos concluir que $\left(\dfrac{1}{g}\right)$é diferenciável em a e que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

(ii) Notando, agora, que $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$ temos que, através da derivada da função produto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= f'(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\left[-\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\right] = \\ &= \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}.\end{aligned}$$

Podemos concluir que $\left(\dfrac{f}{g}\right)$é diferenciável em a e que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

■

Decorrem imediatamente deste teorema resultados muito importantes e muito úteis.

Exemplo 4.7

As funções polinomiais $P(x)$ são diferenciáveis para qualquer valor real $a \in \mathbb{R}$.

De facto, qualquer polinómio se obtém como soma, produto e múltiplo escalar de funções constantes e da função identidade, que já sabemos serem diferenciáveis para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.8

As funções racionais $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ são diferenciáveis para qualquer valor do seu domínio.

Este resultado é imediato tendo em conta que as funções racionais são definidas como o quociente entre duas funções polinomiais.

Exemplo 4.9 *Consideremos a função tangente definida por*

$$\begin{aligned}\textit{tangente}:\quad & D = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} \\ & x \to tg(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\end{aligned}$$

Seja $a \in D$. Usando a fórmula para a derivada do quociente obtida no teorema anterior podemos calcular a derivada da função tangente da seguinte forma:

$$(tg(x))' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Logo concluimos que:

$$f(x) = tg(x),\ \forall x \in D \quad \textit{então} \quad f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2},\ \forall x \in D.$$

Teorema 4.2 *(Derivada da função composta) Sejam $g : Dg \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in Dg$ e $f : Df \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = g(a) \in Df$. Então a função composta $(f \circ g)$ é diferenciável no ponto $a \in D_{f \circ g}$*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Demonstração. Usando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{g(a+h) - g(a)}, \text{ com } g(a+h) \neq g(a) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Como g é diferenciável em a, por hipótese, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a).$$

Como f é diferenciável em $g(a) = b$, por hipótese, temos que

$$\lim_{y\to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b).$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $y = g(a+h)$ temos que quando $h \to 0$ então $y = g(a+h) \to g(a) = b$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y\to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b).$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\
&= f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.10 *Consideremos a função* $h(x) = \operatorname{sen}(x^2+4)$ *definida em* $\mathbb{R}$. *Seja* $a \in \mathbb{R}$.*Observemos que* $h = f \circ g$ *com* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = x^2 + 4$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(y) = \operatorname{sen} y$. *Como* $g'(x) = 2x$ *e* $f'(y) = \cos y$ *então*

$$h'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) = \cos\left(a^2+4\right) \cdot (2a) = 2a\cos\left(a^2+4\right).$$

Concluimos que

$$h(x) = \operatorname{sen}\left(x^2+4\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ então } h'(x) = 2x\cos\left(x^2+4\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.11 *Consideremos a função* $h(x) = e^{x^2-3}$ *definida em* $\mathbb{R}$. *Seja* $a \in \mathbb{R}$.*Observemos que* $h = f \circ g$ *com* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = x^2 - 3$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(y) = e^y$. *Como* $g'(x) = 2x$ *e* $f'(y) = e^y$ *então*

$$h'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) = e^{a^2-3} \cdot (2a) = 2ae^{a^2-3}.$$

Concluimos que

$$h(x) = e^{x^2-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ então } h'(x) = 2xe^{x^2-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Veremos agora um resultado que relaciona a derivada duma função estritamente monótona e invertível com a derivada da sua inversa. Para demonstrar este resultado vamos utilizar o teorema anterior.

Teorema 4.3 *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função estritamente monótona e contínua no intervalo* I *e seja* $f^{-1} : f(I) \to I$ *a sua inversa. Se* f *é diferenciável num ponto* $a \in I$ *e* $f'(a) \neq 0$, *então* f^{-1}*é diferenciável no ponto* $b = f(a)$ *e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demonstração. Assumiremos que f é diferenciável em todo o intervalo I. Provaremos apenas que se f^{-1} é diferenciável em $f(I)$, o valor da derivada é, de facto, o que foi apresentado no enunciado do teorema.

Usando a definição de função inversa temos que:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$

e a esta composição de funções aplicamos o teorema anterior.

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ f)(x) = x &\implies (f^{-1} \circ f)'(x) = (x)' \\
&\implies (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\
&\implies (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall x \in I.
\end{aligned}$$

Fazendo $x = a$ e $b = f(a)$ obtemos o resultado pretendido. ■

Exemplo 4.12 *Consideremos a função exponencial* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$*. A sua inversa é a função logaritmo:*

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \textit{ definida por } f^{-1}(x) = \log x, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Como $f'(x) = (e^x)' = e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$*, temos pelo teorema anterior que a função logaritmo é diferenciável em qualquer ponto* $x \in \mathbb{R}^+$ *e que*

$$\left(f^{-1}\right)(x) = \log x \Longrightarrow (\log)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Podemos concluir que

$$(\log)'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Exemplo 4.13 *Seja* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ *e* $x \in \mathbb{R}^+$*.*

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\log(x^\alpha)}\right)' = \left(e^{\alpha \log x}\right)' = e^{\alpha \log x} (\alpha \log x)' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Concluimos que

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Exemplo 4.14 *Seja* $g : Dg \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função positiva e, dado* $\alpha \in \mathbb{R}$*, consideremos a função* $f : Df \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $f(y) = y^\alpha$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$*. Supondo que* g *é diferenciável num ponto* $a \in Dg$ *e dado que* f *é uma função diferenciável no ponto* $b = g(a) \in Df$*, podemos concluir (através do teorema da função composta), que a função composta* $h = (f \circ g) = g^\alpha$ *é diferenciável em* a *e*

$$\begin{aligned}(g^\alpha)'(a) = h'(a) = (f \circ g)'(a) = \ & f'(g(a)) \cdot g'(a). = \\ & \alpha(g(a))^{\alpha-1} \cdot g'(a).\end{aligned}$$

Temos que

$$(g^\alpha)'(x) = \alpha(g(x))^{\alpha-1} \cdot g'(x), \forall x \in D.$$

Exemplo 4.15 *Consideremos a restrição da função seno ao intervalo* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*, i.e.*

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \textit{ definida por } f(x) = \operatorname{sen}(x), \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

A sua inversa neste intervalo é a função arco seno:

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \textit{ definida por } f^{-1}(y) = arc\ \operatorname{sen}(y), \forall y \in [-1, 1].$$

Como

$$f'(x) = (\operatorname{sen})'(x) = \cos(x) \neq 0, \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

só podemos aplicar o teorema anterior para $y \in \left]-1, 1\right[$*. Este teorema garante que a função arco seno é diferenciável em qualquer ponto* $x \in \left]-1, 1\right[$ *e que*

$$(arc\ \operatorname{sen})'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(arc\ \operatorname{sen}(y))} = \frac{1}{\cos x}, \ \forall y \in \left]-1, 1\right[.$$

Tendo em conta que se $y = \operatorname{sen} x$ *então*$1 - y^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$ *logo, para a restrição considerada, temos que* $\sqrt{1-y^2} = \cos x$. *Podemos concluir que*

$$(arc\ \operatorname{sen})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ \forall y \in \left]-1,1\right[.$$

Exemplo 4.16 *Seguindo um raciocínio análogo se concluíria que*

$$(arc\ \cos)'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in \left]-1,1\right[.$$

Exemplo 4.17 *Consideremos a restrição da função tangente ao intervalo* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, *i.e.*

$$f : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = tg(x),\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

A sua inversa neste intervalo é a função arco tangente:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ definida por } f^{-1}(y) = \operatorname{arctg}(y), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Já calculámos a derivada da função tangente obtendo que

$$f'(x) = (tg)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0,\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Podemos aplicar o teorema da função inversa para concluir que a função arco tangente é diferenciável em qualquer ponto $y \in \mathbb{R}$ *e que*

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(y))}} = \cos^2(\operatorname{arctg}(y)) = \cos^2 x,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta que se $y = tg\,(x)$ *então* $1 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$ *logo, para a restrição considerada, temos que* $\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$. *Podemos concluir que*

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{1+y^2},\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Associada a uma função f que seja diferenciável, pelo menos para alguns pontos do seu domínio, existe uma outra função, designada a função derivada de f, como é indicado na próxima definição.

Definição 4.4 *Sejam* $f : Df \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função que é diferenciável em todos os pontos do conjunto* $D \subset Df$. *Então, designa-se por* ***função derivada de*** f, f', *a função qua a cada ponto* $x \in D$ *associa a derivada de* f *nesse ponto:*

$$\begin{aligned} f' :\ & D \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) \end{aligned}$$

Exemplo 4.18 *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{se } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & \textit{se } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ os teoremas anteriores garantem que a função é diferenciável. Aplicando a regra da derivação do produto e a derivada da função composta, calculamos a derivada para $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left(x^2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)' &= (x^2)' \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Para $x = 0$ utilizamos a definição de derivada num ponto para averiguar se a função é diferenciável.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 = f'(0).$$

Logo a função também é diferenciável no ponto zero. A função derivada define-se por:

$$\begin{aligned} f':\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{se } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & \textit{se } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 4.19 *Consideremos a função módulo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ já definida anteriormente por*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \textit{se } x \geq 0 \\ -x & \textit{se } x < 0, \end{cases}$$

Como mostrámos esta função não é diferenciável no ponto zero. A função derivada define-se por

$$\begin{aligned} f':\ & \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x > 0, \\ -1 & \textit{se } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4.3 Teoremas fundamentais

A derivada de uma função desempenha um papel importante e decisivo no estudo do comportamento duma função.

Definição 4.5 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e c um ponto do seu domínio. Diz-se que*

- *f tem um máximo local em c se $f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in V_\delta(c) \cap D$ (para algum $\delta > 0$).*
- *f tem um mínimo local em c se $f(x) \geq f(c)$ $\forall x \in V_\delta(c) \cap D$ (para algum $\delta > 0$).*
- *f tem um extremo local em c se f tem um mínimo ou máximo local em c..*

Um extremo local não é, necessariamente um ponto de máximo ou mínimo da função, uma vez que a respectiva desigualdade $f(x) \leq f(c)$ ou $f(x) \geq f(c)$ apenas se tem que verificar para uma vizinhança do ponto e, não em todo o seu domínio.

Qual será a relação entre a derivada da função num ponto e o facto desse ponto ser um ponto onde a função tem um extremo local?

Dizia Pierre de Fermat, no séc. XVII, *no gráfico de uma função suficientemente regular, os pontos que têm ordenada maior ou menor que do que a de todos os outros pontos vizinhos, são pontos de tangente horizontal.* Traduzindo para uma linguagem actual.

Teorema 4.4 *(**Teorema de Fermat**) Seja f uma função definida num intervalo $I =]a, b[$, tal que f tem um extremo local num ponto $c \in I$. Se f é diferenciável no ponto c, tem-se que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que f tem um máximo local no ponto $c \in I =]a, b[$ (a demonstração é inteiramente análoga para o caso do mínimo local).

Sabemos então que existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(x) \leq f(c)\ \forall x \in V_\delta(c) =]c-\delta, c+\delta[\iff f(x) - f(c) \leq 0\ \forall x \in V_\delta(c) =]c-\delta, c+\delta[$$

Usando este facto, tem-se que:

$$f'(c^-) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{e que} \quad f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Como f é diferenciável no ponto c,

$$0 \leq f'(c^-) = f'(c) = f'(c^+) \geq 0 \Longrightarrow f'(c) = 0.$$

■

Nota 4.6 *Este teorema diz-nos que*

$$f \text{ diferenciável e com extremo local em } c \Longrightarrow f'(c) = 0.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, ou seja,

$$f \text{ diferenciável e } f'(c) = 0 \not\Rightarrow f \text{ tem extremo local em } c.$$

Nota 4.7 *Por exemplo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, cujo gráfico está representado na figura 4.6, é diferenciável e tem derivada nula no ponto zero e, no entanto, não tem um extremo local nesse ponto, é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.*

Nota 4.8 *Uma função pode ter um extremo local e não ser diferenciável nesse ponto. Lembremos o caso da função módulo que tem um mínimo no ponto zero e, no entanto, não é diferenciável nesse ponto.*

O teorema seguinte devido ao matemático francês Michel Rolle (1652–1719), fornece informação importante sobre os zeros da derivada.

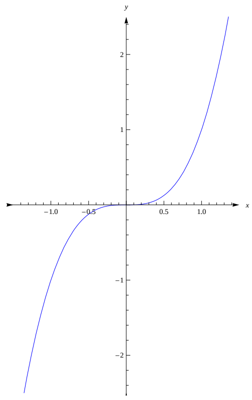


Figura 4.6: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

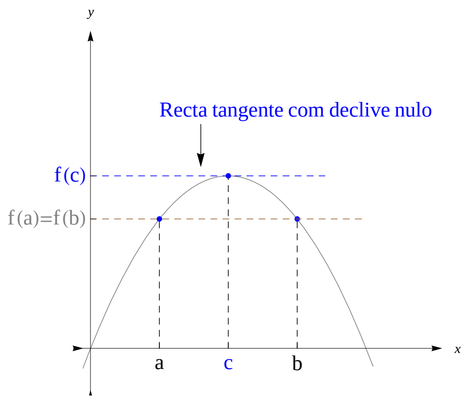


Figura 4.7: Interpretação geométrica do teorema de Rolle.

Teorema 4.5 ***(Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função definida e contí nua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciá vel em $]a, b[$. Então:*

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists c \in \,]a, b[\, : f'(c) = 0.$$

Demonstração. Como f está nas condições do teorema de Weierstrass, sabemos que sabemos que f tem máximo e mínimo em $[a, b]$:

$$M = \max_{[a,b]} f \qquad \text{e} \quad m = \min_{[a,b]} f$$

Se $M = m$, então f é uma função constante em $[a, b]$ pelo que:

$$f'(c) = 0, \quad \forall c \in \,]a, b[\,.$$

Se $M > m$, então a hipótese $f(a) = f(b)$ implica que pelo menos um dos valores M ou m seja assumido por f num ponto $c \in]a, b[$. Temos então que f tem um extremo nesse ponto c.

Como f é por hipótese diferenciável, podemos usar o Teorema de Fermat para concluir que então $f'(c) = 0$. ■

Do teorema de Rolle decorrem dois corolários de grande utilidade no estudo de funções.

Corolário 4.1 *Entre dois zeros de uma função diferenciável, existe sempre pelo menos um zero da sua derivada.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior a uma função f, contínua em $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$, tal que $f(a) = 0 = f(b)$. ■

Corolário 4.2 *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável, não pode existir mais do que um zero da própria função.*

Demonstração. A demonstração será feita por redução ao absurdo.

Sejam p e q dois zeros consecutivos da derivada de f, isto é, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \,]p, q[\,$. Se nesse intervalo existissem dois pontos c_1,$c_2 \in \,]p, q[$ zeros da função, isto é, $f(c_1) = f(c_2) = 0$, então o teorema de Rolle aplicado ao intervalo $]c_1, c_2[$ garantia que teria de haver um zero da derivada no interior desse intervalo o que absurdo uma vez que p e q são zeros *consecutivos* da derivada. ■

O teorema seguinte, o teorema do valor médio de Lagrange, consequência do teorema de Rolle, diz-nos que uma função diferenciável num intervalo $[a, b]$ deve ter nalgum ponto desse intervalo a derivada igual ao declive da recta secante $\left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$ que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ como podemos observar na figura 4.8.

Teorema 4.6 ***(Teorema de Lagrange ou do valor médio)*** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

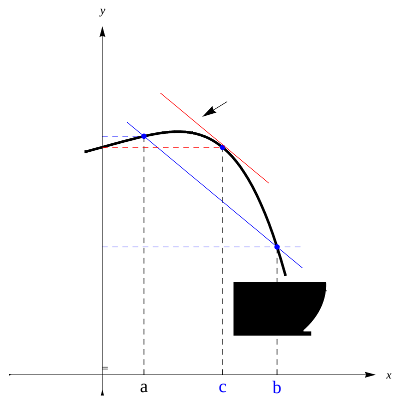


Figura 4.8: Interpretação geométrica do teorema de Lagrange.

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

É uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ e tal que $g(a) = g(b)$. Esta função está nas condições do teorema de Rolle. Logo, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$tal que $g'(c) = 0$. Mas:

$$g'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ou seja , existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Nota 4.9 *O Teorema de Rolle é uma caso particular deste teorema. Trata-se do caso em que $f(a) = f(b)$, ou seja, o caso em que a tangente é uma recta horizontal.*

Exemplo 4.20 *Consideremos a função seno e, através do teorema de Lagrange, mostremos que se tem*

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^+$. A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é cont ínua em $[0, x]$ e diferenciável em $]0, x[$, logo podemos aplicar o teorema de Lagrange a esta função: existe $c \in]0, x[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

ou seja,

$$\cos(c) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Então tem-se que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = |\cos(c)| \leq 1 \Leftrightarrow |\operatorname{sen} x| \leq |x|, \text{ para todo o } x \in \mathbb{R}^+.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^-$*. Duma forma análoga obtem-se que*

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-.$$

Como $|\operatorname{sen} 0| \leq |0|$ *, podemos finalmente, concluir que*

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como consequência deste teorema vamos considerar alguns corolários muito úteis no estudo duma função.

Corolário 4.3 *Seja f uma função com derivada nula em todos os pontos dum intervalo I, então f é constante em I.*

Demonstração. Sejam $a, b \in I$ quaisquer pontos diferentes do intervalo I $(a < b)$. Como f é diferenciável em $[a, b]$ o Teorema de Lagrange garante que existe $c \in\,]a, b[$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Como, por hipótese, $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, a igualdade anterior implica que $f(b) = f(a)$.

Como a e b eram quaiquer pontos do intervalo podemos concluir que a função f é constante em I. ■

Como consequência imediata deste corolário obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.4 *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e sejam $f; g : I \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em I tais que $f'(x) = g'(x)$, para todo o $x \in I$. Então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + C$ em I.*

Demonstração. Basta considerar a função $h = f - g$ e aplicar o corolário anterior. ■

Corolário 4.5 *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Então:*

(a) *f é crescente em I se e só se $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$;*
(b) *f é decrescente em I se e só se $f'(x) \leq 0$ para todo o $x \in I$.*

Demonstração. Só demonstraremos a alínea (a) uma que as demonstrações são análogas.

Como temos que demonstrar uma equivalência iremos demonstrar cada uma das implicações:

(i) $(\Longrightarrow)$ Seja f é crescente em I.

Então tem-se, para qualquer ponto $c \in I$,

$$\left.\begin{array}{l} x < c \implies f(x) < f(c) \\ x < c \implies f(x) > f(c) \end{array}\right\} \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad \forall x \in I \quad (x \neq c)\,.$$

Neste caso o limite da razão incremental em c, ou seja, $f'(c)$, (que existe uma vez que f é diferenciável em I), tem que ser não-negativo. Como c era uma qualquer ponto do intervalo I podemos concluir que $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$.

(ii) ($\Longleftarrow$) Seja $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$.

Dados quaisquer dois pontos $a, b \in I$, com $a < b$, o teorema de Lagrange garante que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Mas, por hipótese, $f'(c) \geq 0$, logo $f(b) \geq f(a)$, ou seja,

$$a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b), \text{ para quaisquer } a, b \in I,$$

o que quer dizer que a função é crescente em I. ■

O corolário anterior relaciona o sinal da derivada duma função com a sua monotonia.

Embora não seja possível manter a equivalência, uma das implicações contínua a ser verdadeira se considerarmos as desigualdades estritas.

Corolário 4.6 *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Então:*

(a) *se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in I$ então f é estritamente crescente em I;*
(b) *se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in I$.então f é estritamente decrescente em I.*

Demonstração. A demonstração segue de perto a demonstração correspondente do corolário anterior. ■

Nota 4.10 *O recíproco do corolário anterior não é verdadeiro. por exemplo a função*

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ & x \to & f(x) = x^3 \end{array}$$

é estritamente crescente e, no entanto, tem-se que $f'(0) = 0$.

Exemplo 4.21 *Consideremos a função*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(x^2\right).$$

A função derivada é $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$.

Para $x > 0$ temos que $f'(x) > 0$ logo a função é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

Para $x < 0$ temos que $f'(x) < 0$ logo a função é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$.

Corolário 4.7 *Seja f uma função diferenciável numa vizinhança dum ponto c, $V =]c - \delta, c + \delta[$, do seu domínio, excepto possivelmente no próprio ponto c. Seja f contínua no ponto c. Então:*

$$(a) \quad \left.\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \forall x \in]c - \delta, c[\\ f'(x) < 0 & \forall x \in]c, c + \delta[\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tem um máximo local em } c.$$

$$(b) \quad \left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \forall x \in]c - \delta, c[\\ f'(x) > 0 & \forall x \in]c, c + \delta[\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tem um mínimo local em } c.$$

Demonstração. (a) Pelo corolário anterior sabemos que se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]c-\delta, c[$ então f é estritamente crescente em $]c-\delta, c[$.

Seja $a \in]c-\delta, c[$.

Escolhemos um outro ponto qualquer $y \in]a, c[$, ou seja, um ponto tal que $a < y < c$.

Como f é estritamente crescente no intervalo $]c-\delta, c[$ te-se que $f(a) < f(y)$.

Como f é contínua em c, existe o limite lateral esquerdo de $f(y)$ quando y tende para c, e esse limite é $f(c)$. Tomando este limite na desigualdade anterior tem-se que $f(a) \leq f(c), \forall a \in]c-\delta, c[$.

De forma análoga se mostra que $f(c) \geq f(b), \forall b \in]c, c+\delta[$.

Através destas duas desigualdades podemos afirmar que $f(c)(x), \forall x \in I$.

(b) A demonstração da existência dum mínimo local seria análoga. ■

Exemplo 4.22 *Consideremos a função módulo*

$$\begin{array}{rrl} f: & \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x \rightarrow & f(x) = |x| \end{array}$$

Já vimos que esta função é contínua em $\mathbb{R}$ *e diferenciável em* $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ *e que afunção derivada é*

$$\begin{array}{rrl} f': & \mathbb{R} \backslash \{0\} \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x \rightarrow & f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Para $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 1 > 0$, *para* $x \in \mathbb{R}^-$, $f'(x) = -1 < 0$ *e a função é contínua no ponto* $x = 0$, *logo, pelo corolário anterior, podemos afirmar que tem um mínimo local no ponto* $x = 0$ *(embora não sendo diferenciável neste ponto).*

Se considerarmos uma função cuja função derivada é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, o teorema de Bolzano garante que $f'(x)$ toma todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$. Contudo, mesmo quando f' não é contínua em $[a, b]$, tal propriedade contínua a ser válida, facto que é garantido no próximo teorema.

Teorema 4.7 *(Teorema de Darboux) Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b$. *Seja* f *uma função definida e diferenciável* $[a, b]$ *e seja* k *um número real entre* $f'(a)$ *e* $f'(b)$. *Então, existe um ponto* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = k$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f'(a) < k < f'(b)$.

Consideremos a função $g(x) = kx - f(x)$, com $x \in [a, b]$. Como g é contínua em $[a, b]$, e $[a, b]$ é um intervalo limitado e fechado, g tem um máximo e mínimo em $[a, b]$, pelo teorema de Weierstrass.

Como $g'(a) = k - f'(a) > 0$, então o máximo não é atingido no ponto $x = a$.

Como $g'(b) = k - f'(b) > 0$, então o máximo não é atingido no ponto $x = b$.

Logo o máximo é atingido nalgum ponto $c \in]a, b[$, logo $g'(c) = 0 = k - f'(c)$.

Então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = k$. ■

Teorema 4.8 ***(Teorema do valor médio de Cauchy)*** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Sejam f, g duas funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$ e $g'(x)$ não se anula em $]a, b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que:*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração. Consideremos a função

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

Pelo teorema de Rolle, como $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$, temos que $g(b) - g(a) \neq 0$, logo h está bem definida. Além disso, h é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $h(b) = h(a)$.

Podemos aplicar o teorema de Rolle à função h que nos garante que existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$. Então:

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Como $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$, temos que:

$$\exists c \in]a, b[\colon \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

Tal como o teorema de Rolle é um caso particular do teorema de Lagrange, também o teorema de Lagrange é uma caso particular deste teorema. É o caso particular em que a função $g(x) = x$, é a função identidade.

Utilizando este teorema do valor médio de Cauchy obtemos duas proposições de grande utilidade no levantamento de indeterminações no cálculo de limites. Omitimos a sua demonstração.

Teorema 4.9 *(Regra de Cauchy) Sejam f, g duas funções definidas e diferenciáveis num intervalo aberto I, excepto possivelmente num ponto c (istoé, f e g são diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$)*

Suponhamos que:

$$\begin{cases} g'(x) \neq 0, \;\; x \in I \setminus \{c\} \\[2ex] \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0 \quad ou \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty \\[2ex] \exists \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a \end{cases}$$

Então existe o $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$

Teorema 4.10 *(Extensão da regra de Cauchy) A regra de Cauchy, sendo válidas as restantes condições, é extensível às sguintes situações:*

1. *Quando os limites acima referidos são limites laterais.*
2. *Quando o limite a da razão das derivadas é igual a* $\pm\infty$.
3. *Quando f e g são funções diferenciáveis num intervalo aberto $I =]b, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$ e se calculam os limites quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.*

Exemplo 4.23 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Nota 4.11 *O facto de o* $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *não existir não significa que o* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *não exista, significa, sim, que não pode utilizar a regra de Cauchy.*

Exemplo 4.24 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}}{\cos x}, \text{ que não existe.}$$

Mas

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \left(x \frac{x}{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$$

porque $\lim_{x\to 0} x \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 0.1 = 0$ *e a função* $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ *é limitada.*

Nota 4.12 *A regra de Cauchy não se aplica caso não se tenha* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$.

Exemplo 4.25 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{3x+1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

Mas se aplicássemos a regra de Cauchy (que não podemos aplicar) o resultado seria

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{3x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \text{ que é falso!}$$

4.3.1 Levantamento de indeterminações em limites de funções diferenciáveis, utilizando a regra de Cauchy

(i) Indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$

Exemplo 4.26 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Exemplo 4.27 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 4.28 *Calcular o* $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Exemplo 4.29 *Calcular o* $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty.$$

Exemplo 4.30 *Calcular o* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log \operatorname{sen} x}{\log x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \operatorname{sen} x}{\log x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x\right) = 1\cdot 1 = 1.$$

Exemplo 4.31 *Calcular o* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^3+4x-5}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^3+4x-5} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,(3x^2+4)} = 0.$$

Nota 4.13 *Por indução se mostraria que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{p(x)} = 0, \text{ onde } p(x) \text{ é um polinómio de grau } k \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4.32 *Calcular o* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3+4x-5}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+4x-5} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2+4} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty.$$

Nota 4.14 *Por indução se mostraria que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{p(x)} = +\infty, \text{ onde } p(x) \text{ é um polinómio de grau } k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Indeterminações do tipo $0\times\infty$ ou $\infty-\infty$

Estas indeterminações reduzem-se a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, utilzando as igualdades:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

$$f(x)-g(x) = f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right].$$

Exemplo 4.33 *Calcular o* $\lim_{x\to+\infty} (x^2e^{-x})$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2e^{-x}\right) \overset{(\infty\times 0)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Nota 4.15 *Por indução verifica-se que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4.34 *Calcular o* $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Exemplo 4.35 *Calcular o* $\lim_{x\to +\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to +\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{(\infty\times 0)}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

(iii) Indeterminações do tipo 0^0, 1^∞ e ∞^0

Estas indeterminações reduzem-se às indeterminações anteriores, utilzando a igualdade:

$$x = e^{\log x},\ \text{para todo o } x\in\mathbb{R}^+.$$

Exemplo 4.36 *Calcular o* $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} \overset{(0^0)}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\log x^{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x\log x}$$

Mas:

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\log x \overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x} = 1\cdot 0 = 0$$

Então:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x\log x} = e^0 = 1.$$

Exemplo 4.37 *Calcular o* $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{(\infty^0)}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Mas:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0$$

Então:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.$$

Exemplo 4.38 *Calcular o* $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} \overset{(1^\infty)}{=} \lim_{x\to 1} e^{\log x^{\frac{1}{x-1}}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\log x}{x-1}}$$

Mas:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \underset{RC}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Então:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\log x}{x-1}} = e^1 = e.$$

4.4 Derivadas de ordem superior à primeira.

O conceito de derivadas de ordem superior à primeira de uma funçã o f resulta naturalmente de considerar as derivadas de funções derivadas, caso existam.

Definição 4.6 *Seja f uma função definida num intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ e diferenciável em I. Se a função derivada f' é diferenciável num ponto $a \in I$, isto é, existe o limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = f''(a),$$

*então a função f diz-se **duas vezes diferenciável no ponto** $a \in I$ e ao limite referido chama-se **segunda derivada de** f **no ponto** $a \in I$ ou **derivada de ordem dois de** f **no ponto** $a \in I$.*

Se a função f' é diferenciável em qualquer ponto de I, diz-se que f é duas vezes diferenciável em I.

De modo análogo se define a terceira derivada num ponto $a \in I$ que se denota, quando existe, por $f'''(a)$.

Por indução define-se a diferenciabilidade de f de qualquer ordem n e as derivadas de ordem n que se denotam por $f^{(n)}$, $D^n f$ ou $\dfrac{d^n f}{dx}$.

Definição 4.7 *Uma função f diz-se* ***n vezes diferenciável no ponto*** $a \in I$ *quando existem as derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, ...,$f^{(n-1)}$ e existe o limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a).$$

Por convenção considera-se a derivada de ordem zero a própria função: $f^{(0)} = f$.

Definição 4.8 *Uma função f diz-se* ***indefinidamente diferenciável em*** I *(conjunto aberto ou intervalo aberto de $\mathbb{R}$ com mais do que um ponto), quando f é n vezes diferenciável para qualquer $n \geq 0$.*

Definição 4.9 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I =]a, b[$. Se existir a n-ésima derivada de f em todo o intervalo I, e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, diremos que f* ***é uma função de classe*** $C^n(I)$*, ou que $f \in C^n(I)$. Diremos ainda que f é uma função de classe $C^0(I)$ se f for contínua em I, e que* **f** ***é uma função de classe*** $C^\infty(I)$ *se $f \in C^n(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 4.39 *Consideremos a função exponencial de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Esta função é indefinidamente diferenciável em qualquer ponto de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{l} f'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \\ f''(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima derivada de f existe e é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.40 *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\begin{array}{ll} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Como mostrámos anteriormente, a função derivada define-se por:

$$\begin{array}{ll} f': & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Vimos também que o $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe, pelo que esta função f' não é contínua no ponto zero. Temos então: $f \in C^0(\mathbb{R})$, existe $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mas como f' não é contínua no ponto zero então $f \notin C^1(\mathbb{R})$. A função f é apenas duas vezes diferenciável para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Podemos definir a segunda derivada por:

$$\begin{array}{ll} f'': & \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ & x \to f''(x) = -\dfrac{2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x} + 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}. \end{array}$$

Exemplo 4.41 *Considere a função polinomial de domínio $\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{array}{lcl}
f'(x) & = & 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 \\
f''(x) & = & 5.4.a_5x^3 + 4.3.a_4x^2 + 3.2.a_3x + 2.a_2 \\
f'''(x) & = & 5.4.3.a_5x^2 + 4.3.2.a_4x + 3.2.a_3 \\
f^{(4)}(x) & = & 5.4.3.2.a_5x + 4.3.2.a_4 \\
f^{(5)}(x) & = & 5.4.3.2.a_5 \\
... & & ... \\
f^{(n)}(x) & = & 0, \ \forall n > 5
\end{array}$$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima derivada de f existe e é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$. A função polinomial é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Nota 4.16 *Se considerarmos o ponto $x = 0$ observemos que*

$$\begin{array}{lclcl}
f(0) & = & a_0 = 0!a_1 & \Longrightarrow & a_0 = \dfrac{f(0)}{0!} = f(0) \\[2ex]
f'(0) & = & a_1 = 1!a_1 & \Longrightarrow & a_1 = \dfrac{f'(0)}{1!} \\[2ex]
f''(0) & = & 2.a_2 = 2!a_2 & \Longrightarrow & a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!} \\[2ex]
f'''(0) & = & 3.2.a_3 = 3!.a_3 & \Longrightarrow & a_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!} \\[2ex]
f^{(4)}(0) & = & 4.3.2.a_4 = 4!.a_4 & \Longrightarrow & a_4 = \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} \\[2ex]
f^{(5)}(0) & = & 5.4.3.2.a_5 = 5!a_5 & \Longrightarrow & a_5 = \dfrac{f^{(5)}(0)}{5!} \\
... & & & & ... \\
f^{(n)}(0) & = & 0, \ \forall n > 5 & &
\end{array}$$

Podemos reescrever o polinómio inicial da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f(0)}{0!}.$$

Se considerarmos um polinómio de grau n

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \\ &= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \end{aligned}$$

Veremos que expressões análogas desempenham um papel muito importante na aproximação de funções genéricas (que admitem derivadas de várias ordens) por polinómios. Dada uma função pretende-se aproximá-la por uma outra que seja "mais bem comportada". Nesta perspectiva, é claro que as funções polinomiais são funções muito simples: as suas derivadas são ainda funções polinomiais e para calcular o valor de um polinómio basta apenas utilizar operações de adição e multiplicação.

Definição 4.10 *Seja f uma função n vezes diferenciável num ponto a do seu domínio. Chama-se **polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto** a, ao polinómio:*

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \end{aligned}$$

com as convenções $0! = 1$, $0^0 = 1$.

*No caso de $a = 0$ o polinómio de Taylor é também chamado **polinómio de MacLaurin**,*

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \end{aligned}$$

Exemplo 4.42 *Consideremos a função exponencial definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^x$.*

$$\begin{array}{l} f'(x) = e^x \implies f'(0) = e^0 = 1 \\ f''(x) = e^x \implies f''(0) = e^0 = 1 \\ ... \\ f^{(n)}(x) = e^x \implies f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \end{array}$$

O polinómio da Maclaurin de ordem n é

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}.$$

Observemos o gráfico da função exponencial e das suas aproximações polinomiais de primeira ($p_1(x) = 1 + x$) e segunda ($p_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!}$) ordens na figura 4.9.

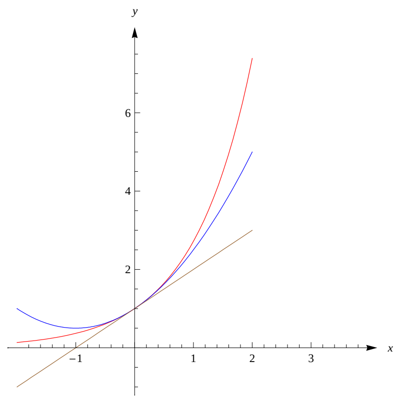


Figura 4.9: Gráfico da função exponencial e das suas aproximações polinomiais de primeira ($p_1(x) = 1 + x$) e segunda ($p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$) ordens.

Exemplo 4.43 *Consideremos a função* $f(x) = \log(1 + x)$.

$$f(x) = \log(1+x) \implies f(0) = \log 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \implies f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{3\times 2}{(1+x)^4} \implies f^{(4)}(0) = \frac{3\times 2}{(1+0)^4} = 3\times 2 = 3!$$

...

O polinómio da Maclaurin de ordem n *é*

$$\begin{aligned} p_n(x) &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x^n}{n!} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

Nota 4.17 *Observe que o polinómio de Taylor de ordem* $n = 1$ *de* f *no ponto* a *corresponde à expressão da recta tangente a* f *no ponto* a*:*

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Nota 4.18 *Uma propriedade importante do polinómio de Taylor de qualquer função* f*,* n *vezes diferenciável, é que a função e a suas derivadas até à ordem* n*, no ponto* a*, são iguais ao polinómio e às suas correspondentes derivadas nesse ponto, ou seja:*

$$f^{(k)}(x) = p_n^{(k)}(x), \quad \textit{para } k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Com esta ferramenta, o polinómio de Taylor, será possível obter "*boas*" aproximações polinomiais ao gráfico de determinadas funções? O Teorema de Taylor estabelece que (sob certas condições) uma função pode ser aproximada

(na vizinhança de algum ponto dado) por um polinómio, de modo que o erro que se comete

ao substituir a função pelo polinómio seja "*pequeno*".

Teorema 4.11 ***(Fórmula de Taylor)*** *Seja f uma função contínua e n vezes diferenciável num intervalo aberto I , $a \in I$. Tem-se que, para qualquer $x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + r_n(x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x) \end{aligned}$$

em que

$$\lim_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

No caso em que $a = 0$ também se designa esta fórmula por ***f órmula de MacLaurin****.*

É imediato a partir da sua definição que o polinómio de Taylor de f, associado ao ponto a, converge para $f(a)$ quando x tende para a. Então o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n}$$

gera uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Aplicando a regra de Cauchy (as condições verificam-se), e tendo em atenção que as derivadas de f e de $p_n(x)$ são contí nuas e iguais no ponto a até à ordem n, verifica-se que surgem sucessivas indeterminações do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\frac{r_n^{(k)}(x)}{[(x-a)^n]^{(k)}} = \frac{f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x)}{n\,(n-1)\,(n-k+1)\,(x-a)^{(n-k)}},\ k < n$$

Esta sucessão de indeterminações do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ será levantada quando se aplica a regra de Cauchy pela n- ésima vez, obtendo-se

$$\frac{r_n^{(n)}(x)}{[(x-a)^n]^{(n)}} = \frac{f^{(n)}(x) - p_n^{(n)}(x)}{n!}.$$

Como a derivada de ordem n de f é contínua no ponto a, e uma vez que o denominador já não se anula podemos calcular o limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - p_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Nota 4.19 *O segundo membro da igualdade anterior designa-se por* ***desenvolvimento de Taylor*** *(ou tayloriano) de ordem n duma função f no ponto a.*

Podemos identificar a expressão deste resto consoante o comportamento da função f.

Existem várias expressões para o resto da fórmula de Taylor devidas aos matemáticos italianos Joseph Louis Lagrange e Giuseppe Peano, ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy e ao matemá tico português Vicente Gonçalves. Não vamos abordar este interessante assunto com detalhe, vamos considerar apenas o resto de Lagrange. Se exigirmos que a existência de derivada de ordem $n+1$ é possível encontrar a seguinte expressão para o resto.

Teorema 4.12 ***(Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)*** *Seja f uma função contínua e $n+1$ vezes diferenciável num intervalo aberto I , $a \in I$. Tem-se que, para qualquer $x \in I$, existe c entre a e x para o qual é possível escrever o resto da fórmula de Taylor como*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ou seja, tem-se que

$$f(x) \quad = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

para algum $c \in (a,x)$ se $a < x$ ou $c \in (x,a)$ se $x < a$.

Omitimos a demonstração deste resultado. Vamos considerar algumas aplicações numéricas e gráficas da fórmula de Taylor.

Exemplo 4.44 *Vamos aproximar a função seno por um polinómio, usando a fórmula de Taylor, tendo em conta que esta função é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \operatorname{sen}$$

Calculemos as derivadas de ordem n no ponto $x = 0$.

$$f(x) = \operatorname{sen} x \implies f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \implies f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \implies f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \implies f'''(0) = -1$$

$$....$$

$$\textit{Logo } f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n = 1,5,9,... \\ -1 & n = 3,7,11,... \\ 0 & n \text{ é par} \end{cases}$$

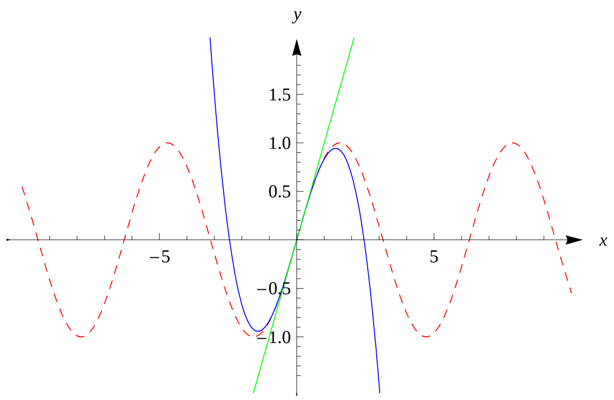


Figura 4.10: Aproximação linear da função seno: $p_1(x) = x$.

O resto de Lagrange é dado pela expressão

$$r_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^n \operatorname{sen} c}{(2n)!} x^{2n}, \text{ com } c \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Este erro corresponde ao erro cometido nas aproximações que se consideram e pode ser majorado por

$$|r_{2n-1}(x)| = \left| \frac{(-1)^n \operatorname{sen} c}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

Claro que quanto maior for a ordem n da aproximação polinomial utilizada menor será o erro $r_n(x)$.

Esta afirmação é ilustrada nas figuras seguintes em que consideramos os seguintes polinómios de Taylor:

$$n = 1 \implies p_1(x) = x$$

$$n = 3 \implies p_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$n = 5 \implies p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$n = 7 \implies p_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$n = 9 \implies p_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

$$n = 11 \implies p_{11}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

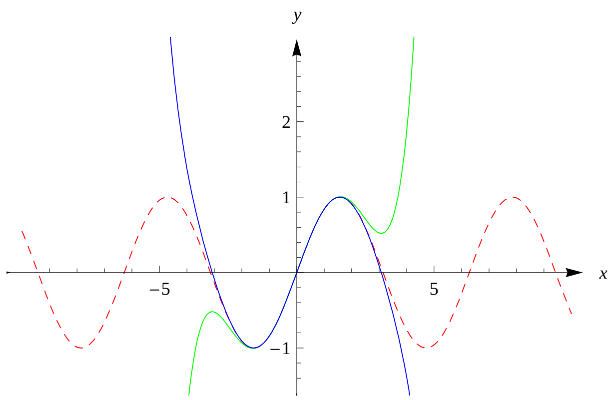


Figura 4.11: Aproximação polinomial da função seno de grau $n = 5$ e $n = 7$.

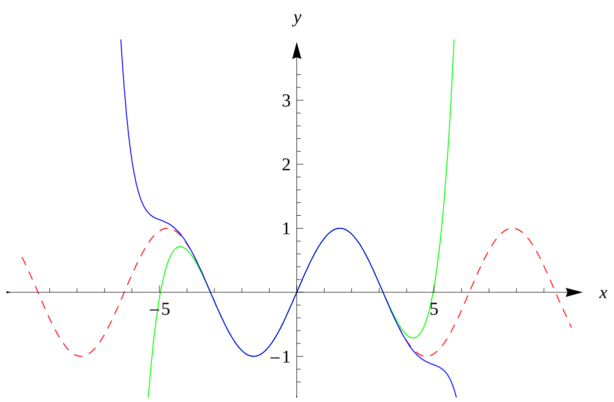


Figura 4.12: Aproximação polinomial da função seno de grau $n = 9$ e $n = 11$.

Exemplo 4.45 *Consideramos a função $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ cujo domínio é o intervalo $]-1, +\infty[$. Vamos aproximar esta função por um polinómio de grau 2, utilizando a fórmula de Taylor no ponto $a = 0$.*

Então:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} \implies f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} \implies f'(0) = \frac{1}{3},$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{5}{3}} \implies f''(0) = -\frac{2}{9},$$

$$f'''(c) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(1+c)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27}(1+c)^{-\frac{8}{3}},$$

$$\text{e } r_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}x^3, \text{ com } c \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Logo:

$$f(x) = p_2(x) + r_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}x^3.$$

Esta igualdade vai fornecer valores aproximados para $\sqrt[3]{x+1}$em que é possível majorar o erro que se comete ao considerar cada uma das aproximações.

Por exemplo se considerarmos $x = 1$ obtemos que:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} = f(1) &= p_2(1) + r_2(1) = \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}} \\ &= \frac{11}{9} + \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

Podemos afirmar que $\frac{11}{9}$ é um valor aproximado do número irracional $\sqrt[3]{2}$. O erro que se comete nesta aproximação em que consideramos a fórmula de Taylor de ordem 2 é dado pelo resto de Lagrange de ordem 2,

$$r_2(1) = \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}.$$

Como $c > 0$ temos que $1 + c > 1$ donde obtemos que $(1+c)^{-\frac{8}{3}} < 1$. Então:

$$r_2(1) = \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}} < \frac{5}{81} < 6,173 \times 10^{-2}.$$

Podemos concluir que o erro cometido ao aproximar $\sqrt[3]{2}$ por $\frac{11}{9}$ é inferior a $6,173 \times 10^{-2}$.

Uma outra aplicação desta fórmula é na determinação de limites de funções.

Exemplo 4.46 *Consideremos o seguinte limite:*

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\log\left(|\cos x|\right) + \dfrac{(x-\pi)^2}{2}}{(x-\pi)^2}$$

Estamos em presença duma indeterminação do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. *Vamos usar a fórmula de Taylor de ordem* 3 *da função* $f(x) = \log\left(|\cos x|\right)$, *que é uma função indefinidamente diferenciável no domínio* $D = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$. *Como* $\pi \in D$ *podemos escrever a fórmula de Taylor de ordem* 3 *da função* f *em potências de* $(x-\pi)$. *Sabemos pelo teorema de Taylor que existe* c *entre* x *e* π *tal que*

$$f(x) = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-\pi)^3.$$

Como:

$$f(x) = \log\left(|\cos x|\right) \implies f(\pi) = 0,$$

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \implies f'(\pi) = 0,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(\cos x)^2} \implies f''(\pi) = -1 \text{ e}$$

$$f'''(c) = -\frac{2\operatorname{sen} c}{(\cos c)^3}$$

temos que

$$f(x) = -\frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{2\operatorname{sen} c}{(\cos c)^3}\frac{(x-\pi)^3}{3!} = -\frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{\operatorname{sen} c(x-\pi)^3}{3\left(\cos c\right)^3}.$$

Calculamos, agora o limite pretendido:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} \frac{\log\left(|\cos x|\right) + \dfrac{(x-\pi)^2}{2}}{(x-\pi)^2} &= \lim_{x\to\pi} \frac{-\dfrac{(x-\pi)^2}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} c(x-\pi)^3}{3\left(\cos c\right)^3} + \dfrac{(x-\pi)^2}{2}}{(x-\pi)^2} \\
&= \lim_{x\to\pi} \frac{-\dfrac{\operatorname{sen} c(x-\pi)^3}{3\left(\cos c\right)^3}}{(x-\pi)^2} = \lim_{x\to\pi} -\frac{x-\pi}{3}\frac{\operatorname{sen} c}{(\cos c)^3} \\
&= 0, \text{ uma vez que quando } x \to \pi \text{ também } c \to \pi.
\end{aligned}$$

4.5 Aplicações da fórmula de Taylor.

4.5.1 Máximos, mínimos, sentido da concavidade e pontos de inflexão duma função

As derivadas de ordem superior à primeira e a fórmula de Taylor são também de grande utilidade no estudo das funções (para as quais existam) assim como no esboço do seu gráfico.

Teorema 4.13 *Seja f uma função n vezes diferenciável numa vizinhança dum ponto a do seu domínio. Se $f'(a) = 0$ e $f^{(n)}(a)$ (com $n > 1$) a primeira derivada que não se anula no ponto a, isto é,*

$$f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

e $f^{(n)}$ é contínua em a, então :

1. *Se n é par, f tem um extremo local no ponto a, que é* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{máximo se } f^{(n)}(a) < 0 \\ \textit{mínimo se } f^{(n)}(a) > 0 \end{array} \right.$
2. *Se n é ímpar, ,f não tem um extremo local no ponto a.*

Demonstração. A derivada de ordem n da função f é contínua em a, logo existe uma vizinhança deste ponto em que a a função $f^{(n)}$ tem o mesmo sinal que $f^{(n)}(a)$. Mas, pelo próprio enunciado sabemos que existe uma vizinhança do ponto a em que a função é n vezes diferenciável. Se intersectarmos estas vizinhanças obtemos uma nova vizinhança $V_\delta(a)$ do ponto a em que as duas condiç ões são verificadas. Podemos escrever, nesta vizinhança, a fórmula de Taylor com resto de Lagrange da função f:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

para algum c entre a e x. Mas, por hipótese, as derivadas de f até á ordem $n-1$ (inclusivé) são nulas, logo podemos escrever

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in V_\delta(a).$$

O que é equivalente a

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in V_\delta(a).$$

Vejamos que:

1. Se n é par, então $(x-a)^n \geq 0$, $\forall x \in V_\delta(a)$,
   pelo que o sinal da diferença $f(x) - f(a)$ é o sinal da derivada $f^{(n)}(c)$
   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se o sinal é positivo, tem-se que } f(x) > f(a),\ \forall x \in V_\delta(a), \\ \qquad \text{logo } f \text{ tem um mínimo no ponto } a \\ \text{Se o sinal é negativo, tem-se que } f(x) < f(a),\ \forall x \in V_\delta(a), \\ \qquad \text{logo } f \text{ tem um máximo no ponto } a \end{array} \right.$
2. Se n é ímpar, então $(x-a)^n$ muda de sinal em torno de a, pelo que, qualquer que seja o sinal de $f^{(n)}(c)$, a diferença $f(x) - f(a)$ terá sinais diferentes para $x < a$ e $x > a$, pelo que f não tem um extremo local no ponto a.

■

Podemos considerar a seguinte consequência imediata deste teorema.

Corolário 4.8 *Seja f uma função 2 vezes diferenciável numa vizinhança dum ponto a do seu domínio. Se $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$ e f'' é contínua no ponto a então tem-se que:*

$$\begin{cases} f''(a) < 0 \implies & f \text{ tem um má ximo no ponto } a, \\ f''(a) > 0 \implies & f \text{ tem um mínimo no ponto } a. \end{cases}$$

Exemplo 4.47 *Consideremos a função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. Tem-se que:*

$$\begin{array}{lllll} f'(x) & = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 & = & 0 \text{ em } & x = 1 \\ f''(x) & = 12x^2 - 24x + 12 & = & 0 \text{ em } & x = 1 \\ f'''(x) & = 24x - 24 & = & 0 \text{ em } & x = 1 \\ f^{(4)}(x) & = 24 & \neq & 0 \text{ em } & x = 1. \end{array}$$

Como $n = 4$ é par e $f^{(4)}(1) > 0$ podemos concluír que f tem um mínimo em $x = 1$.

Exemplo 4.48 *Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$.*

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{2} - \cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mas:

$$f''(x) = \operatorname{sen} x \implies f''\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \text{ e } f''\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

Então pelo corolário anterior podemos concluir que a função f tem um máximo relativo no ponto de abcissa $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e tem um mínimo relativo no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

A segunda derivada duma função é extremamente útil no estudo do sentido das concavidades do gráfico de uma função.

Definição 4.11 *Seja f uma função diferenciável num ponto a. Diz-se que, no ponto $a \in I$, f tem:*

- ***concavidade voltada para cima*** *se o gráfico de f estiver, localmente, acima da sua recta tangente no ponto $(a, f(a))$, isto é, se existir uma vizinhança $V_\delta(a)$ de a, tal que:*
$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a), \ \forall x \in V_\delta(a).$$
- ***concavidade voltada para baixo*** *se o gráfico de f estiver, localmente, abaixo da sua recta tangente no ponto $(a, f(a))$, isto é, se existir uma vizinhança $V_\delta(a)$ de a, tal que:*
$$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a), \ \forall x \in V_\delta(a).$$

Se f for diferenciável em todos os pontos do intervalo I, diz-se que f tem ***concavidade voltada para cima (para baixo)*** *no intervalo I se f tiver esse tipo de concavidade em todos os pontos do intervalo I.*

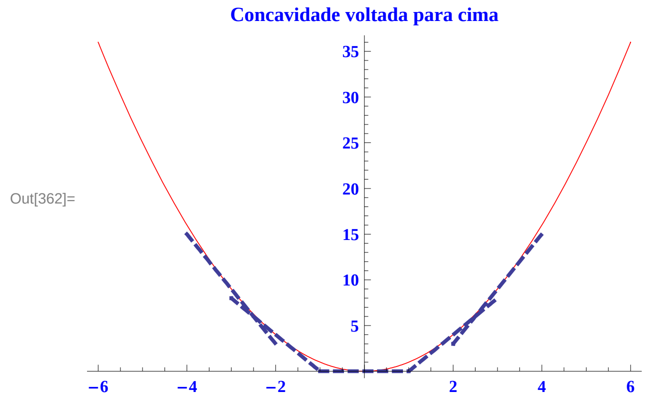


Figura 4.13: O gráfico de uma função com a concavidade voltada para cima: localmente as rectas tangentes ao gráfico da função ficam sempre abaixo do gráfico.

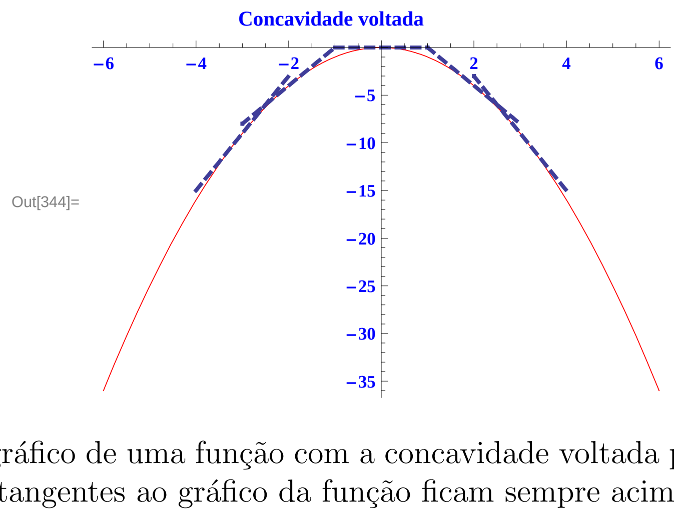


Figura 4.14: O gráfico de uma função com a concavidade voltada para baixo: localmente as rectas tangentes ao gráfico da função ficam sempre acima do gráfico.

Definição 4.12 *Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto I que contem o ponto a. Diz-se que f tem um* ***ponto de inflexão*** *em $a \in I$ se em torno desse ponto ocorrer uma mudança no sentido da concavidade do gráfico da função.*

Teorema 4.14 *Sejam I um intervalo e f uma função com segunda derivada contínua em I. Então:*

1. *O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em todos os pontos x interiores tais que $f''(x) > 0$.*
2. *O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em todos os pontos x interiores tais que $f''(x) < 0$.*

Demonstração. Seja a um ponto interior a I tal que $f''(a) \neq 0$. Como a segunda derivada de f é contínua em I e $f''(a) \neq 0$, existe uma vizinhança $V_\delta(a)$, com $V_\delta(a) \subset I$, onde $f''(x)$ toma o sinal de $f''(a)$, isto é, se $f''(a) > 0$ então $f''(x) > 0$, $\forall x \in V_\delta(a)$, se $f''(a) < 0$ então $f''(x) < 0$, $\forall x \in V_\delta(a)$.

Seja $x \in V_\delta(a)$, pelo teorema de Taylor, existe $c \in V_\delta(a)$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c)\frac{(x-a)^2}{2!}.$$

Para sabermos se o gráfico de f está, localmente, acima da sua recta tangente no ponto $(a, f(a))$, temos que estudar o sinal da diferença:

$$f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a)\right].$$

Mas

$$\begin{aligned} f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c)\frac{(x-a)^2}{2!} - [f(a) + f'(a)(x-a)] \\ &= f''(c)\frac{(x-a)^2}{2!} \end{aligned}$$

O sinal desta diferença depende apenas do sinal de $f''(c)$ que, por sua vez, tem o sinal de $f''(a)$. Podemos concluir que:

1. Se $f''(a) > 0$ então $f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] > 0$, logo o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.
2. Se $f''(a) < 0$ então $f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] < 0$, logo o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

■

Deste teorema podemos tirar a seguinte conclusão, com uma formulação semelhante ao teorema de Fermat, para o caso da primeira derivada.

Corolário 4.9 *Sejam I um intervalo e f uma função com segunda derivada contínua em I. Se f tem um ponto de inflexão num ponto a interior a I, então $f''(a) = 0$.*

Tal como o teorema de Fermat este corolário afirma que o anulamento da segunda derivada (desde que exista) é **condição necessária, mas não suficiente** para a função ter um ponto de inflexão nesse ponto.

Este corolário diz-nos que

$$f \text{ duas vezes diferenciável e com ponto de inflexão em } c \implies f''(c) = 0.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, ou seja,

$$f \text{ duas vezes diferenciável e } f''(c) = 0 \not\Rightarrow f \text{ tem ponto de inflexão em } c.$$

Exemplo 4.49 *Consideremos a função $f(x) = x^4$ cuja segunda derivada é $f''(x) = 12x^2$.*

Esta segunda derivada anula-se para $x = 0$ e, no entanto, $f''(x) > 0$, $\forall x \neq 0$. Então o gráfico desta função tem sempre a concavidade voltada para cima, não existindo pontos de inflexão.

Precisamos de ter informação adicional sobre o comportamento da função para garantir a existência dum ponto de inflexão, facto que é exposto no resultado seguinte.

Teorema 4.15 *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e seja $a \in int\ (I)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$.*

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f,\ f',\ f'', ..., f^{(n)}$ são contínuas em I, e

$$f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad mas \ \ f^{(n)}(a) \neq 0$$

Então:
(i) Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no ponto a;
(ii) Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no ponto a;
(iii) Se n é ímpar, então a é um ponto de inflexão de f.

Demonstração. Como $f^{(n)}(x)$ é contínua e $f^{(n)}(a) \neq 0$, existe uma vizinhança V de a, $V \subset I$, onde $f^{(n)}(x)$ toma o sinal de $f^{(n)}(a)$, isto é, se $f^{(n)}(a) > 0$ então $f^{(n)}(a) > 0$, $\forall x \in V$, se $f^{(n)}(a) < 0$ então $f^{(n)}(a) < 0$, $\forall x \in V$.

Seja $x \in V$. Como f é n vezes diferenciável em I e $V \subset I$, pelo teorema de Taylor existe $c \in V$ tal que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

Por hipótese, $f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$, logo,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Para sabermos se o gráfico de f está, localmente, acima da sua recta tangente no ponto $(a, f(a))$, temos que estudar o sinal da diferença:

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]\,.$$

Mas

$$\begin{aligned} f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n - [f(a) + f'(a)(x-a)] \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Se n é par então $(x-a)^n > 0$, $\forall x \in V \setminus \{a\}$, o que implica que o sinal da diferença anterior é o sinal de $f^{(n)}(c)$. Assim:

(i) se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então $f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] > 0$,
o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no ponto a;
(ii) se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então $f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] < 0$.
o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no ponto a;
Se n é ímpar, então $(x-a)^n > 0$, $\forall x > a$ e $(x-a)^n < 0$, $\forall x < a$, logo o sinal da diferença anterior passa de valores menores do que zero para valores maiores que zero. Assim:
(iii) se n é ímpar, então a é um ponto de inflexão de f. ■
Consideremos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 4.50 *Consideremos a função*

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x.$$

Como $f'(x) = 1 + \cos x$ temos que:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mas $f'''(x) = -\cos x$, logo nos pontos de abcissa $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ temos que: $f'''(k\pi) = 1$, se k é ímpar e $f'''(k\pi) = -1$, se k é par. Podemos concluir, pelo teorema anterior, que os pontos de abcissa $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão.

Exemplo 4.51 *Consideremos a função*

$$f(x) = x^2 (x-1)^3.$$

Como $f''(x) = 2(x-1)(10x^2 - 8x + 1)$ temos que:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{4+\sqrt{6}}{10} \vee x = \frac{4-\sqrt{6}}{10}.$$

Mas $f'''(x) = 6(10x^2 - 12x + 3)$, logo

$$f'''(1) \neq 0,\ f'''\left(\frac{4+\sqrt{6}}{10}\right) \neq 0 \text{ e } f'''\left(\frac{4-\sqrt{6}}{10}\right) \neq 0.$$

Podemos concluir, pelo teorema anterior, que estes três pontos são pontos de inflexão.

Para um estudo mais completo é necessário considerar, ainda, a existência de assímptotas.

Definição 4.13 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e a ponto de acumulação de D. Diz-se que a recta vertical $x = a$ é uma **assímptota vertical** ao gráfico de f, quando se verifica pelo menos uma das quatro igualdades:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Definição 4.14 *Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a recta de equação*

$$y = mx + p,$$

*com $m, p \in \mathbb{R}$, é uma **assímptota à esquerda** ao gráfico de f (resp. **assímptota à direita** ao gráfico de f), se*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0 \quad \textit{(resp.} \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0\textit{)}$$

*Quando $m = 0$, diz-se que o gráfico de f tem uma **assímptota horizontal** à esquerda (resp. assímptota horizontal à direita).*

Proposição 4.2 *Seja f uma função definida num intervalo da forma $] - \infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. O gráfico de f tem uma assímptota à esquerda (resp. assímptota à direita) se e só se existirem e forem finitos os limites:*

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad e \qquad p = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

$$\textit{(resp. } m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad e \qquad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)\textit{)}$$

Neste caso, a assímptota à esquerda (resp. assímptota à direita) é única e a sua equação é

$$y = mx + p.$$

Exemplo 4.52 *Consideremos a função*

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$$

Tem-se que:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1 \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x + 1} - x \right) - 1 \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

Assim, a recta $y = x - 1$ é uma assímptota à direita e à esquerda e a recta $x = -1$ é uma assímptota vertical, conforme se pode observar na figura 4.15.

Estamos em condições de estudar uma função analisando todos os aspectos tratados nesta secção e de esboçar o seu gráfico.

Figura 4.15: O gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ indicando-se as assímptotas $y = x - 1$ e $x = -1$.

4.6 Exercícios Propostos

1) Calcule, usando a definição, a derivada das seguintes funções num ponto genérico $x = a$:

$a)\;\; f(x) = e^x; \qquad b)\;\; f(x) = x^n,\; n \in \mathbb{N}; \qquad c)\;\; f(x) = \operatorname{sen} x; \qquad d)\;\; f(x) = \cos x.$

2) Determine as derivadas das seguintes funções:

$a)\; f(x) = 8x - 24x^2;$ $\qquad b)\; f(x) = \cos x - e^x;$

$c)\; f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x};$ $\qquad d)\;\; f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x};$

$e)\;\; f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{x^2+1};$ $\qquad f)\;\; f(x) = (2x^2 - 1)(x^{-\frac{2}{3}} + x^2);$

$g)\;\; f(x) = x^2 e^{\operatorname{sen} x};$ $\qquad h)\; f(x) = \operatorname{sen}^3 x;$

$i)\;\; f(x) = \log(kx),\; k, x > 0;$ $\qquad j)\;\; f(x) = \log\log x;$

$l)\;\; f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x};$ $\qquad m)\;\; f(x) = \cos \operatorname{arcsen} x;$

$n)\;\; f(x) = (\operatorname{sen} x)^x;$ $\qquad o)\;\; f(x) = (\log x)^x;$

$p)\;\; f(x) = \dfrac{-3x+7}{2x+3};$ $\qquad q)\;\; f(x) = \dfrac{x+1}{\cos 2x};$

$r)\;\; f(x) = \dfrac{\log 2x}{\operatorname{sen} x}.$ $\qquad s)\;\; f(x) = (arctg\,(x))^{\operatorname{arcsen} x}.$

3) Determine a equação da recta tangente à curva $y = x^2 - 4$:

a) no ponto $(x, y) = (3, 5)$;
b) nos pontos em que intersecta o eixo dos xx;
c) nos pontos em que intersecta o eixo dos yy.

4) Determine a equação da recta tangente à curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, no ponto $(-2, 5)$.

5) Determine os valores das constantes a, b e c para os quais os gráficos dos dois polinómios

$$p(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{e} \qquad q(x) = x^3 - c,$$

se intersectam no ponto $(1, 2)$ e admitam a mesma tangente naquele ponto.

6) Determine a função derivada da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$a)\ \ f(x) = |x|\,, \qquad b)\ \ f(x) = e^{-|x|}$

$c)\ \ f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}, \qquad d)\ \ f(x) = x^2 H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

7) Mostre, usando o teorema de Lagrange, que:

a) $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ para $x > 0$;

b) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$;

c) $0 < x - \log(1+x) < x^2$ para $x > 0$.

8) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ três vezes diferenciável com $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$.

Prove que $f'''(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$.

9) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$.
Mostre que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

10) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

(Sugestão: aplique o teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

11) Determine, sempre que existam, os limites seguintes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{x}, \ \alpha \in \mathbb{R}$; *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x)}{x}$; *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \text{sen}\, x}{x^3}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^5}$; *e*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\cot x$; *f*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \ \text{sen}(\frac{a}{x})$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}$; *h*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}$. *i*) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^k - x^k}{\log a^k - \log x^k}, \ k \in \mathbb{N}$; *l*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(\log x)^x}{x}$; *m*) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$;

n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (2-x)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$; *o*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - \cosh(1-x)}{\cos(1-x) - 1}$; *p*) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\text{sen}\, x)^{\text{sen}\, x}$;

q) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (\log x \cdot \log\log x)$; *r*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$; *s*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

12) Encontre a derivada de ordem n das funções:

a) $f(x) = \text{sen}\, x$; *b*) $f(x) = \cos(2x)$; *c*) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

d) $f(x) = \log(1+x)$; *e*) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x - 9$.

13) Determine o polinómio de Taylor de ordem 6 da função $f(x) = \text{sen}\, x$, no ponto $x = \pi/2$.

14) Determine o polinómio de Taylor de ordem n, no ponto $x = 0$ (o polinómio de Mac Laurin) das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 - 1$; *b*) e^x; *c*) $\dfrac{1}{1+x}$;

d) e^{5x-1}; *e*) $\log(x+1)$; *f*) $\operatorname{sen}(2x+3)$.

15) Determine o polinómio de Taylor de ordem n das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $\dfrac{1}{x}$ em $x = 2$; *b*) $\sqrt{x}$ em $x = 1$.

16) Encontre os extremos locais das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 6$; *b*) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;

c) $f(x) = x^2(x-12)^2$; *d*) $f(x) = x \log x$.

17) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) & \text{se } x < 0, \\ b + \operatorname{arctg}(x) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Determine a e b de modo a que f seja contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que, com esses valores, a função f não tem extremos locais.

18) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto zero e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0, \\ \operatorname{arctg}(ax) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Determine a.
b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (considerando o valor de a que determinou).
c) Estude f quanto à diferenciabilidade e determine a sua função derivada.
d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de f.

19) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$

a) Determine os extremos locais (se existirem) de g.
b) O que pode afirmar sobre o número de soluções da equação $f''(x) = 0$.

20) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Calcule $(arctg\,(f(x)) + f\,(arctg\,(x)))'$.

21) Seja $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem necessariamente máximo no intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.
b) A função f é necessariamente limitada.
c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

22) Determine um polinómio do 2^ograu tendo como uma das suas raízes $x = -1$, que toma para $x = 0$ o valor 1 e tal que é máximo para $x = 1$.

23) Entre todos os rectângulos que se podem inscrever numa circunferência de raio r, determine aquele cuja área é máxima.

24) Estude e esboce o gráfico das seguintes funções :

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+2}$; *b*) $g(x) = x + \log\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$; *c*) $h(x) = x \log|x|$.

4.7 Soluções dos exercícios

1) *a*) $f'(a)=e^a$; *b*) $f'(a)=na^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$; *c*) $f'(a)=\cos x$; *d*) $f'(a)=-\operatorname{sen} x$.

2) *a*) $f'(x)=8x-24x^2$;

b) $f'(x)=-\operatorname{sen} x-e^x$;

c) $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$;

d) $f'(x)=-\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^4 x}$;

e) $f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$;

f) $f'(x)=4x(x^{-\frac{2}{3}}+x^2)+(2x-\frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}})(-1+2$

g) $f'(x)=(2\ x\ +x^2\cos x)e^{\operatorname{sen} x}$;

h) $f'(x)=3\cos x\operatorname{sen}^2 x$;

i) $f'(x)=\dfrac{1}{x},\ x>0$;

j) $f'(x)=\dfrac{1}{x\log x}$;

l) $f'(x)=\dfrac{\cos(\operatorname{sen} x)\cos x\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$;

m) $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

n) $f'(x)=\left(\log\operatorname{sen} x+\dfrac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)(\operatorname{sen} x)^x$;

o) $f'(x)=(\log x)^x\left(\log(\log x)+\dfrac{1}{\log x}\right)$;

p) $f'(x)=-\dfrac{23}{(2x+3)^2}$;

q) $f'(x)=\dfrac{\cos(2x)+(2x+1)\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2(2x)}$;

r) $f'(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x-x\log(2x)\cos x}{x\operatorname{sen}^2 x}$.

s) $f'(x)=$
$(arctg(x))^{\operatorname{arcsen} x}\left(\dfrac{\log(arctg(x))}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\operatorname{arcsen}}{(1+x^2)\,a}\right.$

3) *a*) $r(x)=6x-13$; *b*) $r(x)=-4x-8$; $r(x)=4x-8$; *c*) $r(x)=-4$.
4) $r(x)=5$.
5) $a=1,\ b=0$ e $c=-1$.

6) *a*) $D_{f'}=\mathbb{R}\backslash\{0\},\ f'(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

b) $D_{f'}=\mathbb{R}\backslash\{0\},\ f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{e^x}, & x>0\\ e^x, & x<0\end{cases}$.

c) $D_{f'}=\mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$.

d) $D_{f'}=\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x, & x\geq 0.\end{cases}$

11) *a*) α; *b*) 1; *c*) $\dfrac{1}{2}$; *d*) $+\infty$; *e*) 0; *f*) a; *g*) $+\infty$; *h*) $\dfrac{1}{2}$; *i*) 0; *j*) a^k;
l) $+\infty$; *m*) 1; *n*) $\dfrac{2}{\pi}$; *o*) 1; *p*) 1; *q*) 0; *r*) 1; *s*) e.

12) *a*) $f^{(n)}(x) = (\operatorname{sen} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n \bmod 4 = 0; \\ \cos x & \text{se } n \bmod 4 = 1; \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n \bmod 4 = 2; \\ -\cos x & \text{se } n \bmod 4 = 3. \end{cases}$

b) $f^{(n)}(x) = (\cos 2x)^{(n)} = \begin{cases} 2^n \cos 2x & \text{se } n \bmod 4 = 0; \\ -2^n \operatorname{sen} 2x & \text{se } n \bmod 4 = 1; \\ -2^n \cos 2x & \text{se } n \bmod 4 = 2; \\ 2^n \operatorname{sen} 2x & \text{se } n \bmod 4 = 3. \end{cases}$

c) $f^{(n)}(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$

d) $f^{(n)}(x) = (\log(1+x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$

e) $f'(x) = 3x^2 + 10x + 4;\quad f''(x) = 6x + 10;\quad f'''(x) = 6;\quad f^{(n)}(x) = 0 \text{ se } n > 4;$

13) $1 - \dfrac{1}{2!}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4!}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^4 + \dfrac{1}{6!}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^6.$

14) *a*) $-1 + x^3$ se $n \geq 3$;

b) $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!};$

c) $1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n;$

d) $1 + 5x + \dfrac{5^2}{2!}x^2 + \dfrac{5^3}{3!}x^3 + ... + \dfrac{5^n}{n!}x^n;$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k;$

e) $\displaystyle \operatorname{sen} 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} x^k;$

15) *a*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (x-2)^k;$

b) $1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{2^2 2!}(x-1)^2 + \dfrac{3}{2^3 3!}(x-1)^3 - \dfrac{3 \times 5}{2^4 4!}(x-1)^4 +$
$+ \dfrac{3 \times 5 \times 7}{2^5 5!}(x-1)^5 + ... + (-1)^{n+1} \dfrac{3 \times 5 \times ... \times (2n-3)}{2^n n!}(x-1)^n.$

16) *a*) $x = -2$ é ponto de mínimo, mí nimo é $f(-2) = 2$;
b) Não tem extremos;
c) $x = 0$ e $x = 12$ são pontos de mínimo, mínimo é $f(0) = f(12) = 0$;
$x = 6$ é pontos de máximo, máximo é $f(6) = 1296$;
d) $x = \frac{1}{e}$ é ponto de mínimo local, mínimo é $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

17) *a*) $a = 1$ e $b = 0$.

18) *a*) $a = 1$; *b*) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$;
c) Domínio de diferenciabilidade $D_{f'} = \mathbb{R}$ e a função derivada é definida por:

$$f'(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-x} & \text{se } x > 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

d) Estritamente crescente em $]-\infty, 1[$, estritamente decrescente em $]1, +\infty[$
e

$f(1)$ é um máximo absoluto de f.

19) *a*) Os pontos $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de máximo (local) para g e os pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de mínimo (local).

b) Tem um número infinito de soluções.

20) $(arctg\,(f(x)) + f\,(arctg\,(x)))' = \dfrac{1}{1+f^2(x)}f'(x) + f'(arctg\,(x))\dfrac{1}{1+x^2}$.

21) *a*) Verdadeira. *b*) Falsa. *c*) Verdadeira.

22) $p(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x + 1$.

23) O quadrado.

CAPÍTULO 5

Cálculo integral em $\mathbb{R}$

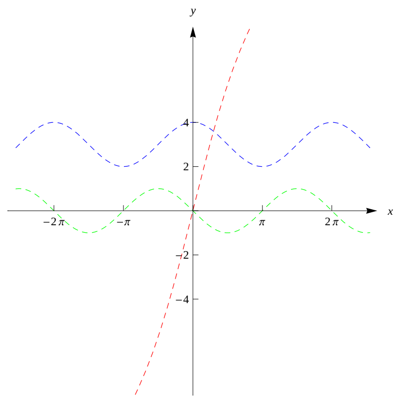


Figura 5.1: São representadas a lei do movimento $x(t) = sen(t) + 3t$ (a vermelho), a velocidade $v(t) = \cos(t) + 3$ (a azul) e a aceleração $a(t) = -sen(t)$ (a verde).

5.1 Primitivação

5.1.1 Introdução

No capítulo anterior, estudámos como à custa de uma função f podemos determinar uma nova função f', a derivada de f. Neste capítulo vamos estudar o problema inverso, a primitivação - dada uma função f encontrar uma função F tal que $F' = f$.

Considere o movimento de um ponto material sobre um eixo, decorrido num certo intervalo de tempo $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Para cada instante $t \in [0, T]$, seja $x(t) \in \mathbb{R}$ a posição correspondente do ponto material. A função $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ assim definida diz-se a lei do movimento. As derivadas $x'(t)$ e $x''(t)$ representam a velocidade e aceleração instantâneas no tempo t. Assim, as funções derivada, $x' : [0, T] \to \mathbb{R}$, e segunda derivada, $x'' : [0, T] \to \mathbb{R}$, dizem-se respectivamente a lei das velocidades e lei das acelerações do movimento.

E se quisermos estudar o problema inverso, isto é, conhecida a lei das velocidades queremos determinar a lei do movimento? Ou conhecida a aceleração queremos determinar a velocidade?

Exemplo 5.1 *Consideremos o caso concreto em que a aceleração é dada por: $a(t) = -\operatorname{sen}(t)$, como queremos determinar a lei da velocidade $v(t)$,ou seja, uma função que tenha como função derivada $a(t)$, então podemos considerar $v(t) = \cos(t) + 3$. Tendo a velocidade, podemos agora determinar uma função que represente a lei do movimento, ou seja, uma função $x(t)$ que tenha como derivada a função $v(t) = \cos(t) + 3$. Uma possibilidade é a função $x(t) = \operatorname{sen}(t) + 3t$ (ver Fig. 5.1).*

Podemos então afirmar que $v(t)$ é uma primitiva de $a(t)$ e que $x(t)$ é uma primitiva de $v(t)$.

Definição 5.1 *Seja f uma função definida num intervalo I de $\mathbb{R}$. Chama-se **primitiva** de f em I, ou simplesmente primitiva de f, a qualquer funçao $F : I \to \mathbb{R}$ que verifique a equação:*

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$

*e escreve-se $Pf = F$ em I, isto é, $Pf(x) = F(x)$, para todo o $x \in I$. Diz-se que f é **primitivável** em I quando f possuí pelo menos uma primitiva em I.*

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 5.2 *Seja* $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Temos que $F_1(x) = 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *é uma primitiva de* f.
Mas $F_2(x) = \pi$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *também é uma primitiva de* f.
Então $F_1(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$,*sendo* c *uma constante é uma primitiva de* f.
Observemos que a função nula é primitivável e que todas as funções constantes são primitivas.

Exemplo 5.3 *Seja* $f(x) = 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Temos que $F_1(x) = 4x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *é uma primitiva de* f.
Mas $F_2(x) = 4x - 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *também é uma primitiva de* f.
Então $F(x) = 4x + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$,*sendo* c *uma constante é uma primitiva de* f.
Mais uma vez observamos que f *é primitivável e que tem infinitas primitivas.*

Nota 5.1 *Seja* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *com mais de um ponto e seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *e seja* $c \in \mathbb{R}$. *Se* $F(x)$ *é uma primitiva de* $f(x)$ *em* I, *então* $F(x) + c$ *é também uma primitiva de* $f(x)$ *em* I, *dado que* $(F(x) + c)' = f(x)$, *para todo o* $x \in I$. *Assim, se* f *é primitivável em* I, *então tem infinitas primitivas em* I.

Proposição 5.1 *Se* f *é primitivável em* I, *então a diferença de duas primitivas de* f *é constante em* I.

Demonstração. Sejam $F_1(x)$ e $F_2(x)$ duas primitivas de f em I. Então $(F_1(x))' = (F_2(x))' = f(x)$.
Logo $(F_1(x))' - (F_2(x))' = (F_1(x) - F_2(x))' = 0$ o que permite concluir que $F_1(x) - F_2(x) = c$, c uma constante em I. ■
Podemos então concluir o seguinte facto.

Proposição 5.2 *Se* $F(x)$ *é uma primitiva de* $f(x)$ *em* I, *o conjunto de todas as primitivas de* $f(x)$ *em* I *é formado pelas funções da forma* $F(x) + c$ *em que* $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.4 *Seja* $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. *Então o conjunto de todas as primitivas de* $f(x)$ *em* I *é formado pelas funções da forma* $x^2 + 3x + c$ *em que* $c \in \mathbb{R}$. *Vejamos a representação gráfica de* $F_1(x) = x^3 - 2$, *com* $c = -2$, $F_2(x) = x3 + 1$, *com* $c = 2$, $F_3(x) = x^3 + 3$, *com* $c = 3$ *e* $F_4(x) = x^3 + 2\pi$, *com* $c = 2\pi$ *(ver Fig. 5.2).*

Nota 5.2 *Outra observação importante é que uma função pode não ser primitivável. A função seguinte não é primitivável em* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \geq 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Se fosse primitivável então qualquer primitiva, F, *seria da forma*

$$F(x) = \begin{cases} x + c & se \quad x > 0 \\ d & se \quad x < 0 \end{cases}$$

mas qualquer que seja o valor que se atribua a $F(0)$, *a função* F *não tem derivada na origem.*

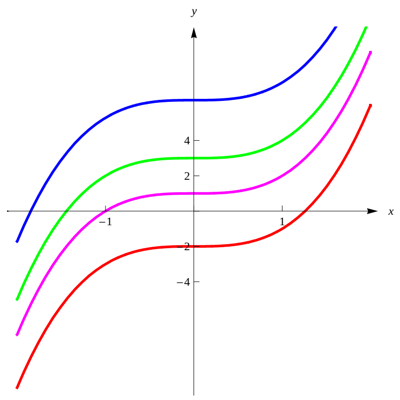


Figura 5.2: Representação gráfica das funções F_1, F_2, F_3 e F_4.

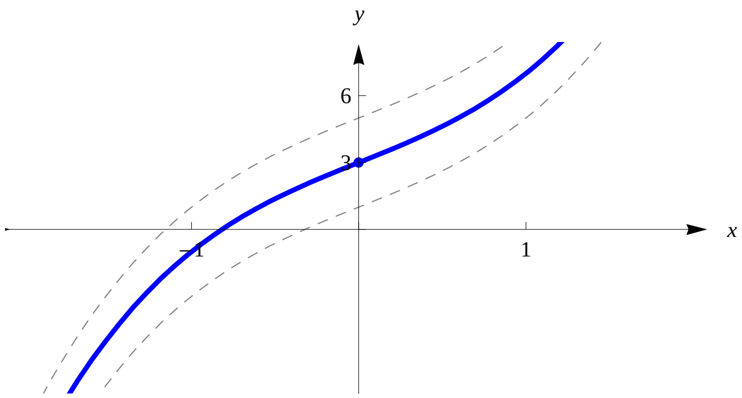


Figura 5.3: Representação gráfica da função $x(t) = t^3+3t+3$ (a azul) e da condição inicial, o ponto $(0, 3)$.

Supomos agora que considerávamos o seguinte problema: a expressão que definia a velocidade dum determinado automóvel era dada por $v(t) = 3t^2 + 3$ e queríamos determinar a lei do movimento, $x(t)$, sabendo que $x(0) = 3$. A expressão duma qualquer primitiva da funç ão $v(t)$ será $x(t) = t^3 + 3t + c$, sendo c uma constante real. Mas temos uma condição inicial, isto é, sabemos que $x(0) = 3$. Ent ão $x(0) = 3 \Leftrightarrow 0 + 0 + c = 3 \Leftrightarrow c = 3$. Ou seja, a lei do movimento é definida duma forma única, pela expressão $x(t) = t^3 + 3t + 3$.

Pode-se provar o seguinte resultado.

Teorema 5.1 *Se f é primitivável em I, para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma e uma só primitiva F de f tal que $F(x_0) = y_0$.*

Nota 5.3 *A condição $F(x_0) = y_0$ diz-se uma **condição inicial** para a equação (diferencial) $F'(x) = f(x)$ e o problema que consiste em determinar uma solução que verifica a condição inicial dada chama-se **problema de Cauchy** ou problema de valores iniciais.*

Tentar determinar uma primitiva de uma dada função nem sempre é um problema fácil. Contudo, em certos casos, conseguimos obter uma primitiva através das regras de derivação.

5.1.2 Primitivas imediatas

As primitivas que resultam directamente, ou através de transformações algébricas, da inversão de uma fórmula de derivação, são chamadas primitivas imediatas.

Seja $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obtemos a seguinte expressão:

$$Pe^x = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Seja $f(x) = \cos\ x\ \forall x \in \mathbb{R}$.Como $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obtemos a seguinte expressão:

$$P\cos\ x = \operatorname{sen}\ x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x\ \forall x \in \mathbb{R}$. Como $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x, \forall x \in \mathbb{R}, x, \forall x \in \mathbb{R}$, obtemos a seguinte expressão:

$$P\operatorname{sen} x = -\cos x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Proposição 5.3 *Consideremos duas funções f e g primitiváveis num intervalo I de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então:*

1. *A função $af(x)$ é primitivável e $P\left(af(x)\right) = aPf(x)$, $\forall x \in I$.*
2. *A função $(f+g)(x)$ é primitivável e $P\left((f+g)(x)\right) = Pf(x) + Pg(x)$, $\forall x \in I$.*

Demonstração. Basta utilizar o teorema análogo para a derivação. ■

Nota 5.4 *Mais geralmente se $f_1, f_2, ..., f_n$ são funções primitiváveis num intervalo I de $\mathbb{R}$ e $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$ então qualquer combinação linear $k_1f_1 + ... + k_nf_n$ é uma função primitivável e $P\left((k_1f_1 + ... + k_nf_n)(x)\right) = k_1Pf_1(x) + ... + k_nPf_n(x)$, $\forall x \in I$.*

Nota 5.5 *Claro que todas as igualdades que envolvem o símbolo P devem ser interpretadas a menos de uma constante arbitrária.*

Exemplo 5.5 *Seja $f(x) = -2\cos\ x + \frac{1}{2}e^x + \pi x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} P(-2\cos x + \frac{1}{2}e^x + \pi x) &= -2P\cos x + \frac{1}{2}Pe^x + \pi Px = -2\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}e^x + \pi\frac{x^2}{2} = \\ &= -2\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}e^x + \frac{\pi}{2}x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nota 5.6 *Consideremos a função $f(x) = \log|f(x)|$, $x \in D$ sendo $D = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$ e f diferenciável$\}$.*

Como $\log|f(x)| = \begin{cases} log(f(x)),\ f(x) > 0 \\ log(-f(x)),\ f(x) < 0 \end{cases}$ *então* $[\log|f(x)|]' = \begin{cases} \dfrac{f'(x)}{f(x)},\ f(x) > 0 \\ \dfrac{-f'(x)}{-f(x)},\ f(x) < 0. \end{cases}$

$$\textit{Logo: } [\log|f(x)|]' = \frac{f'(x)}{f(x)},\ f(x) \neq 0.$$

Então, para $f(x) \neq 0$ temos que:

$$P\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = \log|f(x)| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.6 *Consideremos a função* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = P\left(\frac{x'}{x}\right) = \log|x| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.7 *Consideremos a função* $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, $\forall x \in D = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\}$.

$$P \operatorname{cotg} x = P\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = P\left(\frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x}\right) = \log|\operatorname{sen} x| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.8 *Consideremos a função* $f(x) = \dfrac{x}{2+4x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{x}{2+4x^2}\right) &= \tfrac{1}{8}P\left(\frac{8x}{2+4x^2}\right) = \tfrac{1}{8}P\left(\frac{(2+4x^2)'}{2+4x^2}\right) = \tfrac{1}{8}\log|2+4x^2| = \tfrac{1}{8}\log(2+4x^2) = \\ &= \tfrac{1}{8}\log(2+4x^2) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.9 *Consideremos a função* $f(x) = \dfrac{x}{a+bx}$, *com* a, b *números reais não simultaneamente nulos e* $x \in Df$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{x}{a+bx}\right) &= \tfrac{1}{b}P\left(\frac{bx}{a+bx}\right) = \tfrac{1}{b}P\left(\frac{bx+a-a}{a+bx}\right) = \tfrac{1}{b}P\left(\frac{bx+a}{a+bx} - \frac{a}{a+bx}\right) = \\ &= \tfrac{1}{b}\left[P(1) - P(\frac{a}{a+bx})\right] = \tfrac{1}{b}x - \tfrac{1}{b}\tfrac{a}{b}P(\frac{b}{a+bx}) = \\ &= \tfrac{1}{b}x - \tfrac{a}{b^2}P\left[\frac{(a+bx)'}{a+bx}\right] = \tfrac{1}{b}x - \tfrac{a}{b^2}\log|a+bx| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tal como na nota anterior vamos tentar encontrar uma expressão para uma primitiva de uma função através da inversão duma regra de derivação.

Nota 5.7 *Consideremos a função* $f(x) = (f(x))^{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$, $x \in I$ *sendo* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *onde a função é diferenciável.*

$$\left[(f(x))^{\alpha+1}\right]' = (\alpha+1)f'(x)\,(f(x))^{\alpha} \Leftrightarrow \left[\frac{(f(x))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}\right]' = f'(x)\,(f(x))^{\alpha}.$$

$$\textit{Logo: } P\left[f'(x)\,(f(x))^{\alpha}\right] = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 5.10 *Determinemos primitivas da função* $f(x) = x^\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ *e* $\alpha \neq -1$.

$$P(x^\alpha) = P(1\ x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.11 *Determinemos primitivas da função* $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

$$P\left(\frac{\log^3 x}{x}\right) = P\left(\frac{1}{x}(\log x)^3\right) = P\left((\log x)'(\log x)^3\right) = \tfrac{1}{4}(\log x)^4 =$$

$$= \tfrac{1}{4}\log^4 x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.12 *Determinemos primitivas da função* $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$P\left(x\sqrt{1+x^2}\right) = P\left(\frac{1}{2}(2x)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}P\left((1+x^2)'(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.13 *Determinemos a única função* f *definida em* $\mathbb{R}$ *que verifica:*

$$f''(x) = (1+\operatorname{sen} x)\cos x,\ f'(0) = 1 \ \textit{e}\ f(0) = 3.$$

Tem-se:

$$f'(x) = P(f''(x)) = P[(1+\operatorname{sen} x)\cos x] = P[(1+\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)'] = \frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

Como $f'(0) = 1$, *então* $c_1 = \dfrac{1}{2}$. *Logo* $f'(x) = \dfrac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{2} + \dfrac{1}{2}$. *Então:*

$$f(x) = P(f'(x)) = P\left[\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{2} + \frac{1}{2}\right] = P\left[\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{2\operatorname{sen} x}{2} + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= P\left[1 + \frac{1}{2}\frac{(1-\cos 2x)}{2} + \operatorname{sen} x\right] = x + \frac{1}{4}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) - \cos x + c_2 =$$

$$= \frac{5}{4}x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} - \cos x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $f(0) = 3$, *então* $c_2 = 4$.
Finalmente podemos definir a função f.

$$f(x) = \frac{5}{4}x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} - \cos x + 4.$$

5.1.3 Primitivação por partes

A primitiva da soma de duas funções primitiváveis é a soma das primitivas dessas funções (consequência imediata da correspondente propriedade para as derivadas). Será que o mesmo se passa para o produto? Não! Podemos, no entanto, provar o seguinte resultado.

Teorema 5.2 *(**Primitivação por partes**). Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ com mais de um ponto e sejam f e g duas funções diferenciáveis em I. Então $f'g$ é primitivável em I se e só se fg' o for, e tem-se (em I)*

$$P(f'g) = fg - P(fg').$$

Como f e g são funções diferenciáveis em I, o produto também é uma função diferenciável e $(fg)' = f'g + fg'$. Então $P[(fg)'] = P[f'g + fg']$ donde $fg = Pf'g + Pfg'$. Temos, então, que: $P(f'g) = fg - P(fg')$.

Exemplo 5.14 *Seja $f(x) = x \log x$, com $x \in \mathbb{R}^+$. Fazendo $f'(x) = x$ e $g(x) = \log x$, tem-se*

$$\begin{aligned} Px\log x &= \frac{x^2}{2}\log x - P\frac{x^2}{2}\frac{1}{x} = \frac{x^2}{2}\log x - P\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} = \\ &= \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.15 *Seja $f(x) = \log x$, com $x \in \mathbb{R}^+$. Fazendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = \log x$, tem-se*

$$\begin{aligned} P\log x &= P1\log x = x\log x - Px\frac{1}{x} = x\log x - P1 = x\log x - x = \\ &= x(\log x - 1) + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.16 *Seja $f(x) = e^x \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} Pe^x\cos x &= e^x \operatorname{sen} x - P\left(e^x \operatorname{sen} x\right), \textit{apliquemos novamente o teorema anterior} \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x(-\cos x) - P\left[e^x(-\cos x)\right]\right] = e^x \operatorname{sen} x + e^x\cos x - Pe^x\cos x \\ 2Pe^x\cos x &= e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) \\ Pe^x\cos x &= \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.17 *Seja $f(x) = \cos^2 x$, com $x \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} P\cos^2 x &= P\cos x\cos x = \cos x \operatorname{sen} x - P(-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x) = \cos x \operatorname{sen} x + P\operatorname{sen}^2 x = \\ &= \cos x\operatorname{sen} x + P\left(1 - \cos^2 x\right) = \cos x \operatorname{sen} x + P1 - P\cos^2 x. \\ 2P\cos^2 x &= \cos x \operatorname{sen} x + x. \\ P\cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos x \operatorname{sen} x + x) + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.18 *Seja* $f(x) = \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *com* $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
P\cos^n x &= P\cos^{n-1} x\cos x = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x - P\left[(n-1)\cos^{n-2} x(-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x\right] = \\
&= \cos x \operatorname{sen} x + P\operatorname{sen}^2 x = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)P\left[\cos^{n-2} x\,(1-\cos^2 x)\right] = \\
&= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)P\cos^{n-2} x - (n-1)P\cos^n x. \\
nP\cos^n x &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)P\cos^{n-2} x. \\
P\cos^n x &= \frac{1}{n}\left(\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x\right) + (1-\frac{1}{n})P\cos^{n-2} x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

5.1.4 Primitivação por mudança de variável (ou substituição)

Nesta secção vamos obter um novo método de primitivação como consequência do teorema da derivação da função composta.

Teorema 5.3 ***(Primitivação por substituição)*** *Sejam* $I; J$ *dois intervalos de* $\mathbb{R}$ *com mais de um ponto. Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função primitivável em* I *e seja* $\varphi : J \to I$ *uma bijecção diferenciável em* J *tal que* $\varphi'(t) \neq 0$, *para todo o* $t \in J$. *Suponhamos ainda que a função* $g : J \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *é primitivável em* J. *Então, sendo* G *uma primitiva de* g *em* J, *a funçã o* $G \circ \varphi^{-1}$ *é uma primitiva de* f *em* I. *Isto é, tem-se para todo o* $x \in I$,

$$P(f(x)) = \left[P(f(\varphi(t))\varphi'(t))\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Demonstração. Seja $x = \varphi(t)$, com $t \in J$. Então:

$$\begin{aligned}
\left(G \circ \varphi^{-1}\right)'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x))\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = g(t).\frac{1}{\varphi'(t)} = f((t))\varphi'(t).\frac{1}{\varphi'(t)} = f((t)) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que

$$Pf(x) = \left(G \circ \varphi^{-1}\right)(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

■

Uma das principais dificuldades na primitivação por substituiç ão reside na escolha da mudança de variável adequada. Vamos estudar alguns exemplos.

Exemplo 5.19 *Queremos determinar a* $P\left(\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\right)$ *com* $x \in (1, +\infty)$.

Consideremos a bijecção diferenciável $\varphi : (-\infty, +\infty) \to (1, +\infty)$ *definida por* $\varphi(t) = t^2 + 1$. *Então* $\varphi'(t) = 2t$.

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\right) &= Pf(x) = P\left[f(\varphi(t))\varphi'(t)\right] = P\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t}.2t = 2P\left(t^4 + 2t^2 + 1\right) = \\
&= 2\left(\tfrac{t^5}{5} + \tfrac{2}{3}t^3 + t\right) = 2\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^5}{5} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + \sqrt{x-1} + c, c \in \mathbb{R}\right).
\end{aligned}$$

Exemplo 5.20 *Queremos determinar a* $P\left(\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\right)$ *com* $x \in \mathbb{R}$. *Consideramos a mudança de variável* $e^x = t$, *ou seja, consideramos a bijecção diferenciável* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *definida por* $\varphi(t) = \log t$. *Então* $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t}$.

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right) &= Pf(x) = P\left[f(\varphi(t))\varphi'(t)\right] = P\frac{1}{t+t^{-1}}.\frac{1}{t} = P\frac{1}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t = \\
&= \operatorname{arctg}\left(e^x\right) + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.21 *Calculemos a* $P\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$ *em* $[-a,+a]$ *com* $a > 0$. *Consideremos a bijecção diferenciável* $\varphi : \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right] \to [-a,+a]$ *definida por* $\varphi(t) = a \operatorname{sen} t$. *Então* $\varphi'(t) = a\cos t$.

$$\begin{aligned}
P\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) &= P\left(\sqrt{a^2-(a\operatorname{sen} t)^2}.a\cos t\right) = P\left(\sqrt{a^2\cos^2 t}.a\cos t\right) = P\left(a^2\cos^2 t\right) = \\
&= a^2 P\cos^2 t = a^2 P\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) = a^2\left(P\frac{1}{2} + P\frac{\cos 2t}{2}\right) = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right) = \\
&= \frac{a^2}{2}\left(t + \operatorname{sen} t\cos t\right) = \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) = \\
&= \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

5.1.5 Primitivação de funções racionais

Nesta secção vamos tratar da primitivação de funções racionais, isto é, funções da forma $\dfrac{f}{g}$ em que f, g são polinómios inteiros e $g \neq 0$. O processo clássico consiste em decompor uma tal função em funções racionais mais simples que se possam primitivar por métodos conhecidos.

Para obter uma tal decomposição vamos recordar algumas propriedades dos polinómios.

Definição 5.2 *Chama-se* ***função racional*** *a toda a função definida por*

$$\begin{aligned} f:\ & D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},\ com\ D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

onde $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ *e* $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$, *com* $n, m \in \mathbb{N}$ *e* $a_n, b_m \neq 0$ *são dois polinómios com coeficientes* $a_0, a_1x, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$ *e de graus* n *e* m *respectivamente.*

Definição 5.3 *Dois polinómios* P *e* Q *dizem-se iguais, com* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ *e* $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$, *e denota-se por* $P = Q$ *quando* $P(x) = Q(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tendo como base a definição anterior tem-se o chamado método do coeficientes indeterminados: dados dois polinómios P e Q, com $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$, tem-se que $P = Q$ se e só se $n = m$ e $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$.

Nota 5.8 *Deve-se recordar também que, dado um qualquer par de polinómios* $P, Q \neq 0$, *existe um único par de polinómios* D, R *tal que*

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x), \qquad isto\ é, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde grau de $R <$ *grau de* Q. *A operação que determina* D, R *chama-se divisão, a* P *chama-se dividendo, a* D *dividor, a* Q *quociente e a* R *resto.*

Podemos realçar o caso do quociente ser $Q(x) = x - a$, $a \in \mathbb{R}$. Neste caso tem-se $P(x) = D(x)(x - a) + R(x)$, ou seja, $\dfrac{P(x)}{x - a} = D(x) + \dfrac{R(x)}{x - a}$, com $R(x) = P(a)$ constante. Se, em particular $P(a) = 0$, $P(x)$ é divisível por $x - a$.

Definição 5.4 *Um polinómio* P *de grau* ≥ 1 *diz-se* ***redutível*** *se existirem dois polinómios* P_1 *e* P_2 *de graus menores que o grau de* P, *tais que* $P(x) = P_1(x)P_2(x)$. *O polinómio diz-se* ***irredutível*** *se não for redutível.*

Se $k \neq 0$ é constante, P é irredutível se e só se kP é irredutível. Assim basta considerar polinómios irredutí veis em que o coeficiente do termo de mais alto grau é igual a 1, isto é, da forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + x^n$ - um polinómio unitário.

No que se segue vamos apresentar alguns resultados, de Álgebra, sobre polinómios que não demonstraremos.

Nota 5.9 *Consideremos um polinómio unitário* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + x^n$.

a) Os únicos polinómios irredutíveis desta forma, são os polinómios de grau 1, $P(x) = x - a$ *e os polinómiose grau 2 sem raízes reais,* $P(x) = x^2 + bx + c$, *com* $b^2 - 4c < 0$. *são os polinómios da forma*

$$x - a, \text{ com } a \in \mathbb{R} \qquad e \qquad (x-\alpha)^2 + \beta^2, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \neq 0,$$

onde $\alpha \pm \beta i$ *são as duas raízes complexas conjugadas do polinómio* $(x-\alpha)^2 + \beta^2$.

b) Todo o polinómio P *de grau* ≥ 1 *pode ser escrito, duma forma única, como produto de polinómios irredutíveis da maneira seguinte:*

$$P(x) = (x - a_1)^{n_1} ... (x - a_p)^{n_p} \left[(x-\alpha_1)^2 + \beta^2\right]^{m_1} ... \left[(x-\alpha_q)^2 + \beta^2\right]^{m_q},$$

onde $n_i, m_j \in \mathbb{N}$ *representam o grau de multiplicidade das raízes associadas ao correspondente factor.*

Podemos agora decompor uma função racional em elementos mais simples.

Chama-se **fracção simples** a qualquer fracção racional da forma

$$\frac{A}{(x-a)^r} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Bx + C}{\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]^s}$$

com $r, s \in \mathbb{N}$ e $a, \alpha, \beta, A, B, C \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.4 *(**Decomposição em fracções simples**) Qualquer fracção racional se pode decompor na soma dum polinómio com fracções simples.*

Este teorema permite-nos considerar o processo seguinte de decomposição duma função racional em elementos mais simples, que, como veremos, podem ser primitivados através dos processos de primitivação já estudados.

1) Consideremos uma fracção racional $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em que grau de $R <$ grau de Q.

a) Cada raiz real a de $Q(x)$ de multiplicidade r dá origem a uma soma de r fracções simples da forma

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^r}.$$

b) Cada par de raízes complexas $\alpha \pm \beta\, i$ e $\beta > 0$ de $Q(x)$ de multiplicidade s dá origem a uma soma de s fracções simples da forma

$$\frac{B_1x + C_1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B_2x + C_2}{\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]^2} + ... + \frac{B_sx + C_s}{\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]^s}.$$

2) Consideremos uma fracção racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ em que grau de $P \geq$ grau de Q. Neste caso esta fracção racional pode decompor-se na soma dum polinómio com

outra fracção racional nas condições da alínea 1), basta efectuarmos a operação de divisão que referimos atrás:

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x), \qquad \text{isto é,} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Já vimos em 1) como decompor $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em fracções simples. Obtem-se a decomposição da fracção racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ na soma de um polinómio com um número finito (soma das multiplicidades das raízes reais e dos pares de raízes complexas) de fracções simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = D(x) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{r=1}^{n_i} \frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r} + \sum_{j=1}^{q}\sum_{s=1}^{mj} \frac{B_{js}x + C_{js}}{\left[(x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right]^s}.$$

Depois de termos decomposto uma fracção racional na soma de polinómios e de fracçõe simples é necessário calcular a primitiva de cada uma das parcelas.

Nota 5.10 *Primitivação duma fracção da forma* $\dfrac{A}{(x-a)^r}$

1) $r = 1$,

$$P\frac{A}{x-a} = AP\frac{1}{x-a} = A\log|x-a|$$

2) $r > 1$,

$$P\frac{A}{(x-a)^r} = AP\,(x-a)^{-r} = A\frac{(x-a)^{-r+1}}{-r+1} = \frac{A}{(-r+1)\,(x-a)^{r-1}}$$

$$\textit{Então:} \qquad P\frac{A}{(x-a)^r} = \begin{cases} A\log|x-a| & \textit{se } r = 1, \\ \dfrac{A}{(-r+1)\,(x-a)^{r-1}} & \textit{se } r > 1. \end{cases}$$

Nota 5.11 *Primitivação duma fracção da forma* $\dfrac{Bx+C}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^s}$

1) $s = 1$, *utilizemos o método de substituição com* $x = \alpha + \beta t = \varphi(t)$. *Será* $\varphi'(t) = \beta$.

$$P\frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = P\left[\frac{B(\alpha+\beta t)+C}{\beta^2(1+t^2)}\beta\right] = P\left[\frac{B(\alpha+\beta t)+C}{\beta(1+t^2)}\right] = P\left[\frac{Bt}{1+t^2} + \frac{B\alpha+C}{\beta(1+t^2)}\right] =$$

$$= \frac{B}{2}P\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + \frac{B\alpha+C}{\beta}P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{B}{2}\log|1+t^2| + \frac{B\alpha+C}{\beta}\operatorname{arctg} t =$$

$$= \frac{B}{2}\log\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right] + \frac{B\alpha+C}{\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

2) $s>1$, utilizemos, novamente, o método de substituição com $x=\alpha+\beta t=\varphi(t)$. Será $\varphi'(t)=\beta$.

$$P\frac{Bx+C}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^s}=P\left[\frac{B(\alpha+\beta t)+C}{\left(\beta^2t^2+\beta^2\right)^s}\beta\right]=P\frac{B\beta^2t}{\left(\beta^2t^2+\beta^2\right)^s}+P\frac{B\beta\alpha+C\beta}{\left(\beta^2t^2+\beta^2\right)^s}=$$

$$=\frac{B}{2}P\left(\frac{2\beta^2t}{\left(\beta^2t^2+\beta^2\right)^s}\right)+\frac{B\alpha+C}{\beta^{2s-1}}P\left(\frac{1}{(1+t^2)^m}\right)=\frac{B}{2}\frac{\left(\beta^2t^2+\beta^2\right)^{-s+1}}{-s+1}+\frac{B\alpha+C}{\beta^{2s-1}}P\left(\frac{1}{(1+t^2)^s}\right)=$$

$$=\frac{B}{2(1-s)\left(\beta^2\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+\beta^2\right)^s}+\frac{B\alpha+C}{\beta^{2s-1}}P\left(\frac{1}{(1+t^2)^s}\right).$$

Temos que determinar a $P\left(\frac{1}{(1+t^2)^s}\right)$ *para* $s>1$. *Tem-se que*

$$\frac{1}{(1+t^2)^s}=\frac{t^2+1-t^2}{(1+t^2)^s}=\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}-\frac{t^2}{(1+t^2)^s}=\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}-\frac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^s}.$$

E, utilizando o método de primitivação por partes, tem-se que:

$$P\left(\frac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^s}\right)=\frac{t}{2}\frac{1}{(1-s)\left(1+t^2\right)^{s-1}}-\frac{1}{2(1-s)}P\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}.$$

Então:

$$\begin{aligned}
P\frac{1}{(1+t^2)^s} &= P\left[\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}-\tfrac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^s}\right]=P\left(\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}\right)-P\left(\tfrac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^s}\right)=\\
&=P\left(\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}\right)-\left[\frac{t}{2}\frac{1}{(1-s)\left(1+t^2\right)^{s-1}}-\frac{1}{2(1-s)}P\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}\right]=\\
&=P\left(\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}\right)-\frac{t}{2}\frac{1}{(1-s)\left(1+t^2\right)^{s-1}}+\frac{1}{2(1-s)}P\left(\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}\right)=\\
&=\frac{t}{(2s-2)\left(1+t^2\right)^{s-1}}+\left(1+\frac{1}{2(1-s)}\right)P\left(\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}\right)=\\
&=\frac{t}{(2s-2)\left(1+t^2\right)^{s-1}}+\left(\frac{2s-3}{2s-2}\right)P\left(\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente obtemos uma fórmula de recorrência para esta primitiva:

$$P\frac{1}{(1+t^2)^s}=\frac{t}{(2s-2)\left(1+t^2\right)^{s-1}}+\left(\frac{2s-3}{2s-2}\right)P\left(\frac{1}{(1+t^2)^{s-1}}\right).$$

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 5.22 *Calculemos uma primitiva da função racional* $f(x) = \dfrac{x^4 - x + 1}{x^3 - x^2} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. *O domínio desta função é o conjunto* $D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} = \setminus \{0, 1\}$.

O grau do polinómio P *é superior ao grau do polinómio* Q*, estamos num caso em que é necessário efectuar a divisão inteira de polinómios.*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \textit{ou seja, neste caso,} \qquad \frac{x^4 - x + 1}{x^3 - x^2} = x + 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x^2}$$

O grau do polinómio $R(x) = x^2 - x + 1$ *já é inferior ao grau do polinómio* $Q(x) = x^3 - x^2$*, podemos decompor a fracção racional* $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ *em fracções simples. O denominador* $Q(x) = x^3 - x^2$ *tem duas raízes reais:*

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0 & \textit{com multiplicidade} & r_1 = 2 \\ a_2 = 1 & \textit{com multiplicidade} & r_2 = 1. \end{array}$$

Então:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2\,(x - 1)} = \frac{A}{x - 0} + \frac{B}{(x - 0)^2} + \frac{C}{x - 1}.$$

Determinemos os coeficientes através do método dos coeficientes indeterminados. Logo:

$$x^2 - x + 1 = Ax\,(x - 1) + B\,(x - 1) + Cx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = (A + C)x^2 + (-A + B)x - B \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ -A + B = -1 \\ -B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ A = 0 \\ B = -1. \end{cases}$$

Logo

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x - 1}.$$

Então:

$$\frac{x^4 - x + 1}{x^3 - x^2} = x + 1 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} = x + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x - 1}.$$

Donde:

$$P\left(\frac{x^4 - x + 1}{x^3 - x^2}\right) = P(x + 1) + P\left(-\frac{1}{x^2}\right) + P\left(\frac{1}{x - 1}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x} + \log|x - 1| + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.23 *Calculemos uma primitiva da função racional*

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}.$$

O domínio desta função é o conjunto $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *O grau do polinómio* $R(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 + 7$ *já é inferior ao grau do polinómio* $Q(x) = (x-1)\left(x^2+2\right)^2$, *podemos decompor a frac ção racional* $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ *em fracções simples. O denominador* $Q(x) = (x-1)\left(x^2+2\right)^2$ *tem uma ra íz real e um par de raízes complexas:*

$$\begin{array}{lll} a = 1 & \textit{com multiplicidade} & r_1 = 1 \\ \alpha \pm \beta i = \pm\sqrt{2}i & \textit{com multiplicidade} & s_1 = 2. \end{array}$$

$$\frac{x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Determinemos os coeficientes através do método dos coeficientes indeterminados.

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7 = A\left(x^2+2\right)^2 + (Bx+C)(x-1)\left(x^2+2\right) + (Dx+E)(x-1)$$

Fazendo $x = 1$, *tem-se que* $A = 1$. *Podemos simplificar um pouco mais e obtemos a igualdade:*

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7 = (1+B)x^4 + (C-B)x^3 + (2B - C + 4)\,x^2 + (2C - 2B - D + E)\,x - 2C + 4 - E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + B = 1 \\ C - B = -1 \\ 2B - C + 4 = 6 \\ 2C - 2B - D + E = 4 \\ -2C + 4 - E = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = -1 \\ D = 1 \\ E = -1. \end{cases}$$

Logo

$$\frac{x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x^2+2} + \frac{x-1}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x^2+2} + \frac{x}{\left(x^2+2\right)^2} - \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Então:

$$P\left[\frac{x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}\right] = P\left(\frac{1}{x-1}\right) + P\left(\frac{-1}{x^2+2}\right) + P\left(\frac{x}{\left(x^2+2\right)^2}\right) - P\left(\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}\right).$$

Calculemos cada uma das primitivas:

$$P\left(\frac{1}{x-1}\right) = \log|x-1|.$$

$$P\left(\frac{-1}{x^2+2}\right) = -P\left(\frac{1}{x^2+2}\right) = -P\left(\frac{1}{2\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]}\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}P\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

$$P\left(\frac{x}{\left(x^2+2\right)^2}\right) = \tfrac{1}{2}P\left(2x\left(x^2+2\right)^{-2}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{\left(x^2+2\right)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2\left(x^2+2\right)}.$$

Falta apenas calcular a $P\left(\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}\right)$.

$$P\left(\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}\right)=\frac{1}{2}P\left(\frac{2}{\left(x^2+2\right)^2}\right)=\frac{1}{2}P\left(\frac{2+x^2-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\right)=\frac{1}{2}P\left(\frac{2+x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\right)-\frac{1}{2}P\left(\frac{x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\right).$$

Mas:

$$\frac{1}{2}P\left(\frac{2+x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\right)=\frac{1}{2}P\left(\frac{1}{x^2+2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\frac{1}{2}P\left(\frac{x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\right)=\frac{1}{4}P\left(x\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}\right)=\frac{1}{4}\left[-x\frac{1}{x^2+2}-P\left[-1\frac{1}{x^2+2}\right]\right]=$$

$$=-\frac{1}{8}\log|x-2|+\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{8}\log|x-2|+\frac{\sqrt{2}}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Finalmente obtemos que:

$$P\left[\frac{x^4-x^3+6x^2-4x+7}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}\right]=\log|x-1|-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2(x^2+2)}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+$$

$$-\frac{1}{8}\log|x-2|+\frac{\sqrt{2}}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

$$P\left[\frac{x^4-x^3+6x^2-4x+7}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}\right]=\frac{7}{8}\log|x-2|-\frac{3\sqrt{2}}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2(x^2+2)}+c, c\in\mathbb{R}.$$

Muitas vezes necessitamos de calcular uma primitiva que através duma substituição se reduz à primitivação de funções racionais.

Exemplo 5.24 *Calculemos a*

$$P\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}\ \text{ em }\ (0,+\infty).$$

Como m.m.c.$\{2,3,4\}=12$ *seja* $x=t^{12}$.

Consideremos a bijecção diferenciável $\varphi:\mathbb{R}^+\to(0,+\infty)$ *definida por* $\varphi(t)=t^{12}$. *Então* $\varphi'(t)=12t^{11}$.

$$P\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}=P\left[\frac{1}{t^6\left(t^4+t^3\right)}12t^{11}\right]=12P\left(\frac{t^2}{t+1}\right).$$

Estamos perante uma primitiva de uma função racional.

$$12P\left(\frac{t^2}{t+1}\right)=12P\left(\frac{t^2-1+1}{t+1}\right)=12P\left(\frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}\right)=12P\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right).$$

$$12P\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)=12\left[Pt-P1+P\frac{1}{t+1}\right]=12\left[\frac{t^2}{2}-t+\log|t+1|\right].$$

Então:

$$P\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}=12\left[\frac{t^2}{2}-t+\log|t+1|\right]=6\sqrt[6]{x}-12\sqrt[12]{x}+\log\left(\sqrt[12]{x}+1\right)+c, c\in\mathbb{R}.$$

5.1.6 Exercícios Propostos

1) Calcule as seguintes primitivas, tendo em conta um intervalo onde elas se verifiquem:

a) $4x+3$; *b*) $(x^2+1)^3$; *c*) $\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}$; *d*) $\sqrt{2x}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}$;

e) e^{x+3}; *f*) e^{5x+8}; *g*) $x\,\sqrt[3]{2-3x^2}$; *h*) $\dfrac{x}{x^2+7}$;

i) $e^x \operatorname{sen} e^x$; *j*) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$; *k*) $\dfrac{3\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$; *l*) $\dfrac{(\log x)^2}{x}$;

m) $\dfrac{x}{1+x^2}$; *n*) 5^x; *o*) 2^{3x+1}; *p*) $3^x 5^{2x}$;

q) $\operatorname{tg}^2 x$; *r*) $\cos^3 x$. *s*) $\dfrac{x+1}{x^2+2x}$; *t*) $\dfrac{x^2}{1+x^6}$;

u) $\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}}{4}$; *v*) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$. *x*) $\dfrac{3}{(x+2)^2}$; *z*) $\dfrac{1}{x^2+x+4}$.

2) Resolva as seguintes equações diferencias, sujeitas às condições dadas:

a) $f'(x)=12x^2-6x+1,\ \ f(1)=5;$

b) $f''(x)=4x-1,\ \ f'(2)=-2,\ \ f(1)=3.$

c) $f'(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\ \ f(0)=2.$

3) Se um automóvel parte do repouso, qual a aceleração constante

que lhe permitirá percorrer 150 metros em 10 segundos?

4) Determine uma primitiva da função:

$a)$ $3\,\mathrm{sen}\,x + 2x^2$; $b)$ $\dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}^2\,x}$; $c)$ $\sinh(\cos x)\,\mathrm{sen}\,x$; $d)$ $\sinh(2x$ ...

$e)$ $\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}$; $f)$ $\cos^3 x\,\mathrm{sen}^2\,x$; $g)$ $\mathrm{sen}^3\,x$; $h)$ $\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right.$ ...

$i)$ $\dfrac{x}{\cos^2(x^2)}$; $j)$ $\dfrac{x + (arc\,\mathrm{sen}\,(3x))^2}{\sqrt{1-9x^2}}$; $k)$ $\dfrac{\mathrm{sen}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+\cos\sqrt{x})}$; $l)$ $\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x + 2}$;

$m)$ $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}\,x - 1}}$; $n)$ $(1+\mathrm{tg}^2\,x)\,\mathrm{tg}\,x$; $o)$ $\dfrac{\mathrm{sen}\,2x}{1+\cos^2 x}$; $p)$ $\dfrac{arc\,\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$q)$ $\dfrac{x}{\cos^2(3-2x^2)}$; $r)$ $\dfrac{\sqrt{\mathrm{arctg}\,x}}{1+x^2}$; $s)$ $\dfrac{e^{4x}}{(3+e^{4x})^2}$; $t)$ $\dfrac{\log x}{x} +$ ... $+\dfrac{1}{x\log x\log}$ ...

$u)$ e^{x+e^x}; $v)$ $\dfrac{\sqrt{1+\log x^3}}{x}$; . $x)$ $\dfrac{x + e^{\mathrm{arctg}\,x\left(\frac{1}{x}\right)}}{x^2+1}$; $z)$ $\mathrm{sen}\,(\log x)$ ...

5) Determine a função f que verifica as condições:

$a)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\;\; f'(x) = \cos^2 x\,\mathrm{sen}^2\,x$ e $f(0) = 1$.

$b)$ $f:]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,\to\mathbb{R},\;\; f'(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^4-1)^3}}$, $f(2) = 0$ e $f(-2) = 1$.

$c)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\;\; f'(x) = \dfrac{(1+2\;\mathrm{arctg}\,x)^3}{1+x^2}$ e $f(0) = 0$.

$d)$ $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\;\; f''(x) = 3x + \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

$f(0) = 0,\;\; f'(e+1) = 1,\;\; f(e+1) = 0$ e $f'(0) = 0$.

6) Usando o método de primitivação por partes determine as seguintes primitivas, tendo em conta um intervalo onde elas sejam válidas:

$a)\ xe^x$; $b)\ x^2e^x$; $c)\ x \operatorname{sen} x$; $d) x\cos x$;

$e)\ x\ 2^x$; $f)\ \operatorname{sen}^2 x$; $g)\ e^x \operatorname{sen} x$; $h)\ x\log x$;

$i)\ \log x$; $j)\ \dfrac{\log(\log x)}{x}$; $k)\ x^2 \operatorname{sen} x$; $l)\ x\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$;

$m)\ x^3e^{-x^2}$; $n)\ \dfrac{x^7}{(1-x^4)^2}$; $o)\ \log(2x+3)$; $p)\ x^2\sinh x$;

$q)\ x\ \operatorname{arctg}^2 x$; $r)\ \dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$; $s)\dfrac{\log(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$; $t) x\ arcsen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$u)\ \operatorname{sen}(\log(x)+1)$; $v)\ \dfrac{\log(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$. $x)\ 3x\sqrt{1-x^2}arc\operatorname{sen} x$; $z)\ \log\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$.

7) Determine as seguintes primitivas, usando as substituições indicadas:

$a)\ x\sqrt{x-1}$, $\qquad t=\sqrt{x-1}$;

$b)\ x(5x^2-3)^7$, $\qquad t=5x^2-3$;

$c)\ \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, $\qquad t=\sqrt{x+1}$;

$d)\ \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $\qquad \operatorname{tg} t=\sqrt{x}$;

$e)\ \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$, $\qquad t=e^x$;

$f)\ \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $\qquad x=\operatorname{sen}^2 t$.

8) Usando o método de primitivação por substituição determine as seguintes primitivas, tendo em conta um intervalo onde elas sejam válidas:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}$; *b*) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$; *c*) $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$; *d*)$x\left(2x+5\right)^{10}$;

e) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$; *f*) $e^{\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; *g*) $\dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; *h*) $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$;

i) $\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; *j*) $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{9-x^2}}$; *k*) $\dfrac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}$; *l*) $\dfrac{\log 2x}{x\log 4x}$;

m) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$; *n*) $\sqrt{1+\sqrt{x}}$; *o*) $x\sqrt{2+x}$; *p*) $\dfrac{\sqrt[4]{1-x}-1}{\left(1-x\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$;

q) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$; *r*) $\dfrac{1}{\sinh x}$; *s*)$\dfrac{e^{3x}+3e^{2x}+6}{e^{3x}+3e^x}$; *t*)$\dfrac{2\log x-1}{x\log x\left(\log x-1\right)^2}$

u) $\dfrac{1}{\sqrt{x\left(1-x\right)}}$; *v*) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$. *x*) $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+x}}$; *z*) $\dfrac{x\log x}{\sqrt{1-x^2}}$(1^{o}por partes).

9) Calcule uma primitiva para cada uma das seguintes funções racionais:

a) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$; *b*) $\dfrac{1}{x^2-a^2}$; *c*) $\dfrac{2x}{\left(x+2\right)\left(x-3\right)}$; *d*) $\dfrac{x^3}{x-1}$;

e) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; *f*) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$; *g*) $\dfrac{x+2}{x^2-4x+4}$; *h*) $\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$;

i) $\dfrac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}$; *j*) $\dfrac{x+1}{x^3\left(x-2\right)^2}$; *l*) $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$; *m*) $\dfrac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$;

10) Primitive cada uma das seguintes funções em intervalos a determinar:

a) $\dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$; *b*) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$; *c*) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; *d*) $\dfrac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$;

e) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; *f*) x^7; *g*) $\operatorname{sen}^3 x$; *h*) $\operatorname{tg} 3x$;

i) $\dfrac{7}{2x+3}$; *j*) $\dfrac{1}{e^x-1}$; *k*) $\dfrac{4x+3}{x^2-5x+6}$; *l*) $\dfrac{\cos(\arcsin x)}{\sqrt{1+x^2}}$;

m) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2x)$; *n*) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x$; *o*) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$; *p*) $\dfrac{1}{x^3}\cos\dfrac{1}{x}$;

q) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}$; *r*) $\dfrac{\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}$; *s*) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$; *t*) $x(x^2+1)\operatorname{arctg} x$;

u) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$; *v*) $\dfrac{\operatorname{arctg}(\log x^2)}{x\left(1+\log^2 x^2\right)}$; *x*) $\cos 2x \log(\operatorname{tg} x)$; *z*) $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x - \cos x}$.

11) Determine a função posição de uma partícula que se move com a velocidade $v(t) = \cos(\pi t)$ ao longo do eixo dos xx, sabendo que em $t = 0$ a partícula tem coordenada $x = 4$.

12) Determine uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as condições seguintes:

$$g''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} g'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}.$$

13) Suponha que uma nave espacial intergaláctica usa vela e "vento solar" para produzir uma aceleração constante 0.032 m/s^2. Sabendo que a velocidade da nave é de 10 000 m/s quando a vela é desfraldada pela primeira vez, até onde viajará a nave em 1 hora e qual será a sua velocidade?

14) Determine a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{2x} - 1}{e^x + 3e^{3x}}, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \\ f(0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3}. \end{cases}$$

15) Determine a primitiva da função definida por

$$f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

que toma o valor zero para $x = \pi^2$.

16) Uma bola é atirada directamente para cima com uma velocidade inicial de 49 m/s,

a partir de um ponto a $8m$ do solo. Qual a altura máxima a que chega a bola?

17) Determine todas as funções $f(x)$ tais que:

$$\begin{cases} f'(x) = \log^2 |x|, \\ \\ f(1) + f(-1) = 0. \end{cases}$$

18) Um ponto percorre o eixo dos xx com aceleração $12 - 8t$ m/s^2 em cada instante t.

Sabendo que ocupava a posição $x = 0$ no instante $t = 0$ e

tinha velocidade 0 nesse instante, calcule:

a) a sua velocidade no instante $t = 2$;

b) a sua posição no instante $t = 3$ segundos;

c) a sua velocidade positiva máxima durante todo o movimento e

o instante em que essa velocidade foi atingida;

d) excluindo o instante inicial $t = 0$, o ponto esteve parado em mais algum instante?

5.1.7 Soluções dos exercícios

1) Em todas as alíneas $c \in \mathbb{R}$

$a)2x^2 + 3x + c;$ $b)\dfrac{x^7}{7} + \dfrac{3}{5}x^5 + x^3 + x + c;$ $c) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{3}{x} + c;$

$d)\sqrt{2x^3} + c;$ $e)e^{x+3} + c;$ $f)\dfrac{e^{5x+8}}{5} + c;$

$g) - \frac{1}{8}\left(2 - 3x^2\right)^{\frac{4}{3}} + c;$ $h)\frac{1}{2}\log\left(x^2 + 7\right) + c;$ $i) - \cos e^x + c;$

$j) - \frac{5}{8}\left(1 - 2x\right)^{\frac{4}{5}} + c;$ $k) - \dfrac{3}{1 + \cos x} + c;$ $l)\dfrac{(\log x)^3}{3} + c;$

$m)\frac{1}{2}\log\left(1 + x^2\right) + c;$ $n)\dfrac{5^x}{\log 5} + c;$ $o)\dfrac{2^{3x+1}}{3\log 2} + c;$

$p)\dfrac{75^x}{\log 75} + c;$ $q) - x + \operatorname{tg} x + c;$ $r)\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + c;$

$s)\frac{1}{2}\log\left|x^2 + 2x\right| + c;$ $t)\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(x^3\right) + c;$ $u)6\sqrt{x} + \frac{1}{10}\sqrt{x^5} + c;$

$v)\frac{1}{2}\log\left|x^2 + x + 1\right| -$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + c;$ $x) - \dfrac{3}{x + 2} + c;$ $z)\dfrac{2}{\sqrt{15}}$
$\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + c.$

2) $a)$ $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 3.$

$b)$ $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 8x + \frac{65}{6}.$

$c)$ $f(x) = \frac{1}{2}\log\left(x^2 + 1\right) + 2.$

3) $a = 3m/s^2.$

4)

$a) -3\cos x + \frac{2}{3}x^3$; $b) -\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$; $c) -\cosh(\cos x)$; $d) \frac{1}{3}(\cosh(2x+1))^{\frac{3}{2}}$;

$e) \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$; $f) \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$; $g) -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3}$; $h) \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$;

$i) \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$; $j) -\dfrac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} + \dfrac{1}{9}(\operatorname{arcsen} 3x)^3$; $k) -2\log|1+\cos\sqrt{x}|$; $l) -\log|\cos x + 2|$;

$m) 2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$; $n) \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$; $o) \cos(\cos x)$; $p) \dfrac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{2}$;

$q) -\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}(3-2x^2)$; $r) \dfrac{2\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3}}{3}$; $s) -\dfrac{1}{4(3+e^{4x})}$; $t) \dfrac{\log^2 x}{2} + \log(\log x) + \log|\log(\log x)|$;

$u) e^{e^x}$; $v) \dfrac{2}{9}\sqrt{(1+3\log x^3)^3}$; $x) \frac{1}{2}\log(x^2+1) - e^{\operatorname{arctg} x\left(\frac{1}{x}\right)}$; $z) -\cos(\log x)$.

5)

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + 1.$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{x^4-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{15}} & \text{se } x > 1 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x^4-1}} + 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{15}} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{(1+2\ \operatorname{arctg} x)^4}{4} - \frac{1}{8}.$$

$$d) \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^3 + \log|1-x| - x & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{2}x^3 + \log|1-x| - x\left(1 - \frac{3}{2}(e+1)^2 + \frac{1}{e}\right) - \\ -\frac{1}{2}(e+1)^3 - 1 - (e+1)\left(1 - \frac{3}{2}(e+1)^2 + \frac{1}{e}\right) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

6) Em todas as alíneas $c \in \mathbb{R}$

$a) e^x(x-1)+c;$

$b) e^x(x^2-2x-2)+c;$

$c) -x\cos x+\operatorname{sen} x+c;$

$d) x\operatorname{sen} x+\cos x+c;$

$e) 2^x\left(\dfrac{x}{\log 2}-\dfrac{1}{(\log 2)^2}\right)+c;$

$f) -\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x\cos x+x)+c;$

$g) \dfrac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x-\cos x)+c;$

$h) \dfrac{x^2}{2}(\log x-\frac{1}{4})+c;$

$i) x\log x-x+c;$

$j) \log x\log(\log x)-$
$-\log x+c;$

$k) -x^2\cos x+$
$+2x\operatorname{sen} x+2\cos x+c;$

$l) \dfrac{x}{\cos x}-$
$-\log\left|\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\cos x}\right|+c;$

$m) -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+c;$

$n) \dfrac{x^4}{4(1-x^4)}+$
$+\dfrac{1}{4}\log|1-x^4|+c;$

$o) \left(x+\dfrac{3}{2}\right)\log(2x+3)-$
$-x+c;$

$p) (x^2+2)\cosh x-$
$-2x\sinh x+c;$

$q) \left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)\operatorname{arctg}^2 x-$
$-x\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\log(x^2+1);$

$r) \dfrac{2}{3}x^3\sqrt{1+x^3}-$
$-\dfrac{4}{9}\sqrt{(1+x^3)^3}c;$

$s) \arcsin x\log(\arcsin x)-$
$-\arcsin x+c;$

$t) \dfrac{x^2}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)-$
$-\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+c;$

$u) \dfrac{1}{2}x\operatorname{sen}(\log(x)+1)-$
$-\dfrac{1}{2}x\cos(\log(x)+1)+c;$

$v) \operatorname{tg} x(\log(\operatorname{tg} x)-1)+c;$

$x) \sqrt{(1-x^2)^3}arc\operatorname{sen} x+$
$+x-\dfrac{x^3}{3}+c;$

$z) x\log\left(\dfrac{1}{x}+1\right)+$
$+\log|x+1|+c.$

7) $a)$ $\dfrac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\dfrac{2}{3}(x-1)^{3/2}+c;$

$b)$ $\dfrac{1}{80}(5x^2-3)^8+3+c;$

$c)$ $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x+1}-\dfrac{4}{3}\sqrt{x+1}+c=\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}-2(x+1)^{1/2}+c;$

$d)$ $x\ \operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c;$

$e)$ $e^x-\operatorname{arctg}(e^x)+c;$

$f)$ $-x+\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\cos x}+c.$

8)

$a)$ $\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+c;$

$b)$ $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-$
$-2(x+1)^{1/2}+c;$

$c)$ $\frac{2}{3}e^x\sqrt{e^x+1}-$
$-\frac{4}{3}\sqrt{e^x+1}+c;$

$d)$ $\frac{(2x+5)^{12}}{48}-$
$-\frac{5}{11}(2x+5)^{11}+c;$

$e)$ $\operatorname{arctg}(e^x)+c;$

$f)$ $e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}+c;$

$g)$ $\arcsin\left(\frac{1}{2}e^x\right);$

$h)$ $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+c;$

$i)$ $-2\cos\sqrt{x}+c;$

$j)$ $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-$
$-\frac{3}{2}x\sqrt{1-\frac{x^2}{9}};$

$k)$ $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\log x)^3}-$
$-2\sqrt{1+\log x}+c;$

$l)$ $\log|\arcsin x|+c.$

$m)$ $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c;$

$n)$ $4\left(\frac{\sqrt{(1+\sqrt{x})^5}}{5}-\frac{\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}}{3}\right)+c;$

$o)$ $2\left(\frac{\sqrt{(2+x)^5}}{5}-2\frac{\sqrt{(2+x)^3}}{3}\right)+c;$

$p)$ $-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1-x}+$
$+\log\frac{|1-x|}{\sqrt{\sqrt{1-x}+1}}+c;$

$q)$ $-6\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-$
$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}++\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+$
$+6\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x})-3\log(1+\sqrt[3]{x})+c;$

$r)$ $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+c;$

$s)$ $\frac{2}{e^x}+x-\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{e^x}\right)}{\sqrt{3}}+$
$+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{3}{e^{2x}}\right)+c;$

$t)$ $-\frac{1}{\log x-1}+\log(\log x-1)-$
$-\log(\log x)+c;$

$u)$ $\arcsin(2x-1)+c;$

$v)$ $-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3x^3}+c;$

$x)$ $4\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+x}\right)+$
$+2\sqrt{1+x}(\log x-2)+c;$

$z)$ $\sqrt{1-x^2}+$
$+\log x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)-$
$-\log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)+c.$

9)

$a)$ $x - \operatorname{arctg} x + c$;

$b)$ $\dfrac{1}{2a}\log(x-a) -$

$-\dfrac{1}{2a}\log(x+a) + c;$

$c)$ $\dfrac{4}{5}\log(x+2) +$

$+\dfrac{6}{5}\log(x-3) + c;$

$d)$ $x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 +$

$+\log(x-1) + c;$

$e)$ $x + \dfrac{1}{2}\log(x-1) -$

$-\dfrac{1}{2}\log(x+1) + c;$

$f)$ $\dfrac{1}{2}\log(x-3) -$

$-\dfrac{1}{2}\log(x-1) - \dfrac{1}{2x+2} + c;$

$g)$ $\log(x-1) - \dfrac{4}{x-2} + c;$

$h)$ $x + \log x -$

$-2\log(x+1) + c;$

$i)$ $x + \log|x| -$

$-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + c;$

$j)$ $\dfrac{7}{16}\log|x| - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{8x^2} -$

$-\dfrac{7}{16}\log|x-2| - \dfrac{3}{8}\dfrac{1}{x-2} + c;$

$l)$ $\log\dfrac{(x-1)^2}{|x(x+1)|} + c;$

$m)$ $-\dfrac{x}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c;$

10)

$a)\ \log|\cos x + \operatorname{sen} x| + c;$

$b)\ -\log|\cos x + 1| + c;$

$c)\ x - 2\sqrt{x} + $
$+2\log|1+\sqrt{x}| + c;$

$d)\ \log|3\sqrt[3]{x}+1| + c;$

$e)\ 2\sqrt[4]{x^2} - 4\sqrt[4]{x} +$
$+\log\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + c;$

$f)\ \frac{1}{8}x^8 + c;$

$g)\ -\cos x +$
$+\frac{1}{3}\cos^3 x + c;$

$h)\ -\frac{1}{3}\log|\cos 3x| + c;$

$i)\ \frac{7}{2}\log|2x+3| + c;$

$j)\ \log(e^x - 1) - x + c;$

$k)\ 15\log(x-3) -$
$11\log(x-2) + c;$

$l)\ \log(1+\operatorname{tg} x) -$
$-\frac{1}{2}\log(1+\operatorname{tg}^2 x) + c;$

$m)\ \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + c;$

$n)\ \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x +$
$+\log|\cos x| + x + c;$

$o)\ -\frac{1}{16}\log|x| - \frac{1}{4x} -$
$-\frac{1}{8x^2} + +\frac{1}{32}\log(x^2+4) -$
$-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c;$

$p)\ -\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + c;$

$q)\ \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\log\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right) + c;$

$r)\ \frac{1}{5}\operatorname{arctg}^5 x + c;$

$s)\ \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) +$
$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c;$

$t)\ \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + 1\right)\operatorname{arctg} x -$
$-\frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + c;$

$u)\ \frac{x}{2} -$
$-\frac{1}{2}\log(\cos x + \operatorname{sen} x) + c;$

$v)\ \frac{\operatorname{arctg}^2(\log x^2)}{4} + c;$

$x)\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \log(\operatorname{tg} x) + c;$

$z)\ \log\left|1 - \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c.$

11) $x(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t) + 4.$

12) $g(x) = \log(1+e^{-x}) + \frac{\pi}{2}.$

13) 36 207 400 m e 10 115 m/s.

14) $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}e^x\right) + \frac{1}{6}\log(1+3e^{2x}) - 1.$

15) $f(x) = 2\operatorname{sen}\sqrt{x}.$

16) $130,5\ m.$

17) $f(x) = \begin{cases} x\log^2|x| - 2x\log|x| + 2x + c, & x > 0 \\ x\log^2|x| - 2x\log|x| + 2x - c, & ..x < 0. \end{cases}$ com c real arbitrário.

18) *a*) 8 m/s *b*) 18; *c*) 9 m/s *e* $t = \dfrac{3}{2}$ *d*) $t = 3$.

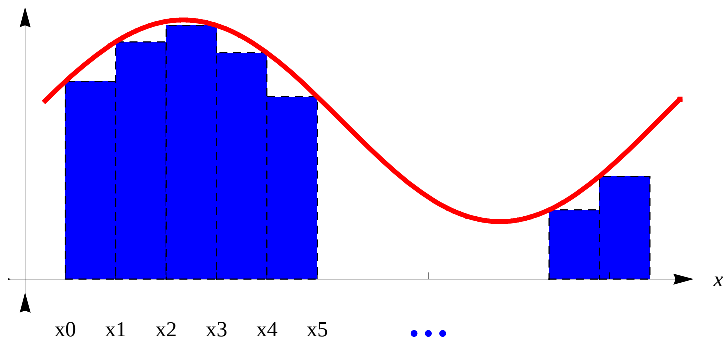


Figura 5.4: Soma inferior de Darboux.

5.2 Integração

5.2.1 Definições

Definição 5.5 *Seja* $[a,b]$, $a<b$, *um intervalo limitado e fechado de* $\mathbb{R}$. *Chama-se partição de* $[a,b]$ *a um conjunto de pontos* $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ *tal que* $a=x_0<x_1<...<x_n=b$.

Esta partição P divide o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_0,x_1], [x_1,x_2], ... [x_{n-1},x_n]$. Podemos denotar por $\mathcal{P}([a,b])$ o conjunto de todas as partições de $[a,b]$.

Definição 5.6 *Sejam* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada e* $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ *uma partição de* $[a,b]$. *Sejam*

$$m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \qquad e \qquad M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Chamam-se soma inferior de Darboux de f *relativamente à partiçã o* P *e soma superior de Darboux de* f *relativamente à partição* P, *respectivamente, as somas:*

$$s(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+...+m_n(x_n-x_{n-1})$$

e

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+...+M_n(x_n-x_{n-1}).$$

A soma inferior de Darboux de f relativamente à partição P e soma superior de Darboux de f relativamente à partição P n ão são mais do que as somas das áreas dos quadriláteros (cujos lados têm comprimentos (x_k-x_{k-1}) e m_k ou comprimentos (x_k-x_{k-1}) e M_k) representados nas figuras seguintes:

Exemplo 5.25 *Seja* $f:[1,8]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3$. *Consideremos a partição* $P=\{1,2,5,8\}$ *de* $[1,8]$.

$$\begin{aligned} s(f,P)=\sum_{k=1}^{3} m_k(x_k-x_{k-1}) &= m_1(2-1)+m_2(5-2)+m_3(8-5)= \\ &= f(1)(2-1)+f(2)(5-2)+f(3)(8-5)= \\ &= 4(2-1)+7(5-2)+28(8-5)=109. \end{aligned}$$

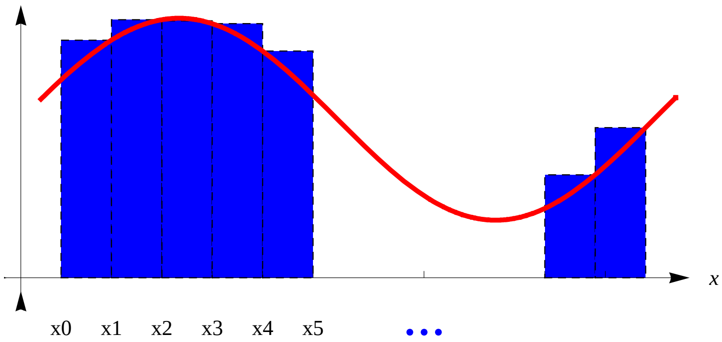


Figura 5.5: Soma superior de Darboux.

$$\begin{aligned} S(f,P) = \sum_{k=1}^{3} M_k(x_k - x_{k-1}) &= M_1(2-1) + M_2(5-2) + M_3(8-5) = \\ &= f(2)(2-1) + f(5)(5-2) + f(8)(8-5) = \\ &= 7(2-1) + 28(5-2) + 67(8-5) = 292. \end{aligned}$$

Definição 5.7 *Sejam $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ e Q duas partições de $[a,b]$. Diz-se que Q é uma partição mais fina que P (ou que é um refinamento de P) quando $P \subset Q$.*

Exemplo 5.26 *Seja $[a,b] = [-1,8]$. O conjunto $P = \left\{-1, 0, \sqrt{2}, 4, 8\right\}$ e o conjunto $Q = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2, 3, 4, 8\right\}$ são partições de $[-1,8]$. Q é uma partição mais fina que P uma vez todos os elementos de P são, também, elementos de Q.*

Proposição 5.4 *Dadas duas partições P e Q dum intervalo $[a,b]$ é sempre possível construir uma terceira partição F mais fina que P e Q.*

Demonstração. Basta considerar $F = P \cup Q$. ■

Teorema 5.5 *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, P e Q duas quaiquer partições de $[a,b]$ sendo Q um refinamento de P. Então:*
1) $s(f,P) \leq S(f,P)$.
2) $s(f,P) \leq s(f,Q)$ e $\leq S(f,Q) \leq S(f,P)$.

Demonstração. Exercício. ■

Corolário 5.1 *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Então:*

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a).$$

Intuitivamente sabemos que o valor da área, A, da região delimitada superiormente pelo gráfico da função não-negativa f, inferiormente pelo eixo dos xx, lateralmente pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$,

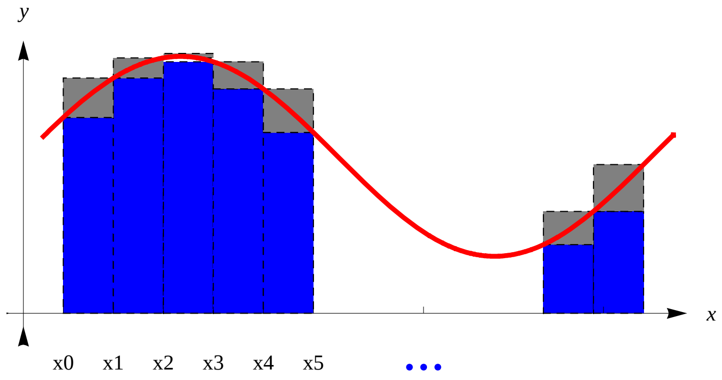


Figura 5.6: Somas inferior e superior de Darboux.

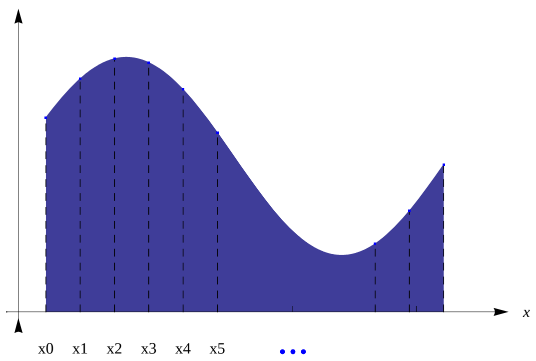


Figura 5.7: Area.

será inferior à soma superior e superior à soma inferior de Darboux de f, isto é,

$$s(f,P) \leq A \leq S(f,P).$$

Consideremos novamente o exemplo anterior: $f : [1,8] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$. Como calculámos anteriormente $s(f,P) = 109$ e $S(f,P) = 292$.

Podemos observar que $s(f,P) = 109 \leq A \leq S(f,P) = 283$.

Definição 5.8 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos:*

1) O integral inferior de Darboux de f em $[a,b]$, como sendo o número real

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(f,P).$$

2) O integral superior de Darboux de f em $[a,b]$, como sendo o número real

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} S(f,P).$$

Proposição 5.5 *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Então:*

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \qquad e \qquad \overline{\int_a^b} f \leq M(b-a).$$

Demonstração. Como $m(b-a) \leq s(f,P)$, $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, então $m(b-a) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(f,P) = \underline{\int_a^b} f$.

Como $S(f,P) \leq M(b-a)$, $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, então $\overline{\int_a^b} f = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} S(f,P) \leq M(b-a)$. ■

Teorema 5.6 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então:*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Demonstração. Temos que $s(f,P) \leq S(f,Q)$, $\forall P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$. Logo $\underline{\int_a^b} f = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(f,P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} S(f,P) = \overline{\int_a^b} f$. ■

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Diz-se que f é integrável à Riemann em $[a, b]$ se e só se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Neste caso, o número real $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$ chama-se o integral (de Riemann) de f em $[a, b]$.

Exemplo 5.27 *Consideremos a função $f : [-1, 7] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3$. Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição qualquer de $[-1, 7]$. Então:*

$$\begin{aligned} s(f,P) = & \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = m_1(x_1 - (-1)) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(7 - x_{n-1}) = \\ & = \inf_{x\in[-1,x_1]} f(x)(x_1 - (-1)) + ... + \inf_{x\in[x_{n-1},7]} f(x)(7 - x_{n-1}) = \\ & = 3(x_1 - (-1)) + ... + 3(7 - x_{n-1}) = \\ & = 3\left[(x_1 - (-1)) + (x_2 - x_1))... + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (7 - x_{n-1})\right] = 3(7 - (-1)) = 24. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f,P) = & \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = M_1(x_1 - (-1)) + M_2(x_2 - x_1) + ... + M_n(7 - x_{n-1}) = \\ & = \sup_{x\in[-1,x_1]} f(x)(x_1 - (-1)) + \sup_{x\in[x_1,x_2]} f(x)(x_2 - x_1)) + ... + \sup_{x\in[x_{n-1},7]} f(x)(7 - x_{n-1}) = \\ & = 3(x_1 - (-1)) + ... + 3(7 - x_{n-1}) = \\ & = 3\left[(x_1 - (-1)) + (x_2 - x_1))... + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (7 - x_{n-1})\right] = 3(7 - (-1)) = 24. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall P \in \mathcal{P}([-1,7]) : s(f,P) = 24 \quad logo \underline{\int_a^b} f = \sup_{P\in\mathcal{P}([-1,7])} s(f,P) = 24. \\ \forall P \in \mathcal{P}([-1,7]) : S(f,P) = 24 \quad logo \overline{\int_a^b} f = \inf_{P\in\mathcal{P}([-1,7])} S(f,P) = 24. \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = 24.$$

Esta função é integrável á Riemann no intervalo $[-1, 7]$ e o valor do integral $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = 24.$

Exemplo 5.28 *Consideremos a função $f : [-1, 7] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in [-1,7] \cap Q \\ 1 & se \quad x \in [-1,7] \cap (\mathbb{R}\backslash Q) \end{cases}$.*

Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição qualquer de $[-1, 7]$. Então:

$$\begin{aligned} s(f,P) = & \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = m_1(x_1 - (-1)) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(7 - x_{n-1}) = \\ & = \inf_{x\in[-1,x_1]} f(x)(x_1 - (-1)) + ... + \inf_{x\in[x_{n-1},7]} f(x)(7 - x_{n-1}) = \\ & = 0(x_1 - (-1)) + ... + 0(7 - x_{n-1}) = 0(7 - (-1)) = 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S(f,P) = &\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = M_1(x_1 - (-1)) + M_2(x_2 - x_1) + ... + M_n(7 - x_{n-1}) = \\
&= \sup_{x\in[-1,x_1]} f(x)(x_1 - (-1)) + \sup_{x\in[x_1,x_2]} f(x)(x_2 - x_1)) + ... + \sup_{x\in[x_{n-1},7]} f(x)(7 - x_{n-1}) = \\
&= 1(x_1 - (-1)) + ... + 1(7 - x_{n-1}) == 1(7 - (-1)) = 8.
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\forall P \in \mathcal{P}([-1,7]) : s(f,P) = o \quad logo \ \underline{\int_a^b} f = \sup_{P\in\mathcal{P}([-1,7])} s(f,P) = 0. \\
\forall P \in \mathcal{P}([-1,7]) : S(f,P) = 8 \quad logo \ \overline{\int_a^b} f = \inf_{P\in\mathcal{P}([-1,7])} S(f,P) = 8.
\end{array}
\right\} \Longrightarrow \underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f.
$$

Com $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$, *podemos concluir que esta função não é integrável á Riemann no intervalo* $[-1,7]$.

Vamos considerar uma relação entre as somas de Darboux que é uma condição necessária e suficiente de integrabilidade duma função.

Teorema 5.7 *Sejam* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. Então* f *é integrável (á Riemann) em* $[a,b]$ *se e só se para todo o* $\delta > 0$ *existe uma partição* P *do intervalo* $[a,b]$ *tal que:*

$$S(f,P) - s(f,P) < \delta.$$

Demonstração. Exercício. ■

Estes teorema permite-nos mostrar a integrabilidade de diversas classes de funções.

Proposição 5.6 *Sejam* $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *duas funções integráveis e* $c \in \mathbb{R}$. *Então:*

1) $f + g$ *é integrável e* $\displaystyle\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$.

2) cf *é integrável e* $\displaystyle\int_a^b (cf) = c\int_a^b f$.

3) $f \cdot g$ *é integrável.*

Demonstração. Exercício. ■

Proposição 5.7 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis. Então:*

1) *Se $d \in \,]a, b[$ então f é integrável em $[a, d]$ e $[d, b]$ e* $$\int_a^d f + \int_d^b g = \int_a^b f.$$

2) $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$ *então* $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3) $|f|$ *é integrável em $[a, b]$ e* $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

4) $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$ *então* $$\int_a^b f(x)dx \leq M\,(b - a)\,.$$

Demonstração. Exercício. ■

5.2.2 Teoremas fundamentais

Definição 5.9 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e integrável em $[a,b]$. Chama-se* ***integral indefinido*** *de f com origem em a a uma função definida por:*

$$\begin{array}{lll} F: & [a,b] & \to \mathbb{R} \\ & x & \to F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

Teorema 5.8 *(**Teorema Fundamental do Cálculo Integral**): Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável em $[a,b]$. Então o integral indefinido de f com origem em a, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, é contínua em $[a,b]$.*

Além disso, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma função contínua em $[a,b]$ então a função F é diferenciável em $[a,b]$ e tem-se que $F'(x_0) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in [a,b]$.

Como f é limitada em $[a,b]$, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo o $x \in [a,b]$.

Demonstração. 1. Seja $x_0 \in [a,b]$ arbitrariamente fixo.Tem-se

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right| = \left|\int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right| \leq M\,|x - x_0|$$

aplicando uma das propriedades estudadas no teorema anterior. Através da desigualdade

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M\,|x - x_0|$$

dado $\delta > 0$ qualquer, podemos tomar $\varepsilon = \frac{M}{\delta}$ e obtemos o seguinte resultado

$$\text{se } |x - x_0| < \varepsilon = \frac{M}{\delta} \text{ então } |F(x) - F(x_0)| < \delta,$$

ou seja, provamos que F é contínua em $[a,b]$.

2. Suponhamos agora que f é contínua em qualquer $x_0 \in (a,b)$. Vejamos que $F'(x_0^+) = f(x_0)$.

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0}(x - x_0)\,f(x_0)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| = \frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt\right|$$

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt$$

Mas como f é contínua

$$\forall\delta > 0 \; \exists\varepsilon > 0 \text{ tal que para } x_0 < t < x < x_0 + \varepsilon \text{ se tem } |f(t) - f(x_0)| < \delta.$$

Logo

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)| \, dt < \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \delta dt = \delta.$$

Donde

$$F'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

De forma análoga se provaria que

$$F'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Portanto obtemos que

$$F'(x_0) = f(x_0), \forall x_0 \in [a, b] \, .$$

■

Este teorema, tal como o nome indica, é um resultado fundamental. Referenciamos três consequências muito importantes.

Nota 5.12 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Então, a função f é primitivável neste intervalo e uma sua primitiva é a função*

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t) dt.$$

uma vez que se tem $F'(x_0) = f(x_0), \forall x_0 \in [a, b]$.

A segunda consequência é um método muito eficaz para o cálculo de integrais de funções contínuas.

Corolário 5.2 *(Regra de Barrow (RB)) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Então, sendo $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$, tem-se

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x) dx,$$

e escreve-se

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

onde F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

"Em construção"

5.2.3 Exercícios Propostos:

19) Seja $f(x) = x + 3$ em $[0, 5]$.

Determine as somas superior e inferior de Darboux quando:

a) $P_1 = \{0, 2, 4, 5\}$.

b) $P_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

20) Seja $f(x)$ definida em $[-1, 2]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ x^2+1 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

e uma partição P do intervalo I:

$$P = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right\}.$$

Determine a soma inferior de Darboux de f relativamente a P.

21) Calcule os integrais superior e inferior da função seguinte no intervalo indicado.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & \text{se} \quad x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$$

A função f é integrável no intervalo $[0, 1]$?Justifique.

22) Seja $f(x)$ uma função contínua e não negativa no intervalo limitado $[a, b] \sqsubseteq \mathbb{R}$.

Prove que se $f(x)$ não é identicamente nula em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

23) Determine, sem os calcular, o sinal dos integrais:

$$a)\quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx; \qquad b)\quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x \; dx$$

24) Diga, justificando, sem calcular, qual dos seguintes integrais é maior:

$$a)\quad \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\; dx \qquad \text{ou} \qquad \int_0^1 x\; dx;$$

$$b)\quad \int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x\; dx \qquad \text{ou} \qquad \int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x\; dx;$$

$$c)\quad \int_0^{\pi/2} \cos x\; dx \qquad \text{ou} \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\; dx.$$

25) Verifique que se tem:

$$e \leq \int_1^e e^{x^2} \log x\; dx \leq e^{e^2}.$$

26) Seja f uma função contínua em $[1, +\infty)$ e

$$\int_1^x f(t)\; dt = e^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - 1\right).$$

$a)$ Determine, justificando, $f(x)$.

$b)$ Sem calcular o integral, mostre que $\int_4^9 f(t)\; dt = 2e^3 - e^2$.

27) Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x \; dx$; *b*) $\int_1^{e} \log x \; dx$; *c*) $\int_1^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \; dx$;

d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1} \; dx$; *e*) $\int_0^{4} \frac{x^3}{x-1} \; dx$; *f*) $\int_0^{1} \frac{1}{x-3} \; dx$;

g) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \; dx$; *h*) $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x} \; dx$; *i*) $\int_0^{1} x\sqrt{1+x} \; dx$;

j) $\int_2^{3} \frac{x}{x^2-25} \; dx$; *k*) $\int_1^{2} x^2 \log x \; dx$; *l*) $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x \; dx$;

m) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x} \; dx$; *n*) $\int_0^{\pi} x \;\; \operatorname{sen} x \; dx$; *o*) $\int_1^{9} x\sqrt[3]{1-x} \; dx$.

p) $\int_0^{1} e^{x+e^x} \; dx$; *q*) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x} \; dx$; *r*) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \; dx$;

s) $\int_e^{e^2} x \log x \; dx$; *t*) $\int_0^{\pi} \sinh x \operatorname{sen} x \; dx$; *u*) $\int_1^{2} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \; dx$;

v) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \operatorname{arcsen} x^2 \; dx$; *x*) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x} \; dx$; *z*) $\int_0^{1} \frac{1}{x^2+4x+5} \; dx$.

28) Seja f uma função integrável em $[0,1]$ e $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ com $a \in [0,1]$. Justifique que g é uma função integrável em $[0,1]$ e mostre que existe $b \in [0,1]$ tal que

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

29) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável no ponto 0,

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt, \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

e $h = g \circ g$, calcule $h''(0)$ expresso em $f(0)$ e $f'(0)$.

30) Justifique que a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ é integrável em $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e mostre que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x} dx.$$

31) Sendo f uma função com 2^aderivada contínua,

consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_0^x (x+t)^2 f(t) dt.$$

a) Calcule, $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$.

Justifique que, se $f(0) \neq 0$, então g tem um ponto de inflexão em $x = 0$.

b) Através duma integração por substituição, mostre que:

$$g(x) = \int_x^{2x} u^2 g(u-x) du.$$

32) Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

a) $f(x) = \int_1^x \log t \ dt$; *b*) $g(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} \ dt$;

c) $h(x) = \int_2^{e^x} \dfrac{1}{\log t} \ dt$; *d*) $r(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} \ dt$.

33) Considere a função: $g(x) = \displaystyle\int_0^x (3+t^3)^{-\frac{1}{2}} dt$.

Indique o seu domínio e calcule $g'(0)$ e $g'(1)$.

34) Defina-se uma função $f(x)$ pelo integral indefinido $\displaystyle\int_0^x t(t-1) e^{-t^2} dt$.

Estude os extremos relativos de $f(x)$.

35) Considere a função $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\log t\; dt.$$

a) Calcule $g(2)$.

b) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule $g'(x)$ para $x>0$.

c) Estude g quanto à monotonia e verifique que há um e um só ponto $c>0$

tal que $g(c)=0$.

36) Seja $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\int_0^{\log x} xe^{t^2}\; dt - x.$$

Verifique que f tem um mínimo em 1.

37) Sejam $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ e $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ funções contínuas. Verifique que:

a) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)\, f\left[(x-1)^2\right] dx = 0$ *b*) $\displaystyle\int_0^\pi g(\operatorname{sen} x)\cos x\; dx = 0.$

38) Consideremos uma função f contínua, duas funções $g(x)$ e $h(x)$ diferenciáveis

num intervalo aberto I e $F(x)=\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$. Mostre que:

$$F'(x)=f\left(g(x)\right)g'(x)-f\left(h(x)\right)h'(x).$$

39) Justifique a diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e

calcule as respectivas derivadas.

$a)$ $f(x) = \int\limits_{x}^{2\pi} \operatorname{sen} 2t \cos t^2 \; dt$; $\quad b)$ $g(x) = \int\limits_{x}^{x^2} \log\left(1+t^2\right) \; dt$; $\quad c)$ $h(x) = \int\limits_{1}^{x} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+t^2} \; dt.$

40) Calcule a área dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$a)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5,\ y \geq -5x+5 \text{ e } y \geq \log x\}$;

$b)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq -x^2+2\}$;

$c)$ $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \frac{1}{2}x - 1\right\}$;

$d)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 10 \text{ e } |x|+|y| \geq 4\}$;

$e)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y \geq 0 \text{ e } y \leq \operatorname{arctg} x\}$;

$f)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x,\ y \geq x^3 \text{ e } y \leq 4x\}$;

$g)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x+2,\ y \geq x^2 \text{ e } y \leq 2\}$;

41) Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas de equação:

$a)$ $x=0,\ x=2,\ y=x\,(x-2)\,,\ y=\frac{x}{2}$;

$b)$ $x=y,\ y=\frac{3}{x^2+2},\ y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$;

$c)$ $-3 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq (x+1)\,e^{x+1}$;

$d)$ $x=e,\ y=0,\ y=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$;

42) Calcule os comprimentos dos arcos:

$a)$ da curva definida por $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, com $x \in [0,1]$;

$b)$ de parábola de equação $y = x^2$, com $x \in [-1,2]$;

$c)$ da curva de equação $y = \cosh x$, entre $P_0 = (1,0)$ e $P_1 = \left(1, \frac{e^2+1}{2e}\right)$

$d)$ da curva de equação $y = \log \frac{e^x-1}{e^x+1}$, compreendido entre os pontos de abcissas a e b com $0 < a < b$.

43) Considere a região A do plano limitada pelas linhas de equação:

$$0 \leq \ y \leq \log x \ e \ x < a, \ \text{com } a > 1$$

a) Calcule a área da região A;

b) Calcule o comprimento da linha (formada por um arco de curva e dois segmentos

de recta) que "limita" o conjunto A.

44) Determine o volume do cone de altura $h = 1$ e cuja base é um disco de raio $r = 1$.

45) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação de 2π da região A

em torno do eixo dos xx, sendo A a região definida por:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq e^x - 1 \ \text{ e } \ 0 \leq x \leq 1\right\}.$$

46) Considere a área da região A do plano limitada pelas linhas de equação:

$$y = 0, \ y = -x, \ y = 2 \ e \ x^2 + y^2 = 4.$$

a) Determine a área da região A;

b) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação

de 2π da região A em torno do eixo dos xx.

47) Um fluído escorre para dentro de um tanque à velocidade de $2t + 3$ litros por minuto,

onde t é o tempo medido em horas depois do meio-dia.

Se o tanque estiver vazio ao meio-dia e tiver a capacidade de 1000 litros,

a que horas estará cheio?

48) Considere uma mola em espiral de comprimento 15 cm.

Determine o trabalho necessário a reduzir a $\frac{2}{3}$ do seu comprimento

sabendo que é necessária uma força de 2 Kg para reduzir a mola de 1 cm.

49) Considerando que a aceleração da gravidade perto da terra é de $9,8\ m/s$,

determine o trabalho necessário para levantar 2 m, acima da superfície da Terra,

um objecto que pesa 50 Kg?

50) Determine o centro de massa:

a) da região limitada superiormente pelo gráfico da função $f(x) = x^2$ e

pelas rectas de equações $y = 0,\ x = 0$ e $x = 1$;

b) do arco da semicircunferência $x^2 + y^2 = 1$ com $y \geq 0$;

c) do conjunto formado pelo disco de raio 1 e centro na origem e

pela região limitada superiormente pelo gráfico da função $sen\ x$

entre os pontos de abcissas 2π e 3π.e inferiormente pelo eixo dos xx.

Soluções dos exercícios

19) *a*) $s\,(f, P_1) = 23$ e $S\,(f, P_1) = 32$; *b*) $s\,(f, P_2) = 25$ e $S\,(f, P_2) = 30$.

20) $s\,(f, P) = 5,5$.

21) $\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0$ e $\overline{\int_0^1} f(x)dx = 1$; Não é integrável.

23) *a*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx > 0$ *b*) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\ dx \geq 0$.

24) *a*) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ dx \geq \int_0^1 x\ dx$;

b) $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x\ dx \leq \int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x\ dx$;

c) $\int_0^{\pi/2} \cos x\ dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\ dx$.

26) *a*) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2}$.

27)

a) 1; *b*) 1; *c*) $\dfrac{2}{3}+\cos 1-\dfrac{\cos^3 1}{3}$;

d) $-\dfrac{\log 3}{2}$; *e*) $\dfrac{52}{3}-\log 5$; *f*) $\log\dfrac{2}{3}$;

g) π; *h*) 0; *i*) $\dfrac{4}{15}(1+\sqrt{2})$;

j) $\log 4-\dfrac{\log 21}{2}$; *k*) $-\dfrac{7}{9}+\dfrac{8\log 2}{3}$; *l*) $\dfrac{3}{5}(e^{\pi}-1)$;

m) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$; *n*) π; *o*) $-\dfrac{468}{7}$;

p) e^e-e; *q*) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$; *r*) $\dfrac{1}{6}$;

s) $\dfrac{1}{4}\left(3e^4-e^2\right)$; *t*) $\dfrac{\sinh\pi}{2}$; *u*) $\log\left|\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\right|$;

v) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2\right)$; *x*) $\log\dfrac{4}{3}$; *z*) $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$.

29) $h''(0)=f'(0)\left(f(0)\right)^2+f(0)f'(0)$.

31) *a*)

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+2\int_0^x tf(t)dt+4x^2f(x);$$

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+2\int_0^x tf(t)dt+4x^2f(x);$$

$$g'''(x)=14f(x)+20xf'(x)+4x^2f''(x).$$

32)

a) $D_f = (0, +\infty)$; é monótona decrescente em $(0, 1)$, monótona crescente em $(1, +\infty)$; mínimo local o ponto $(1, 0)$.

b) $D_g = \mathbb{R}$; é monótona decrescente em $\mathbb{R}$; não tem extremos locais.

c) $D_h = (0, +\infty)$; é monótona decrescente em $(0, +\infty)$; não tem extremos locais.

d) $D_r = \mathbb{R}$; é monótona decrescente em $(-\infty, 0)$, monótona crescente em $(0, +\infty)$; mínimo local o ponto $(0, 0)$.

33) $Dg = \left(-\sqrt[3]{3}, +\infty\right)$; $g'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e $g'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$.

34) A função tem um máximo no ponto zero com $f(0) = 0$ e um mínimo no ponto de abcissa 1 com $f(1) = \displaystyle\int_0^1 t\,(t-1)\,e^{-t^2}dt$.

35) *a*) $g(2) = \log \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[10]{2}\sqrt{5}}$; *b*) $g'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\log x$;

c) g é estritamente crescente em $[1, +\infty)$ e estritamente decrescente em $(0, 1]$; $c = 1$.

39)

a)$f'(x) = -\operatorname{sen} 2x \cos x^2$; *b*)$g'(x) = -\log(1+x^2) + \log(1+x^4)\,2x$;

c)$h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\left(2\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

40) *a*)$e^5 - \dfrac{7}{2}$; *b*)$\dfrac{9}{2}$; *c*) $-\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5}$; *d*)$20\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{3}{\sqrt{10}} - \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) - 16\sqrt{10} + 34$;

e) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\log 2$; *f*) $\dfrac{15}{4}$; *g*) $\dfrac{7+8\sqrt{2}}{6}$.

41) *a*) $\dfrac{7}{3}$; *b*) $\dfrac{5}{12} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg} 2 - \dfrac{\pi}{4}\right)$; *c*) $-3e^{-2} + 3e^4 + 2$; *d*) $4 - 2\sqrt{e}$.

42) *a*) $\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$; *b*) $\dfrac{1}{4}\left[4\sqrt{17} - \log\left(4 + \sqrt{17}\right) + 2\sqrt{5} + \log\left(-2 + \sqrt{5}\right)\right]$;

c) $\dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2e}$; *d*) $a - b + \log\dfrac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}$.

43) *a*) $a \log a$;

b) $(a-1) + \log a + \sqrt{1+a^2} + \dfrac{1}{2} \log \dfrac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}+1} - \sqrt{2} - \dfrac{1}{2} \log \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

44) $\dfrac{\pi}{3}$.

45) $\pi \left(\dfrac{e^2}{2} - 2e + \dfrac{5}{2} \right)$.

46) *a*) $\pi + 2$; *b*) $\dfrac{32}{3}\pi$.

47) $14 : 51H$.

48) $0,25\ Kgm$.

49) $980\ J$.

50) *a*) $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{10} \right)$; *b*) $\left(0, \dfrac{4}{3\pi} \right)$; *c*) $\left(\dfrac{5\pi}{2+\pi}, \dfrac{\frac{\pi}{4}}{2+\pi} \right)$.

5.3 Bibliografia

J. Santos Guerreiro, "Curso de Matemáticas Gerais", Livraria Escolar Editora, 1969.

Carlos Sarrico, "Análise Matemática, leituras e exercícios", Gradiva, 1997,

J. Campos Ferreira, "Introdução à Análise Matemática", Fundação Calouste Gulbenkian, 1995,

T. Apostol, "Cálculo", Vol. I e II, Reverté, 1994,

5.3.1 BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

E. Langes Lima, "Curso de Análise", Vol. I, IMPA, 1994,

J. Marsden e A Weinstein, "Calculus", Springer-Verlag, 1980,

Bento Jesus Caraça, "Conceitos Fundamentais da Matemática", Gradiva, 1998,

N. Piskounov, "Cálculo Diferencial e Integral", Lopes da Silva Editora, 1978.