INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS

Universidade de Évora

Escola de Ciências e Tecnologia

Relatório de unidade curricular

Provas de Agregação em Matemática

ANA MARGARIDA DA SILVA AFONSO RODRIGUES
Professora Auxiliar
Departamento de Matemática
Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade de Évora

1. Introdução

A disciplina *Introdução aos Sistemas dinâmicos* foi elaborada para ser uma uma unidade curricular de opção do terceiro ano da licenciatura em Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Évora podendo ainda ser frequentada por estudantes da Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão.

São pré-requisitos para a frequência desta UC conhecimentos básicos de Análise e Topologia que terão já sido adquiridos por um aluno que frequente a licenciatura em Matemática.

Assim sendo, proponho o desenvolvimento de uma UC a ser leccionada no semestre par.

Carga horária e funcionamento das aulas

A carga horária prevista paara a disciplina é de 3 horas semanais durante um período de 14 semanas, o que totaliza 42 horas.

Cada aula terá a duração de 90 minutos. Serão disponibilizadas listas de exercícios para os alunos.

Sempre que possível, dar-se-á tempo aos alunos para demonstrarem certos resultados, sozinhos ou em grupo, tentando fomentar o interesse na disciplina.

Os últimos minutos da aula podem ainda ser usados para suscitar a curiosidade do aluno sobre tópicos avançados, sejam de conteúdos que ainda vão ser abordados no curso ou extra-curriculares, de modo a incentivar os alunos ao estudo autónomo e fomentar o interesse pela área.

Objectivos

O objectivo central da Unidade Curricular *Introdução aos Sistemas Dinâmicos* é o de introduzir conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos de baixa dimensão através de modelos e exemplos que exibam certos comportamentos e/ou propriedades conhecidas. Sendo a área de sistemas dinâmicos vasta e interdisciplinar, foi necessário selecionar conteúdos programáticos adequados à duração de um semestre e que, ainda assim, contivessem um espectro amplo de comportamento em sistemas dinâmicos.

Procurar-se-á, sempre que possível, estimular o aluno a observar as pontes entre diferentes áreas da matemática, observando esta última como um conjunto de ferramentas adquiridas ao longo dos últimos anos de estudo e não como um agregado desconexo de ferramentas, bem como estimular o aluno ao estudo autónomo.

Pretende-se ainda apresentar problemas em aberto na área de sistemas dinâmicos como forma de convidar os alunos que assim o desejem a continuar os estudos nesta área.

Sendo a área de Sistemas Dinâmicos extremamente vasta e com numerosas aplicações em diferentes áreas (Economia, Biologia, Engenharia, etc), foi feita uma seleção de conteúdos adequada à duração de um semestre lectivo, tendo-se optado por uma disciplina mais focada na Dinâmica de baixas dimensões.

Após a conclusão desta Unidade Curricular, o aluno deverá ser capaz de:

- Relembrar e aplicar as principais definições em Análise e Topologia;
- Enunciar, provar e aplicar teoremas fundamentais em Sistemas Dinâmicos.
- Usar o raciocínio abstrato para resolver problemas.

- Pensar analiticamente usando argumentos e deduções lógicas.

Em cada secção serão apresentadas definições, exemplos e a demonstração de alguns teoremas. Os alunos terão assim a oportunidade de aprofundar as suas capacidades de pensamento axiomático, resolução de problemas e apresentação de demonstrações matemáticas.

2. Avalição

A avaliação contínua dos alunos é feita através de duas frequências realizadas durante o semestre. A nota minima em cada frequência para aprovação será de 9 valores. Caso os alunos não obtenham aprocação na avaliação contínua poderão realizar o exame de época normal.

3. Programa da disciplina

CAPÍTULO I
Introdução.

CAPÍTULO II
Funções no intervalo.

CAPÍTULO III
Homeomorfismos da circunferência.

CAPÍTULO IV
Entropia topológica.

CAPÍTULO V
Derivada de Schwarz.
Dinâmica simbólica.
Dinâmica hiperbólica.

4. Estrutura do curso

Esta UC encontra-se dividida em cinco capítulos.

Com o primeiro capítulo procura-se que o aluno compreenda noções básicas em sistemas dinâmicos.
Será feita uma breve revisão de alguns resultados elementares de Análise e de Topologia. Será introduzida a noção de sistema dinâmico discreto e apresentar-se-á alguns exemplos básicos. Em seguida estudam-se os conceitos de órbita de um ponto e de pontos fixos., conjuntos α-limite e ω-limite, órbitas periódicas, pontos recorrentes, conjunto não errante, Órbitas periódicas atractoras e repulsoras.

No segundo capítulo serão estudadas funções no intervalo. Definiremos conjugacia topológica e semi-conjugacia topológica entre duas funções. Serão estudados exemplos da existência de conjugacia e semi-conjugacia entre algumas funções.

Apresentaremos em seguida a noção de transformação no intervalo topologicamente transitiva. Dependencia sensitiva nas condições iniciais. Estudo do exemplo da função quadrática e da rotação irracional do círculo.

Definimos *caos* (segundo Devaney) bem como a distancia C^0 entre duas funções. Em seguida apresentar-se-à a definição de estabilidade estrutural.

Faremos um breve estudo sobre conjugacia topológica entre funções próximas de um ponto fixo hiperbólico e a sua derivada.

Terminaremos este capítulo com a definição de ordem de Sarkovskii e apresentaremos o Teorema de Sarkovskii, demonstraremos o resultado que período 3 implica a existência de órbitas periódicas com todos os períodos. Ainda será feito um breve estudo sobre contrações no espaço euclideano.

No terceiro capítulo estudaremos homeomorfismos da circunferencia.

Definiremos levantamento de um homeomorfismo da circunferência e discutiremos algumas propriedades de levantamentos de um homeomorfismo.

Em seguida definimos número de rotação. Estudaremos em separado os casos de um homeomorfismo da circunferência com número de rotação racional e com número de rotação irracional.

Terminamos este capítulo com um breve estudo de difeomorfismos da circunferência finalizando com o Teorema de Denjoy.

No quarto capítulo estudaremos entropia topológica. Após alguma revisão aprofundada de aguns conceitos de topologia, serão discutidas algumas propriedades da entropia de uma cobertura.

Definiremos entropia de uma função contínua $f : X \to X$ com respeito a uma cobertura $\mathcal{U}$ e finalmente a entropia topológica.

Estudaremos algumas propriedades da entropia topológica de funções monótonas por pedaços num intervalo.

Finalizamos este capítulo investigando a entropia topológica como um invariante de conjugacia.

Iniciamos o quinto capítulo com o estudo da derivada de Schwarz. Demonstraremos o Teorema de Singer (seguindo a demonstração no livro de Collet-Eckman). Discutiremos a relação entre o Teorema de Singer e a existência de órbitas periódicas atractivas.

Em seguida estudaremos dinâmica simbólica. Definimos itinerário de um ponto sob a acção de um sistema dinâmico e transformação desvio. Estudaremos de forma mais aprofundada o exemplo da função quadrática.

Estudaremos cadeias de Markov topológicas e matrizes de transição.

Faremos um breve estudo da teoria do amassamento de Milnor-Thurston e de sequências de amassamento.

Na aula final do curso (que não será avaliada), introduzimos os alunos a um muito breve estudo de dinâmica hiperbólica. Serão apresentados os teoremas de Hartman-Grobman e de Hadamard-Perron.

5. Plano das aulas

Esta cadeira decorre durante 14 semanas com duas aulas semanais de 1h30 cada. Segue-se o plano para cada uma das 28 aulas.

Capítulo I

Introdução

Aula 1. Breve motivação e descrição dos conteúdos a serem desenvolvidos ao longo do curso.

Revisão de alguns resultados elementares de Análise e de Topologia (por exemplo, teoremas do valor intermeédio, teorema do valor médio, teorema do ponto fixo de Banach e teorema da função implícita).

Noção de sistema dinâmico discreto e apresentação de alguns exemplos básicos: rotação da circunferência, transformações expansoras e endomorfismos do toro.

Aula 2. Definição de semiórbita positiva, semiórbita negativa e órbita de um ponto. Definição de ponto fixo, ponto eventualmente periódico de período n, ponto periódico atractivo, hiperbólico e repulsivo.

Conjuntos α-limite e ω-limite, órbitas periódicas, pontos recorrentes, conjunto não errante, Órbitas perióodicas atractoras e repulsoras. O exemplo da função quadrática.

Aula 3. Aula de exercícios.

Capítulo II

Funções no intervalo

Aula 4. Definição de conjugacia topológica e de semi-conjugacia topológica entre duas funções.

Investigação da existência de conjugacia e semi-conjugacia entre as funções duplicadora, tenda e quadrática.

Aula 5. Definição de transformação no intervalo topologicamente transitiva. Dependencia sensitiva nas condições iniciais. Estudo do exemplo da função quadrática e da rotação irracional do círculo.

Definição de caos (segundo Devaney). O exemplo da função $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(\theta) = 2\theta$.

Aula 6. Definição de distancia C^0 entre duas funções. O exemplo das funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = (2 + \epsilon)x$.

Definição de estabilidade estrutural. O exemplo da função $L(x) = \dfrac{1}{2}x$. Estudo da função $T_\lambda(x) = x^3 - \lambda x$ quanto à estabilidade estrutural.

Teorema sobre conjugacia topológica entre funções próximas de um ponto fixo hiperbólico e a sua derivada.

Aula 7. Definição de ordem de Sarkovskii. Teorema de Sarkovskii. Demontração do resultado que período 3 implica a existência de órbitas periódicas com todos os períodos.

Aula 8. Definição de contração no espaço euclideano. Relação entre contração e pontos fixos. Continuidade de Lipschitz. Demonstração de alguns resultados sobre funções λ-Lipschitz.

Aula 9. Aula de exercícios.

Capítulo III

Homeomorfismos da circunferência

Aula 10. Aula 10. Definição de levantamento de um homeomorfismo da circunferência. O exemplo da função $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(x) = x + \beta \sin(2\pi x) \pmod 1$ com $\beta \in \mathbb{R}$. Propriedades de levantamentos de um homeomorfismo.

Aula 11. Definição de número de rotação.

Mostraremos que se $f : S^1 \to S^1$ é um homeomorfismo que preserva orientação e F é um levantamento de f então para cada $x \in \mathbb{R}$ o limite

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

existe e é independente de x e que se G é outro levantamento de f, então $\rho(G) - \rho(F) \in \mathbb{Z}$.

Aula 12. Homeomorfismos da circunferência com número de rotação racional.

Mostreremos que se $f : S^1 \to S^1$ é um homeomorfismo que preserva orientação, então $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ se e só se f tem pelo menos um ponto periódico.

Mostraremos que se $f : S^1 \to S^1$ é um homeomorfismo que preserva orientação com $\rho(f) = p/q$ com p e q primos entre si, então todos os pontos periódicos têm período q.

Aula 13. Homeomorfismos da circunferência com número de rotação irracional.

Mostraremos que se F é um levantamento de um homeomorfismo que preserva orientação com $\rho(f) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ então para cada $x \in \mathbb{R}$, $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ temos $F^{n_1}(x)+m_1 < F^{n_2}(x)+m_2$ se e só se $n_1\rho(F) + m_1 < n_2\rho(F) + m_2$.

Mostraremos que se $f : S^1 \to S^1$ é um homeomorfismo que preserva orientação com número de rotação irracional, então existe uma função contínua $h : S^1 \to S^1$ não decrescente e sobrejectiva tal que $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$.

Aula 14. Difeomorfismo da circunferência. Teorema de Denjoy.

Aula 15. Aula de exercícios.

Aula 16. Primeira frequência.

Capítulo IV

Entropia topológica.

Aula 17. Definição de entropia topológica de uma cobertura $\mathcal{U}$ de um espaço compacto X. Definição de junção e de refinamento de duas coberturas. Propriedades da entropia de uma cobertura.

Definição de entropia de uma função continua $f : X \to X$ com respeito a uma cobertura $\mathcal{U}$.

Definição de entropia topológica.

Aula 18. Estudo de algumas propriedades da entropia topológica de funções monótonas por pedaços num intervalo.

Exemplos de famílias de funç
oes para os quais é possível calcular a entropia topológica.

Aula 19. Definição de conjunto errante e não errante, ponto errante e não errante (conceitos abordados nas primeiras aulas) e de conjunto de pontos não errantes para uma função contínua num espaço de Hausdorff compacto f.

Mostraremos que a entropia de f é igual à entropia da restrição de f ao conjunto dos pontos não errantes

Aula 20. A entropia topológica como um invariante de conjugacia.

Aula 21. Aula de exercícios.

Capítulo V

Derivada de Schwartz, dinâmica simbólica e uma muito breve introdução ã dinâmica hiperbólica

Aula 22. Definição de derivada de Schwarz. Demonstração do Teorema de Singer. O Teorema de Singer e a existência de órbitas periódicas atractivas.

Aula 23. Definição de itinerário de um ponto sob a acção de um sistema dinâmico. Definição de transformação desvio. O conjunto das sucessões Σ_k^+ e Σ_k (sucessões bilaterais). Noção de distância em Σ_k^+ e Σ_k. Estudo do exemplo da função quadrática.

Aula 24. Definição de cadeia de Markov topológica e de matriz de transição. Definição de cadeia de Markov bilateral. Determinação dos pontos m-periódicos para uma cadeia de Markov com uma matriz de transição 2x2. Entropia topológica de uma cadeia de Markov.

Aula 25. Teoria do amassamento de Milnor-Thurston. Sequências de amassamento. Estudo da função $f_{a,b}(x) = 2x + a + (b/\pi)\sin(2\pi x) \pmod 1$, com $b = 1$ e a um parâmetro real. Definição de línguas de Arnold para esta família de funções. Cálculo explícito da fronteira da língua de período 1. Demonstração de alguns resultados particulares para esta família de funções.

Aula 26. Aula de exercícios.

Aula 27. Definição de conjunto hiperbólico. Noções básicas. Espaço estável e instável. Ferradura de Smale. Definição de ponto fixo hiperbólico. Teorema de Hartman-Grobman. Teorema de Hadamard-Perron.

Aula 28. Segunda frequência.

6. Exemplos de exercícios a serem resolvidos nas aulas 3, 8, 14, 20 e 25

Exercícios para a aula 3

1. Considere o difeomorfismo
$$f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x).$$
Mostre que os pontos fixos de f são hiperbólicos.

2. Seja p um ponto fixo hiperbólico com $|f'(p)| < 1$. Mostre que existe um intervalo aberto U em torno de p tal que se $x \in U$, então
$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p.$$

3. Considere a família quadrática dada por
$$f_\mu(x) = \mu x(1 - x).$$
Seja $1 < \mu < 3$. Mostre que:
(1) f_μ tem um ponto fixo atractivo em $p_\mu = (\mu - 1)/\mu$ e um ponto fixo repulsivo em $p = 0$.
(2) Se $0 < x < 1$, então
$$\lim_{n\to\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu.$$

4. Seja $f : I \to I$ e assuma que $|f'(x)| < 1$ para todo o $x \in I$. Mostre que então existe um único ponto fixo de f em I e que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo o $x, y \in I, x \neq y$.

5. Considere a função $f(\theta) = \theta + \epsilon \sin(2\theta)$ para $0 < \epsilon < 1/2$. Calcule os pontos fixos de f e diga se são repulsivos ou atractivos.

6. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$. Mostre que cada órbita T_λ é densa em S^1 se λ é irracional.

Exercícios para a aula 8

1. Considere em $[0,1]$ as seguintes funções:
$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \frac{1}{2}, \\ 2(1-y) & \frac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$
e
$$F_\mu = \mu z(1-z).$$
Mostre que T e F_4 são topologicamente conjugadas via a função $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ onde $\sigma(z) = \sin^2(\pi z)$.

2. Mostre que a familia de funções dada por
$$f_{a,b}(x) = 2x + a + \frac{b}{\pi}\sin(2\pi x) \mod 1,$$
é topologicamente conjugada a
$$g_{a,b}(z) = e^{2\pi a i} z^2 e^{b(z-\frac{1}{z})}$$
via $\psi = e^{2\pi x i}$ para $z \in \mathbb{C}$ no circulo unitário.

3. Mostre que se f tem um ponto periódico de perıodo $n > 1$ que não é uma potência de 2, então f é caótica.

4. Seja $F : [1,5] \to [1,5]$ tal que
$$F(1) = 3, F(2) = 5, F(3) = 4, F(4) = 2, F(5) = 1.$$
Mostre que F tem uma órbita periódica de período 5.

5. Seja $f(x) = x - x^2$. Mostre que f não é estruturalmente estável.

6. Seja $f : I \to I$ uma função contínua com um ponto periódico de período 12632. Use o Teorema de Sarkovskii para caracterizar os períodos das órbitas periódicas que existem como resultado do teorema.

7. Suponha que $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com um ponto x tal que
$$x < T(x) < T^2(x) < T^3(x) < T^4(x)$$
e que $T^5(x) = x$. Encontre intervalos $K_i, i = 1,2,3,4$ tais que $K_{i+1} \subset T(K_i)$ para $i = 1,2,3$ e
$$k_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \subset T(K_4).$$
Existe n tal que exista uma ferradura para T^n? Justifique.

Exercícios para a aula 14

1. Considere a função $\tau_\omega(\theta) = \theta + \omega$ (uma traslação de θ de um ângulo $2\pi\omega$)

   (a) Mostre que para $k \in \mathbb{Z}$,
   $$T_{\omega,k}(x) = x + \omega + k$$
   é um levantamento de $\tau_\omega(\theta)$.

   (b) Calcule o número de rotação de τ.

2. Considere a seguinte família de funções
   $$f(x) = x + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x) \text{ (mod1)},$$

   (a) Mostre que
   $$F(x) = x + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x)$$
   é um levantamento de f.

   (b) Calcule o número de rotação de f.

3. Seja F tal que $\rho(F) = \tau$, com τ irracional. Mostre que $F_\tau^n(0) + m < F_\tau^k(0) + q$ onde F_τ é uma translação por τ.

4. Sejam $f, g : S^1 \to S^1$ dois homeomorfismos da circunferência topologicamente conjugados que preservam orientação. Mostre que têm o mesmo número de rotação.

5. Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo da circunferência que preserva a orientação com levantamento $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Assuma que f tem um ponto periódico de período q. Mostre que $\rho(F) = p/q$. Mostre que se f tem um ponto periódico então o seu número de rotação é racional.

6. Dizemos que $f : I \to I$ é monótona por pedaços se existe uma partição finita de I em intervalos tais que em cada uma das partições f é monótona. Mostre que se f pertence a esta classe de funições e $\mathcal{A}$ é uma cobertura finita de I, então existe uma cobertura aberta $\mathcal{B}$ de I tal que
   $$h(f, \mathcal{A}) \leq h(f, \mathcal{B}) + \log 3.$$

Exercícios para a aula 20

1. Seja $R_\alpha : S^1 \to S^1$ uma rotação da circunferência. Mostre que $h(R_\alpha) = 0$.

2. Considere a tranformação $E_2 : S^1 \to S^1$ dada por
$$E_2(x) = \begin{cases} 2x, x \in [0, 1/2), \\ 2x - 1, x \in [1/2, 1). \end{cases}$$
Mostre que $h(E_2) = \log 2$.

3. Seja $E_m : x \mapsto mx \pmod 1$, com $m \in \mathbb{N},\ |m| \geq 2$. Mostre que $h_{top}(f^m) = |m| h_{top}(f)$.

4. Calcule a entropia topológica de $f(x) = x(1 - x)$ em $[0, 1]$.

5. Mostre que sendo $f : I \to I$ uma função no intervalo λ– Lipschitz com $\lambda \geq 1$, então f tem entropia finita.

Exercícios para a aula 25

1. Mostre que se tivermos duas funções $f, g \in \mathcal{C}^3$ tais que $Sf < 0$ and $Sg < 0$ então temos $S(f \circ g) < 0$.

2. Mostre que se $f \in \mathcal{C}^3$ e $Sf(x) < 0$ para todo o $x \in [-1, 1]$, então $S(f^n)(x) < 0$ para todo o $x \in [-1, 1]$.

3. Mostre que se $f \in \mathcal{C}^3$ e $Sf < 0$ para todo o x, então $|f'|$ não tem nenhum mínimo local positivo em $(-1, 1)$.

4. Considere o desvio $\sigma : \Sigma_k^+ \to \Sigma_k^+$. Mostre que $h(\sigma|\Sigma_k^+) = \log k$.

5. Seja $s = (000\ldots)$ e $t = (111\ldots)$, calcule $d(s, t)$.

6. Seja $s = (000\ldots)$ e $t = (010101\ldots)$, calcule $d(s, t)$.

Bibliografia recomendada:

[BV] Sistemas dinâmicos: uma introdução. L Barreira e C. Valls. IST Press.
[AR] Dynamical Systems: an example-led approach. A. Rodrigues. CRC Press.
[RD] An introduction to chaotic dynamical systems. R.L.Devaney. Westview Press.
[HK] B. Hasselblatt and A. Katok, A first course in dynamics: with a panorama of recent developments, Cambridge University Press 2003.